Matemática Universitária Nº 18, Junho de 1995, 19-32

"A pirâmide inexistente," logaritmos naturais e o teorema de Gel'Fand-Mazur

Odilon Otávio Luciano

1 - Introdução

Permitindo-nos alguma liberdade quanto a nuanças matemáticas e históricas podemos situar as origens do chamado *Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)* num trabalho de *A. Girard* de 1629: *Invention Nouvelle en l'Algèbre"*. Na verdade Girard enunciou de maneira bastante geral e vaga o que foi considerado desde então como um princípio *a priori* — como pertinente à *natureza* da Álgebra — não sendo nem questionado nem demonstrado até o século XIX. Podemos hoje associá-lo ao Teorema da Fatoração Linear (TFL). Mais especificamente, uma questão correlata ressurge em outra forma nas investigações de *Leibniz*, no início do século XVIII, a respeito do que hoje chamamos primitivas de funções racionais — ele procurava fatorar polinômios com coeficientes reais em polinômios com grau um ou dois, ainda com coeficientes reais. A esse problema *Leibniz* reservava uma resposta *geral* negativa — tinha como paradigma o polinômio $x^4 + 1$, o qual acreditava não admitir tal fatoração, já conhecida por *Descartes*.

Nosso caminho para uma prova do *TFA* (na verdade de um resultado mais geral, o qual implica inclusive os famosos lema e teorema de *Gelfand-Mazur)*, envolve a discussão de uma propriedade da função logaritmo que esteve no *centro* de uma *polêmica* famosa a respeito dos logaritmos de números negativos, na qual engajaram-se *Leibniz* e *J. Bernoulli,* o primeiro considerando que não poderiam ser reais (sem mais especificação) e o outro, que o gráfico da função logaritmo deveria ser simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é, $\log(-x) = \log(x)$. J. Bernoulli era motivado pela observação de que $\frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{d}{dx}\log x$. Argumentos do tipo $\log((-x)^2) = \log(x^2)$, $\log((-x)^2) = 2\log(-x)$ e $\log(x^2) = 2\log(x)$ também vieram à tona. A relação cogitada por J. Bernoulli também era defendida por *d'Alembert*. Obviamente tudo isso carecia de uma análise mais cuidadosa, a qual foi historicamente atribuída a *Euler* por seu tratamento dos logaritmos dos números complexos, via fórmula de *de Moivre*, por ele (re)obtida através do uso da série de potências da função exponencial.

Além de fazermos uso da série de potências da função *exponencial* utilizamos a do *logaritmo*, dirigindo-nos pela observação de *J. Bernoulli* (citada acima) com as devidas lacunas preenchidas, sem a consideração dos números complexos, os quais surgem somente no final, como única possibilidade para um corpo comutativo normado além dos próprios números reais (ver 2.2, C4). Exploramos justamente as propriedades estruturais fundamentais das duas funções mencionadas, quais sejam:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v)$$

sempre que x e y (respectivamente, u e v) comutam, juntamente com uma idéia geométrica chave. A útlima relação acima, a respeito do logaritmo, é de natureza local, uma vez que partimos desta função definida por uma série de potências, que converge somente numa bola em torno da unidade. Decorrem dessa idéia duas versões. Uma que garante a existência de logaritmo unívoco globalmente (executado zero) com todas as propriedades esperadas, mais aquela considerada por *J. Bernoulli e d'Alembert*, num corpo comutativo normado, sobre os reais com mais de duas dimensões, o que impossibilita sua existência.

Outra versão bem mais elementar trata de um cálculo, com os elementos da superfície de uma pirâmide através da função logaritmo, que resulta ser contraditório sob a hipótese de um corpo normado sobre os reais com mais que duas dimensões — daí a inexistência da citada pirâmide. Na verdade obtemos um resultado análogo sob uma hipótese mais fraca (ver **2., Lema Fundamental**).

Além do atrativo da transparência dos fatos básicos envolvidos no nosso argumento, e deste ter um caráter visivelmente geométrico, pode-se salientar os pontos de contato com idéias e técnicas de matemáticos eminentes que estiveram envolvidos no tema, de um lado as de *J. Bernoulli* consideradas como equivocadas — as quais resgatamos de forma a torná-las coerentes — de outro as de *Euler*; porém diversamente deste não nos restringimos aos números complexos, valendo-nos da universalidade das séries de potências utilizadas. É importante anotar que *Euler e d'Alembert* foram os pioneiros em inúmeros investidas em direção a uma busca de uma prova do TFA durante os anos 40 do século XVIII, ambos tendo atingido por volta de 1750 o que pode ser considerado como coroamento desses esforços, apeasar da opinião contrária de Gauss a respeito do assunto, a qual predominou até hoje na maioria dos textos de História da Matemática. Como última observação registramos que a famosa *equação de Euler*

$$e^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

surge no percurso de nossa prova sem a suposição dos números complexos. Uma discussão sobre o papel da equação de *Euler* como meio de explicitação dos números complexos pode ser encontrada na seção 4.

