Matemática Universitária Nº 18, junho de 1995, 42-50

Sobre a Convergência de Seqüências de Funções Diferenciáveis

Adalberto Spezamiglio

1. Introdução

O problema em que estamos interessados é o da troca de limite com a derivada na convergência de seqüências de funções diferenciáveis. Mais especificamente, se $f_n : [a,b] \to R$ é uma seqüência de funções diferenciáveis convergindo num certo sentido para uma função f em $[a,b]$, em que condições f é diferenciável em $[a,b]$ e

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' \ ?$$

É bem conhecido (ver [2], Teorema 4, pag. 157, ou [4], Teorema 7.17, pág. 158) o seguinte resultado relacionado com essa questão:

Teorema 1: Seja $f_n : [a,b] \to R$ uma seqüência de funções diferenciáveis satisfazendo as seguintes condições:

(i) Existe $x_0 \in [a,b]$ tal que a seqüência $(f_n(x_0))$ converge;

(ii) (f_n') converge uniformemente em $[a,b]$.

Então (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função f diferenciável e, para todo $x \in [a,b]$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x). \tag{1}$$

Uma observação que fazemos é que no teorema acima a hipótese mais exigente é feita sobre a seqüência (f_n'), aparecendo a convergência de (f_n) e a própria f na tese, contrário ao que normalmente ocorre nas aplicações. Ademais, para se concluir a igualdade (1) precisamos saber de antemão que a seqüência (f_n') é uniformemente convergente em $[a,b]$.

Objetivo deste trabalho é descrever condições sobre as funções f_n e suas derivadas de modo que, a partir da convergência de (f_n) para f, possamos concluir a existência do $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ a existência da derivada $f'(x)$ e a igualdade desses dois valores. Na próxima secção descrevemos alguns fatos básicos sobre limites duplos e iterados. Na secção 3 enunciamos e provamos o resultado principal e na secção 4 ilustramos com alguns exemplos os fatos tratados.

2. Seqüências Duplas

As provas dos fatos enunciados nesta secção podem ser encontradas em [1], pág. 127-130. Veja também [3], pág. 141, exercício 13. Uma *seqüência dupla* de números reais é uma aplicação $X : N \times N \to R$. A imagem $X(m,n)$ do par $(m,n) \in N \times N$ será denotada por x_{mn} e a seqüência X por (x_{mn}). Dizemos que uma seqüência dupla (x_{mn}) tem limite x quando m e n tendem para o infinito e escrevemos

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} x_{mn} = x\,,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ tal que $|x_{mn} - x| < \varepsilon$, sempre que $m,n \geq n_0$.

Uma seqüência dupla pode ser considerada como uma seqüência de seqüências do tipo $X_m = (x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots)$ ou de seqüências do tipo $X^n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \ldots)$. Podemos então pensar no limite de cada uma dessas seqüências X_m ou X^n. Suponha que para cada $m \in N$ exista o limite $y_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$. Obtemos assim uma nova seqüência (y_m) que pode perfeitamente ter limite. Assim $y = \lim_{n\to\infty} y_m$ isto é,

$$y = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn}$$

e este é chamado *limite iterado*. Da mesma forma podemos considerar o limite iterado $x = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{mn})$.

A existência do limite duplo não implica na existência dos iterados, como mostra o exemplo $x_{mn} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$, nem a existência e igualdade dos limites iterados implica na existência do limite duplo, conforme mostra a seqüência

$$x_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ 1 & \text{se} \quad m = n \end{cases}.$$

No entanto, com alguma condição de uniformidade, no último caso pode-se concluir a existência do limite duplo.

Para cada $m \in N$ sejam $X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots)$ e $y_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$. Dizemos que essa convergência é *uniforme* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ tal que

$$|x_{mn} - y_m| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad \forall m \in N.$$

Com essa noção de uniformidade pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 2: Suponha que exitem os limites $y_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ e $z_n = \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ e que uma dessas convergências seja uniforme. Então, existem os limites iterados e o limite duplo e os três valores são iguais.

3. O Resultado Principal

Passaremos agora a discutir o problema proposto inicialmente. Observamos na Secção 1 que para se concluir a igualdade (1) precisamos saber que a seqüência (f_n') é uniformemente convergente em $[a,b]$. Uma condição suficiente para isso sem o conhecimento do limite é dada no conhecido *Critério de Cauchy* para convergência uniforme e é a seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : m,n \geq n_0 \Rightarrow |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b] \qquad (2)$$

Seja $J \subset R$ um intervalo (não necessariamente fechado ou limitado). A hipótese básica que colocamos também é sobre a seqüência (f_n') e é que ela seja *eqüicontínua* em J. Isso quer dizer que a seguinte condição se verifica para quaisquer $x,y \in J$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n'(x) - f_n'(y)| < \varepsilon, \ \forall n \in N \qquad (3)$$

