NOTAS DE ENSINO
Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 52-55

A desigualdade de Bernoulli do ponto de vista do cálculo

Geraldo Ávila e Walter Mascarenhas

É bem sabido que a desigualdade de Bernoulli,

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{1}$$

é válida para todo inteiro positivo n e $x \geq -1$. Na verdade, essa desigualdade é válida num domínio mais amplo da variável x, como veremos abaixo. Sua demonstração por indução também é bem conhecida, e se faz assim: suponhamos a desigualdade verdadeira para um certo n. Então, multiplicando ambos os membros de (1) pelo número não negativo $1 + x$ (e é aqui que se faz uso do fato de que $x \geq -1$), obtemos:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

que é a mesma desigualdade (1) com $n+1$ em lugar de n. Como, por simples inspeção, podemos ver que a desigualdade é verdadeira para $n = 1$, concluímos que ela é verdadeira para todo número positivo n.

Certa vez, ao ver essa demonstração numa aula de Análise, um aluno perguntou: "Professor, essa desigualdade é verdadeira em $x < -1$? Se verdadeira, para que valores?"

A demonstração por indução não responde a essas perguntas, que podem, todavia, ser completamente esclarecidas com os métodos do Cálculo. Como veremos a seguir, esses métodos conduzem a uma interessante demonstração da desigualdade de Bernoulli, que é, ao mesmo tempo, uma boa ilustração de como esses métodos do Cálculo, combinados com a visualização geométrica, são de grande alcance e muito poderosos.

Comecemos com os gráficos da função $f(x) = (1 + x)^n$ e de sua tangente $g(x) = 1 + nx$ em $x = 0$ (a propósito, o gráfico de f é o mesmo que o de $y = x^n$ transladado uma unidade para a esquerda.) e procedamos a estudar a função

$h = f - g$ pelo exame de suas derivadas primeira e segunda. Temos:

$$h(x) = (1 + x)^n - 1 - nx; \quad h'(x) = n[(1 + x)^{n-1} - 1];$$

$$h''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}.$$

Consideremos primeiro o caso mais fácil, quando n é par, $n \geq 2$. (Veja a Fig. 1.) Então h' é crescente para todo x e $h'(0) = h(0) = 0$. Isto prova que *a desigualdade (1) é verdadeira, no sentido estrito, para todo x, exceto $x = 0$, onde vale o sinal de igualdade, sempre que $n \geq 0$ for par.*

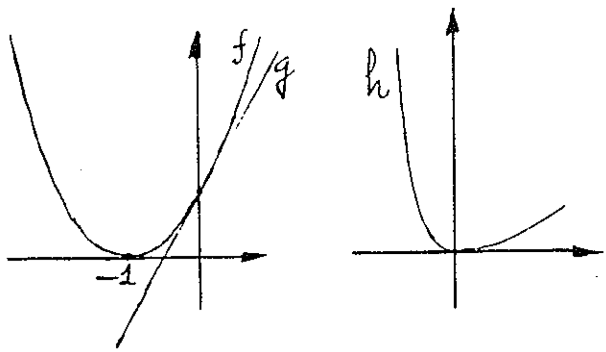

Figura 1

Suponhamos agora que n seja ímpar, $n \geq 3$. (Veja a Fig. 2) A derivada h'' é negativa em $x < -1$ e positiva em $x > -1$, donde h ser côncava (concavidade voltada para baixo) à esquerda de $x = -1$ e convexa (concavidade voltada para cima) à direita. Além disso, $h(x)$ tem um máximo positivo $2(n - 1)$ em $x = -2$ e mínimo zero em $x = 0$, donde concluirmos que *existe um x_n entre -3 e -2 tal que a desigualdade (1) é verdadeira no sentido estrito para $x > x_n$, exceto em $x = 0$, onde vale o sinal de igualdade, sempre que $n \geq 3$ for ímpar.* (Observe que para $n = 3$, $x_n = -3$, como é fácil verificar.)

Como se vê, claramente, essa apresentação da desigualdade de Bernoulli com os recursos do Cálculo, enriquecida com a visalização geométrica, é bem mais reveladora e elucidativa que a demonstração por indução. Ela mostra, em particular, que a desigualdade é válida para todo $x \geq -2$.