A respeito de detalhes sobre os aspectos históricos mencionados acima pode-se consultar com proveito [4] e [9] da Bibliografia; como complemento ver [5] e [12].

2 - O Lema Fundamental e conseqüências

Trataremos de analisar certas possibilidades de coexistência de invertibilidade e comutatividade em $\mathbb{R}$ -álgebras normadas, tendo como conseqüências do resultado obtido dessa análise os famosos Lema de Gel'fand-Mazur (generalizado(s)), Teorema de Gel'fand-Mazur (generalizado) e last but not least, o Teorema Fundamental da Álgebra (generalizado(s)).

Da idéia básica deste artigo pode-se dizer sucintamente que encontra-se no confronto entre dois aspectos da estrutura em foco: do lado topológico — $\pi_1(X) = 0$, onde X é um espaço vetorial real tridimensional privado de um ponto, com sua topologia canônica ($\pi_1(X)$ denotando o grupo fundamental de X), do lado algébrico —a invertibilidade de todo elemento de X aliada à comutatividade de X, no contexto mais amplo de uma álgebra normada real (especificaremos a seguir onde exigiremos estar o inverso de cada elemento).

Lema Fundamental. *Sejam A uma $\mathbb{R}$ álgebra normada e $E \subset A$ um sub-espaço real comutativo (em relação à multiplicação de A) tal que todo elemento de $E - \{0\}$ é invertível em $A^\#$ ($A^\#$ é o completamento de A como álgebra normada). Nessas condições E tem dimensão sobre $\mathbb{R}$ no máximo igual a 2.*

1 - Uma demonstração educada (de LF)

Suponha que em E haja pelo menos três vetores independentes (sobre $\mathbb{R}$) e denotemos por F o subespaço de E gerado por um conjunto $\{u, v, w\}$ de tais vetores de E. Seja $X = F - \{0\}$ e considere a forma diferencial ω definida em X a valores vetoriais em $A^\#$ dada por:

$$\omega = \frac{dx}{x} \tag{1}$$

onde x denota a aplicação inclusão $X \to A^\#$. Como X é comutativo (e só nesse caso) tem-se

$$d\omega = 0. \tag{2}$$

Sendo X simplesmente conexo, existe uma função diferenciável l (C^∞, na verdade analítica) definida em X, com valores em $A^\#$ tal que

$$dl = \omega. \tag{3}$$

Ainda pelo fato de X ser comutativo,

$$d\,(\,e^{-l\,(x)}\,x\,) = 0, \tag{4}$$

sendo $z \rightarrow e^z$ a função exponencial $A^\# \rightarrow A^\#$ definida pela série de potências clássica.

Como X é conexo, $e^{-l(x)}\,x$ é constante, do que concluímos:

$$e^{-l(x)}\,.x = e^{-l(-x)}\,.(\,-x\,) \tag{5}$$

Por outro lado,

$$d(\,l\,(\,-x\,)) = \frac{-dx}{-x} = d\,(\,l(\,x\,)) \tag{6}$$

portanto $l\,(\,x\,) - l\,(\,-x\,)$ é constante.

Como

$$l\,(x) - l\,(-x) = l\,(-x) - l\,(-(-x)) = -(\,l\,(x) - l\,(-x)), \tag{7}$$

chegamos então a

$$l\,(x) = l\,(-x). \tag{8}$$

Usando (5) e (8), obtemos

$$x = -\,x \tag{9}$$

o que é uma evidente contradição.

2 - Conseqüências imediatas do Lema Fundamental

C1 - (Lema de Gel'fand-Mazur generalizado 1) Sejam A uma álgebra normada real e C uma subálgebra de A que é um corpo (álgebra comutativa com divisão) tal que $dim_R\, C > 1$. Então para todo $a \in A$ no centralizador de C em A existe $\lambda \in C$ tal que $a - \lambda$ não é invertível em $A^\#$.

Consideramos **LF** aplicado ao caso em que E é o subespaço de A gerado por C e a. Supondo $a - \lambda$ invertível em $A^\#$ para todo $\lambda \in C$ teremos que todo $x \in X = E - \{0\}$ será invertível em $A^\#$ pois, se $x = ta + \mu$, com $t \in I\!R$ e $\mu \in C$, caso $t \neq 0$, $x = t\left(x - \dfrac{\mu}{t}\right)$ é invertível em $A^\#$, já que t e $a - \dfrac{\mu}{t}$ o são, e se $t = 0$ então $x = \mu \neq 0$ é invertível em C. Tendo em vista **LF**, concluímos que $dim_R\, E \leq 2$ e como $dim_R\, C > 1$ chegamos a $E = C$ donde $a \in C$. Mas isto está em contradição com a hipótese feita, uma vez que nesse caso, para $\lambda = a \in C$, $a - \lambda = 0$ não é invertível em $A^{\#}$.

C2 - (Lema de Gel'fand-Mazur generalizado 2) Sejam A uma álgebra normada real e C uma subálgebra de A que é uma álgebra com divisão contida no centro de A (isto é, A pode ser considerada como C-álgebra) tal que $dim_R\, C > 1$. Então para todo $a \in A$ existe $\lambda \in C$ tal que $a - \lambda$ não é invertível em $A^{\#}$.
De fato, nas condições acima C é um corpo e todo elemento de A está no centralizador de C em A, bastando então aplicar **C1**.

C3 - (Teorema de Gel'fand-Mazur generalizado) Sejam A uma álgebra normada real com divisão e C uma subálgebra de A contida no centro de A, tal que $dim_R\, C > 1$. Então $C = A$.
Basta observar que, por **C2**, para todo $a \in A$ existe $\lambda \in C$ tal que $a - \lambda$ não é invertível em $A^{\#}$, a fortiori também não o é em A, logo $a - \lambda = 0$, ou seja $a = \lambda \in C$.

C4 - (Teorema Fundamental da Álgebra generalizado 1) Se C é um corpo normado real e $dim_R\, C > 1$ então C é algebricamente fechado.
De fato, se p é um polinômio irredutível em $C\,[T]$ a $I\!R$-álgebra (C-álgebra) $C\,[T]/ < p >$ é normável e com divisão (na verdade também é um corpo). Por **C3** temos que $C\,[T]/ < p > = C$ o que significa que $gr(p) = 1$.
Note que $\| \xi \| = \max\{ \| c_i \| : 0 \leq i < gr\,(p) \}$ é uma norma em $C\,[T]/ < p >$, onde $c_0 + c_1 T + \ldots + c_{n-1} T^{n-1}$ é o representante canônico de ξ e $gr(p) = n$.

C5 - (Teorema Fundamental da Álgebra generalizado 2). Se C é um corpo normado real então C é isomorfo a $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.
Considerando **LF** aplicado no caso em que $A = E = C$ obtemos $dim_{I\!R} C \leq 2$. Disto é imediato chegar à conclusão, usando por exemplo o método do completamento dos quadrados.

C6 - (Teorema Fundamental da Álgebra) $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.
Como $dim_{I\!R} \mathbb{C} = 2$ a afirmação segue de **C4**.

3 - Uma demonstração elementar (de LF)

Vamos agora exibir uma outra prova de **LF** intimamente relacionada com a exposta acima, porém não à primeira vista.

Supondo por absurdo que $dim_{\mathbb{R}} E > 2$ denotaremos por F o subespaço de E gerado por três vetores independentes u, v, w.

Consideremos a **pirâmide** P (a ser constatada inexistente!) que é a envoltória convexa dos vetores $\pm u$, $\pm v$ e w. Para facilitar a compreensão do argumento, concentrando-se no que ele tem de essencial, vamos expor os cálculos com a função log, (definida pela série de potências mencionada mais a frente no texto) realizados somente com os vértices da pirâmide, no caso em que isto é possível; quando não introduzimos uma malha de pontos suficientemente próximos, entre si sobre a superfície da pirâmide, de modo a permitir o cálculo pretendido, mantendo o principal: o cancelamento mútuo das parcelas desse cálculo que correspondem a lados adjacentes dos quadriláteros da malha. Vamos ao caso em que os vértices $A = -u$, $B = v$, $C = u$, $D = -v$, $E = w$ são tais que possamos efetuar os seguintes cálculos e inferências:

$$B/A \cdot E/B \cdot A/E = 1 \Rightarrow \log(B/A) + \log(E/B) + \log(A/E) = 0$$

$$C/B \cdot E/C \cdot B/E = 1 \Rightarrow \log(C/B) + \log(E/C) + \log(B/E) = 0$$

$$D/C \cdot E/D \cdot C/E = 1 \Rightarrow \log(D/C) + \log(E/D) + \log(C/E) = 0$$

$$A/D \cdot E/A \cdot D/E = 1 \Rightarrow \log(A/D) + \log(E/A) + \log(D/E) = 0$$