Essa demonstração pode ser apresentada num primeiro curso de Cálculo,

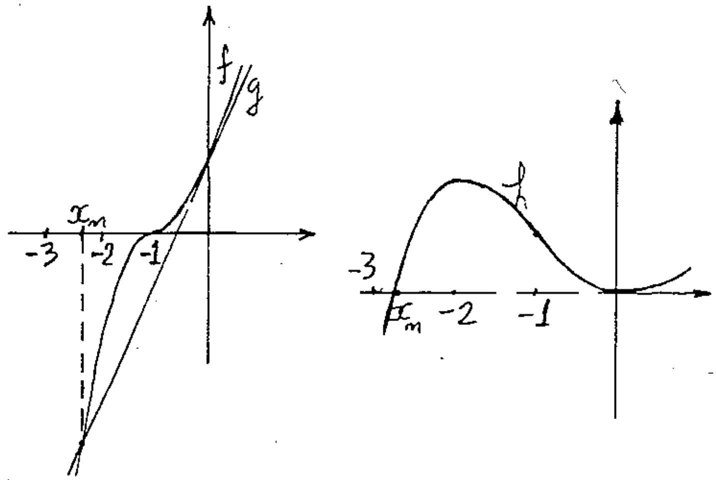

Figura 2

quando do estudo de esboço de curvas; e é uma boa aplicação das derivadas primeira e segunda. Ela pode até ser apresentada mais cedo no curso, quando se mostra que a derivada de $y = x^n$ é $y' = nx^{n-1}$; neste caso é preciso utilizar mais a visualização geométrica, escrever a equação da reta tangente à curva no ponto $x = 1$ e transladar uma unidade para a esquerda essa tangente e o gráfico de $y = x^n$. Tudo isso é um bom exercício sobre funções e gráficos.

Mostraremos, em seguida, que a seqüência x_n é crescente e converge para -2. Provaremos primeiro esta última parte, que é mais fácil. Observe que de agora em diante n é sempre ímpar.

A seqüência x_n converge para -2

Para provar que $x_n \to -2$ é conveniente escrever qualquer x entre -3 e -2 na forma $x = -2 - \delta$, onde $0 < \delta < 1$. É fácil ver que, qualquer que seja δ nessas condições, existe N tal que a função (observe que n é impar, portanto, do tipo $n = 2k + 1$)

$$H(\delta) = h(x) = (2 + \delta)n - 1 - (1 + \delta)^n$$

torna-se negativa para todo $n = 2k + 1 > N$. Isto prova que $x_n > -2 - \delta$ para todo $n = 2k + 1 > N$, portanto, que $x_n \to -2$ como desejado.

A seqüência x_n é crescente

Para provar que a seqüência x_n é crescente, pomos $x_n = -2 - z(n)$, onde, para

$n = 2k + 1 > 3$, $0 < z(n) < 1$. Teremos:

$$H(z(n)) = [2 + z(n)]n - 1 - [1 + z(n)]^n = 0. \tag{2}$$

Como $H(1) = 3n - 1 - 2^n < 0$ e $H(1/n) = 2n - (1 + 1/n)^n > 6 - c > 0$, vemos que

$$\frac{1}{n} < z(n) < 1. \tag{3}$$

Vamos agora encarar n como variável contínua. Então, derivando a equação (2) em relação a n, obtemos:

$$2 + z + nz' - n(1 + z)^{n-1} z' - (1 + z)^n \ln(1 + z) = 0,$$

portanto,

$$\frac{n}{1+z}[1 + z - (1 + z)^n]z' = (1 + z)^n \ln(1 + z) - 2 - z;$$

ou ainda, em vista de (2) e (3),

$$\frac{n}{1+z}(2 + z)(1 - n)z' = (2n + nz - 1) \ln(1 + z) - 2 - z > 2n \ln(1 + z) - 3$$

$$= 2\ln(1 + z)^n - 3 = 2\ln(2n + nz - 1) - 3 > 2\ln 2n - 3 > 2\ln 6 - 3 > 0.$$

Daqui e do fato de ser $(2 + z)(1 - n) < 0$, concluímos que $z' < 0$. Isso prova que a seqüência x_n é crescente, como queríamos demonstrar.

Geraldo Ávila
SHIN - QL 11, Conj. 2, Casa 19
71515-725 Brasília, DF

Walter Mascarenhas
Instituto de Matemática, UNICAMP
13081-970 Campinas, SP