Observamos que em cada uma dessas quatro equações, as parcelas correspondentes às arestas que ligam o vértice E aos vértices do losango da base da pirâmide têm exatamente uma outra parcela numa outra equação que somada a ela resulta em zero. Isso acontece pois cada uma destas parcelas corresponde ao cálculo efetuado numa das faces triangulares da pirâmide, sendo $\log(X/Y)$, onde E é X *ou* Y, e a outra parcela que anula esta é $\log(Y/X)$ associada à mesma aresta da face triangular adjacente. Portanto, somando as quatro equações temos:

$$\log(B/A) + \log(C/B) + \log(D/C) + \log(A/D) = 0.$$

Mas $D = -B$, $C = -A$, donde

$$\log(D/C) = \log(B/A) \text{ e } \log(A/D) = \log(C/B),$$

ou seja,

$$\log(B/A) + \log(C/B) = 0.$$

Logo,

$$1 = \exp(\log(B/A) + \log(C/B)) = \exp(\log(B/A)) \cdot \exp(\log(C/B)) =$$

$$= B/A \cdot C/B = C/A = -1,$$

o que evidentemente não pode ocorrer.

A seguir apresentamos os detalhes técnicos para desenvolver a idéia descrita através do caso especial acima.

Seja $H : Q \to P$ a aplicação linear por partes, onde $Q = [\,-1,1\,] \times [\,-1,1\,]$, definida de tal forma que em cada subconjunto $I \times \{s\}$ (com $I = [\,-1,1\,]$, e $s \in I$) a restrição de H é a junção das parametrizações canônicas dos segmentos $[\,-u\,,\, w_s\,]$ e $[\,w_s\,,\,u]$ respectivamente, definidas nos intervalos $[\,-1,0\,]$ e $[\,0,1\,]$. Aqui w_s é o ponto da poligonial $[\,-v,w\,] \cup [\,w,v\,]$ que corresponde a $s \in [\,-1,1\,]$ mediante a junção das parametrizações canônicas de $[\,-v,w\,]$ e $[\,w,v\,]$ definidas respectivamente em $[\,-1,0\,]$ e $[\,0,1\,]$.

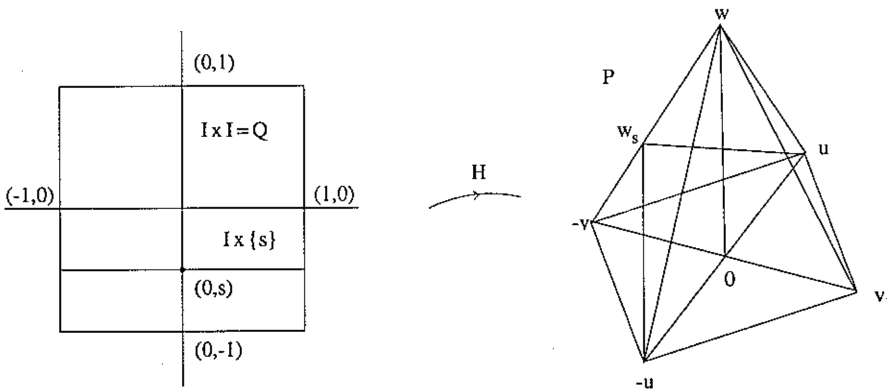

Figura 1

Observemos que todo elemnto de P é invertível em $A^{\#}$ e que P é um subconjunto comutativo de A.

Como H é contínua e a aplicação $U(A^{\#}) \to U(A^{\#})$, dada por $x \to x^{-1}$, é contínua, $H^{-1} : A \to A^{\#}$ também é contínua, e portanto $\| H^{-1} \|$ atinge um máximo μ, em virtude da compacidade de Q. Aqui, $U(A^{\#})$ denota o conjunto dos elementos invertíveis de $A^{\#}$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que todo produto de quatro elementos de $B(1,\varepsilon)$ está em $B(1,1/M)$. (M é número real positivo tal que $\| xy \| \leq M \| x \| \, \| y \|$, sendo $\| \,.\, \|$ a norma de A.) É fácil verificar que

$$\log(abcd) = \log(a) + \log(b) + \log(c) + \log(d), \tag{1}$$

sendo a,b,c,d elementos de $B(1,\varepsilon)$ que comutam, onde log é a função definida em $B(1,1/M)$ pela série de potências, com valores em $A^{\#}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(X-1)^n. \tag{2}$$

Esta série converge uniformemente em cada bola $B\,(1,\rho)$ com $0<\rho<1/M$.

Observe que log deve ser considerada com valores em $A^{\#}$, por sua origem como soma de uma série de potências com coeficientes reais. Ainda considerando que H é contínua e Q é compacto, podemos também encontrar $\delta>0$ tal que para todo par $(p,q)\in Q\times Q$, com $d\,(p,q)=\max\{|r-r'|,|s-s'|\}<\delta$ (se $p=(r,s)$, $q=(r',s')$) verifica-se

$$\| H\,(q)-H\,(p)\| < \varepsilon/\mu M. \tag{3}$$

Daí, para todo par (p,q) nas mesmas condições acima teremos

$$\| H\,(q)\,H\,(p)^{-1}-1\| = \| (H\,(q)-H\,(p))\,H\,(p)^{-1}\| \leq$$

$$\leq M \| H\,(q)-H\,(p)\| \; \| H\,(p)^{-1}\| < M\,.\,\frac{\varepsilon}{M\mu}\,.\,\mu=\varepsilon. \tag{4}$$

Seja N um número natural ≥ 1 tal que $1/N<\delta$. Para cada quadrado R (produto cartesiano de subintervalos da partição de $[-1,1]$ dada pelos intervalos $[k/N\,,(k+1)/N]$ com $-N\leq k<N$) teremos:

$$\sigma_R=\log\,(Y_R/X_R)+\log\,(Z_R/Y_R)+\log\,(W_R/Z_R)+\log\,(X_R/W_R)=0 \tag{5}$$

já que $(Y_R/X_R)(Z_R/Y_R)(W_R/Z_R)(X_R/W_R)=1$ e $\log(1)=0$, levando em conta (1). Aqui X_R, Y_R, Z_R, W_R é a seqüência dos pontos imagens por H dos vértices de R, partindo do canto inferior esquerdo e percorrendo a fronteira de R no sentido anti-horário. Os quocientes sucessivos da seqüência X_R, Y_R, Z_R, W_R estão nas condições de aplicabilidade de (1) já que R tem diâmetro $\frac{1}{N}<\delta$.

Prosseguindo,

$$\sum \sigma_R=0. \tag{6}$$

onde o somatório abrange todos os R possíveis como descritos acima.

Cada parcela de um σ_R que corresponde a um lado de R comum a outro R', anula-se com a parcela corespondente de $\sigma_{R'}$, pois

$$\log\,(X/Y)+\log\,(Y/X)=0 \tag{7}$$

(toda vez que $\| X/Y-1\|<\varepsilon$ e $\| Y/X-1\|<\varepsilon$, já que $X/Y\,.\,Y/X=1$).
Disto segue que

$$\sum \sigma_R = \sum \log (X_{t'}/X_t) + \sum \log (Y_t/Y_{t'}), \tag{8}$$

onde os dois somatórios da direita, indexados por t, abrangem os elementos do conjunto $\{ k/N \mid -N \leq k < N \}$, $X_t = H(t,1)$, $Y_t = H(t,-1)$ e t' é o sucessor de t no conjunto acima.
Como $\log (Y_t/Y_{t'}) = -\log (Y_{t'}/Y_t)$ temos

$$\sum \log (X_{t'}/X_t) = \sum \log (Y_{t'}/Y_t) \tag{9}$$

levando em conta (6) e (8).

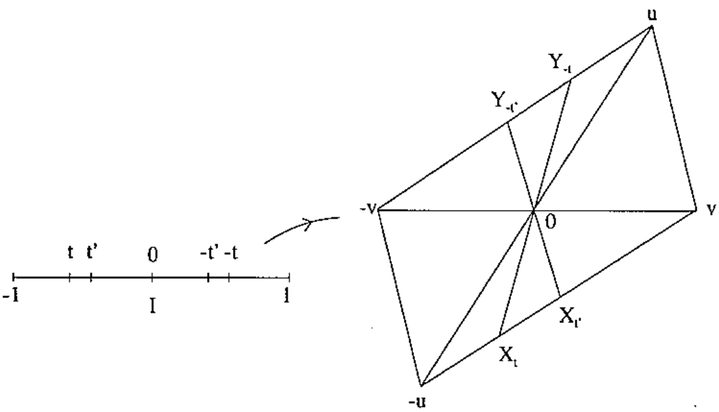

Figura 2

Por outro lado, para cada t com acima, $X_t + Y_{-t} = 0$ (ver fig. 2).
Daí

$$\sum \log (Y_{t'}/Y_t) = \sum \log (-X_{-t'}/-X_{-t}) = \sum \log (X_{-t'}/X_{-t}) =$$

$$= \sum -\log (X_{-t}/X_{-t'}) = -\sum \log (X_{(-t')'}/X_{-t'}) =$$

$$= -\sum \log (X_{t'}/X_t) \tag{10}$$

uma vez que $-t = (-t')'$ e o conjunto $\{ -t' \mid t = k/N, -N \leq k < N \}$ é o mesmo que $\{ k/N \mid -N \leq k < N \}$.
Concluímos que

$$\sum \log (X_{t'}/X_t) = \sum \log (Y_{t'}/Y_t) = 0. \tag{11}$$

Porém, como $\exp(\log(a)) = a$ para todo $a \in B\,(1, 1/M)$, temos

$$\exp\left(\sum \log (X_{t'}/X_t)\right) = \Pi \exp\left(\log (X_{t'}/X_t)\right) = \Pi\, X_{t'}/X_t =$$

$$= u/-u = -1. \tag{12}$$

Temos em (11) e (12) uma evidente contradição.

3 - A álgebra com divisão dos quatérnios

A classificação dos corpos reais normados que encontramos em **2.2, C5** pode ser ampliada de modo a incluir as álgebras reais normadas com divisão. Denotaremos por $\mathbb{H}$ a álgebra dos quatérnios.

Teorema. *Se A é uma álgebra real normada com divisão então A é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

Demonstração: Podemos considerar que $\mathbb{R}$ está contido propriamente em A. Sejam $a_0 \in A$, $a_0 \notin \mathbb{R}$ e A_0 a subálgebra com divisão de A gerada por a_0. Como A_0 é um corpo normado real (com a norma induzida pela de A) por **2.2, C5** temos que A_0 é isomorfa $\mathbb{C}$, já que $a_0 \notin \mathbb{R}$. Sejam τ um elemento de A_0 tal que $\tau^2 + 1 = 0$ e A_1 o centralizador de τ em A. É claro que A_1 é uma subálgebra de A com divisão e se A_0 está contida propriamente em A_1, a subálgebra de A_1, gerada por A_0 e um elemento de A_1 que não está em A_0, é um corpo e tem dimensão maior do que 2, o que contraria **C5**. Logo $A_1 = A_0$, ou seja, todo elemento de A que comuta com τ é um elemento de A_0. A admite uma decomposição

$$A = A_0' \oplus A_0'', \tag{1}$$

onde A_0' é a subálgebra de A formado pelos elementos que comutam com τ. De fato, dado $a \in A$ temos que $a = a_0' + a_0''$ onde

$$a_0' = \frac{a - \tau a \tau}{2} \text{ e } a_0'' = \frac{a + \tau a \tau}{2} \tag{2}$$

e com um cálculo imediato concluímos que a_0' comuta com τ e a_0'' anticomuta, isto é, $\tau a_0'' = -a_0''\tau$.

Se $A = A_0' = A_0$ então A é isomorfa a $\mathbb{C}$. Com efeito, caso contrário seja ω a componente que anticomuta com τ, de um elemento de A que não está em A_0. Claro que $\omega \neq 0$. Como a subálgebra com divisão de A gerada por ω é comutativa (sendo portanto um corpo) e $\omega \notin \mathbb{R}$, por **2.2, C5** temos que sua dimensão sobre

$I\!R$ é igual a 2. Então 1, ω e ω^2 são linearmente dependentes, ou seja, existem p, q reais tais que

$$\omega^2 = p\omega + q \tag{3}$$

Por outro lado ω^2 comuta com τ e $\omega^2 - q$ também, mas $p\omega$ anticomuta, logo $\omega^2 - q = p\omega = 0$ e portanto $p = 0$. Se $q \geq 0$ temos

$$(\omega - \sqrt{q})\,(\omega + \sqrt{q}) = 0$$

donde, A sendo uma álgebra com divisão, temos $\omega = \pm\sqrt{q}$ e ω comuta com τ, o que implica $\omega = 0$. Portanto $q < 0$ e chegamos a

$$\left(\frac{\omega}{\sqrt{-q}}\right)^2 = -1. \tag{5}$$

Seja $\sigma = w/\sqrt{-q}$; σ anticomuta com τ. Temos como conclusão que todo elemento a de A decompõe-se na forma $a = a_0' + a_0''$ onde $a_0' = x + y\tau$, com x e y reais e a_0'' anticomuta com τ, donde $-a_0''\sigma$ comuta com τ, portanto $-a_0''\sigma = z + w\tau$, com z e w reais, ou seja, $a_0'' = z\sigma + w\kappa$, onde $\kappa = \tau\sigma$.

Concluindo: Todo elemento a de A representa na forma

$$a = x + u\tau + z\sigma + w\kappa \tag{6}$$

e um cálculo simples fornece

$$\tau^2 = \sigma^2 = \kappa^2 = \tau\sigma\kappa = -1, \tag{7}$$

o que implica que $\{1,\tau,\sigma,\kappa\}$ é linearmente independente e gera A com espaço vetorial real. Além disso $a \to x + yi + zj + wk$ é um isomorfismo de álgebras $A \to I\!H$.

4. A equação de Euler

Veremos aqui porque podemos afirmar que a *equação de Euler* pode ser tomada como um caminho para o encontro com os números complexos, no contexto geral de uma álgebra normada real com divisão A, contendo propriamente os números reais, onde *a priori* não temos informação alguma a respeito deles.

De fato, analisando as duas demonstrações apresentadas em **2.1** e **2.3** observamos que na primeira (a educada) está sugerida, ainda que indiretamente a integral

$$\int_\gamma \frac{dx}{x} \tag{1}$$

a qual é uma solução para a *equação de Euler*

$$e^{\zeta} + 1 = 0 \tag{2}$$

onde γ é uma curva C^1 por partes ligando $-x$ a x (para um $x \neq 0$), não passando por zero e tal que todos os pontos de seu traço comutem entre si. Na segunda demonstração (a elementar), o somatório seguinte

$$\sum_{n=0}^{N-1} \log\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \tag{3}$$

também é uma solução de (1), onde $< x_0, \ldots x_N >$ é uma sequência de elementos não nulos que comutam, suficientemente próximos entre si de tal forma que seus quocientes sucessivos estejam no domínio da função *log* definida pela série de potências (2) de **2.3.**

Observamos que dado ζ, solução de (1), temos que $e^{\zeta/2} = \iota$ satisfaz

$$\iota^2 + 1 = 0 \tag{4}$$

Considerando a função $I\!R \to I\!R(\iota)$, $\theta \mapsto e^{\theta\iota}$, separando a série de potências que define a função exponencial, como é clássico desde Euler, conseguimos duas séries de potências que definem funções c e s, $I\!R \to I\!R$ tais que

$$e^{\theta\iota} = c(\theta) + \iota s(\theta) \tag{5}$$

Podemos através de (5) concluir que ζ é múltiplo real de ι como na versão tradicional da *equação de Euler* citada na Introdução. De fato, ι sendo o valor da função exponencial em $\zeta/2$, ι é limite de uma sequência da subálgebra com divisão $I\!R(\zeta)$ de A gerada por ζ a qual sendo comutativa é um corpo, e por **2.2, C5** temos que $I\!R(\zeta) \approx \mathbb{C}$, uma vez que ζ, sendo solução de (2) não é real. Nesse caso $I\!R(\zeta)$ é fechado em A e portanto $\iota \in I\!R(\zeta)$. Disto segue-se que $I\!R(\iota) \subset I\!R(\zeta)$ e, como $dim_{I\!R}\, I\!R(\iota) = 2 = dim_{I\!R}\, I\!R(\zeta)$, temos $I\!R(\zeta) = I\!R(\iota)$ e finalmente $\zeta \in I\!R(\iota)$. Bem, nesse caso

$$\zeta = q + p\iota \tag{6}$$

com q e p reais.
Por outro lado, de (2) temos que

$$-e^{q} = e^{-p\iota} = c(-p) + s(-p)\iota \tag{7}$$

A partir das séries de potências que definem c e s sabemos que $c(-p) = c(p)$ e $s(-p) = -s(p)$, de modo que

$$-e^{q} = c(p) - s(p)\iota \qquad (8)$$

Por outro lado

$$1 = e^{p\iota} \,.\, e^{-p\iota} = (c(p) + \iota s(p))\;\; (c(p) - \iota s(p)) = c^2(p) + s^2(p) \qquad (9)$$

De (8) tiramos $s(p) = 0$ e juntando isto a (7) e (9) concluimos que $c(p) = -1$ e finalmente $q = 0$, ou seja

$$\zeta = p\iota \qquad (10)$$

Além disso, refletindo um pouco mais detalhadamente sobre as funções c e s, a partir de suas séries, também chega-se facilmente à conclusão de que o menor múltiplo positivo de ι que é solução de (2) é

$$\pi\iota \qquad (11)$$

e que p é um múltiplo inteiro impar de π. Aqui π aparece como o primeiro zero postivio de função s.

Chegamos novamente, por um outro caminho, à celebre e tradicional *equação de Euler*

$$e^{\pi\iota} + 1 = 0. \qquad (12)$$

5. Observações finais

É interessante assinalar que nossa abordagem para a problemática envolvendo comutativamente e invertibilidade em álgebras normadas reais vale-se de um instrumento o qual foi justamente uma das vertentes por onde surgiu o questionamento a respeito do Teorema Fundamental da Álgebra: as primitivas de funções racionais (ver [9]). De fato utilizamos uma primitiva da diferencial racional mais notável, desde Euler, qual seja

$$\frac{dx}{x} \qquad (1)$$

para, através dela, obter a limitação na dimensionalidade (sobre $I\!R$) de um subespaço de uma álgebra normada real que é comutativo e no qual todo elemento não nulo é invertível (ver **2., Lema Fundamental**). Só ampliamos o contexto do problema de primitivação, utilizando um cálculo com diferenciais numa álgebra normada, extremamente cômodo em face do progresso já conquistado, o qual cumpre muito bem o papel para o tipo de manipulações formais no estilo dos pioneiros do Cálculo Diferencial e Integral. Pode-se notar, analisando a *demonstração educada* (**2.2**), que uma primitiva l da diferencial acima é um quase-logaritmo, i.e,

$$e^{l(x)} = c.x \tag{2}$$

onde c é uma constante.

Se este subespaço for um corpo C então podemos escolher l de tal modo que $l(1) = 0$ e teremos $c = 1$, ou seja, l será a função logaritmo — inversa à direita da função exponencial — globamente definda em $C - \{0\}$, caso $dim_{I\!R}\mathbb{C} > 2$. Tudo isso seria demais para ser possível como se constata prosseguindo na leitura da *demonstração educada*, resultando finalmente no fato de um corpo normado real contendo propriamente $I\!R$ ter que ser isomorfo a $\mathbb{C}$. Daí, retornando ao problema das primitivas das funções racionais reais, temos que (uma vez que todo polinomo real fatora-se então em polinomios de 1° e de 2° graus com coeficiente reais) essas primitivas exprimem-se em termos de *funções racionais, logaritmo* e da *função arcotangente,* sendo estas duas últimas passíveis de serem unificadas no cálculo com a função logaritmo no campo complexo: a função arcotangente surge como parte imaginária do logaritmo complexo.

Bibliografia

[1] A respeito do tema "demonstração elementar" versus "demonstração educada" ver o artigo do Prof. Elon Lages Lima: - *Classificação das Variedades Uni-dimensionais; uma demonstração educada - Matemática Universitária - junho de 1986 - nº 3.*

[2] Arens, R. - *On a theorem of Gelfand and Neumark* - Proc. Na. Acad. Sci. USA, 32 (1946) 237-239

[3] Bachman, G. and L. Narici - *Functional Analysis.* Academic Press 1966.

[4] Boyer, Carl B. - *História da Matemática* - Editora Edgard Blücher e Editora da USP.

[5] Friedelmeyer, J. P et K. Volkert - *Quelle realité pour les imaginaires?* in Histoire des Problèmes, Histoire des Mathematiques - Irem de Lyon, 1992, pp 239-268.

[6] Gel'fand, I.M. -i) *On normed rings* - Dokl. Akad. Nauk. vol. 23 (1939) 430-432 - ii) *Normierte Ringe* - Matem. Sb.9 (51) (1941) 3-24.

[7] Gel'fand, I.M. und G. Silov - *Uber versheredene Methoden der Eifürung der Topologie in die Menge der Maximalen Ideale eines normierten Ringes* - Matem. Sbornik 9(51) (1941) 25-38.

[8] Gel'fand, I.M., D. Raikov, G. E. Shilov - *Commutative Normed Rings.* Chelsea Publishing Company, NY 1964.

[9] Gilain, Christian - *Sur l'histoire du théoreme fondamental de l'algèbre: théorie des equations et calcul intégral* - Archive for History of Exact Sciences - 1991, vol. 42, pág. 91-136.

[10] Mazur, S. - *Sur les anneaux linéaires,.* Comptes Rendues Aca. Sci. Paris, 207 (1938) 1025-1027.

[11] Naimark, M.A. - *Normed Rings* Noordhoff, Groningen, Netherlands - 1964.

[12] Petrova, S.S. - *Sur l'Histoire des demonstrations analytiques du théoreme fondamental de l'algbre* - Historia Mathematica 1 (1974) 255-261.

[13] Rudin, Walter - *Functional Analysis* - Tata McGraw Hill Publishing Co. LTD - New Delhi.

[14] Stone, M. - *On the theorem of Gelfand-Mazur.* Ann. Soc. Polon. Math. 25(1952) 238-240.

[15] Yosida, K. - *Functional Analysis.* Springer-Verlag. New York Inc., NY 1980 6ª ed.

Instituto de Matemática e Estatística - USP
C.P. 66.281 - Agência Cidade de São Paulo
CEP 05389-970 - E-Mail: Odilon@ime.usp.br