Existe uma correlação entre a condição (2) utilizada no Teorema 1 e a condição (3) que usaremos abaixo, mas elas não são equivalentes mesmo quando $J = [a,b]$: se (f_n) é tal que f_n' é *contínua* e (f_n') é uniformemente convergente em $[a,b]$ então (f_n') é eqüicontínua em $[a,b]$ (ver [3], pág. 244, proposição 16, ou [4], pág. 163, Teorema 7.23(a)) e é fácil ver que ela é uniformemente limitada em $[a,b]$ (isto é, existe $M > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq M$, $\forall n \in N$, $\forall x \in [a,b]$). Assim, na classe das funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$, a fim de que uma seqüência seja uniformemente convergente é necessário que ela seja eqüicontínua e uniformemente limitada. Mas essas condições não são suficientes para garantir a convergência uniforme da seqüência. Nesse sentido citamos o conhecido Teorema de Arzelá-Ascoli que diz o seguinte: se (f_n) é uma seqüência limitada em $[a,b]$ (isto é, para cada $x \in [a,b]$, existe $M = M(x) > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in N$) e eqüicontínua em $[a,b]$ então (f_n) admite uma subseqüência uniformemente convergente e é uniformemente limitada em $[a,b]$ (Ver [3], pág. 244, proposição 16, ou [4] pág. 163, Teorema 7.23(b)). Mas uma seqüencia pode ser eqüicontínua em J sendo apenas pontualmente convergente ou mesmo não sendo convergente em J, como veremos nos exemplos. Isso deixa claro a generalização do Teorema 1 que apresentamos abaixo:

Teorema 3: Seja (f_n) uma seqüência de funções diferenciáveis tal que (f_n') é eqüicontínua em J. Se $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in J$ então f é diferenciável em J e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \ \forall x \in J.$$

Prova: Fixemos $x \in J$ e tomemos uma seqüência (h_m) de números reais, $h_m \to 0$ com $m \to \infty$ de tal modo que $x + h_m \in J$, para todo $m \in N$. Para cada $n \in N$ seja

$$F_{mn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_n(x+h_m) - f_n(x)}{h_m}.$$

Como $f_n \to f$ em J segue que

$$\lim_{n\to\infty} F_{mn}(x) = \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m},$$

e da diferenciabilidade de f_n,

$$\lim_{m\to\infty} F_{mn}(x) = f_n'(x). \tag{4}$$

Mostremos que a convergência (4) é uniforme. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a f_n no intervalo de extremos x e $x + h_m$, existe θ_{mn} entre esses dois valores tal que

$$f_n(x+h_m) - f_n(x) = f_n'(\theta_{mn})h_m.$$

Daí,

$$| F_{mn}(x) - f_n'(x) | = | f_n'(\theta_{mn}) - f_n'(x) |.$$

Sendo (f_n') eqüicontínua em J, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$| x - y | < \delta \Rightarrow | f_n'(x) - f_n'(y) | < \varepsilon, \qquad \forall n \in N$$

Tomando $n_0 \in N$ tal que $m \geq n_0$ implique $| h_m | < \delta$ segue que

$$| f_n'(\theta_{mn}) - f_n'(x) | < \varepsilon, \qquad \forall m \geq n_0, \forall n \in N$$

provando a convergência uniforme de (4).

Aplicamos agora o Teorema 2 para concluir a existência dos limites iterados

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} F_{mn})) = f'(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to n} F_{mn}(x)) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

e a igualdade desses dois valores:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) .$$

O Teorema está demonstrado.

Segue uma conseqüência imediata do Teorema 3.

Corolário: Seja (g_n) uma seqüência eqüicontínua em J. Se para algum a fixado em J e todo $x \in J$ tivermos $\int_a^x g_n(s)\, ds \to 0$, então $g_n(x) \to 0$, $\forall x \in J$.

4. Exemplos

Vejamos alguns exemplos ilustrando o uso do teorema anterior. Uma vantagem da Condição de Eqüicontinuidade sobre a Condição de Cauchy é que, para a primeira, em alguns casos, podemos usar um critério muito simples baseado na limitação das derivadas: se (g_n) é uma seqüência de funções diferenciáveis tal que (g_n') é uniformemente limitada em J então (g_n) é eqüicontínua em J. Para séries de funções diferenciáveis

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (x \in J) \quad (n \in N) \tag{5}$$

temos o seguinte critério tipo Weierstrass:

Lema: Suponha que exista uma seqüência (M_k) de números reais satisfazendo, para todo $k \in N$,

$$| f_k'(x) | \le M_k , \qquad \forall x \in J.$$

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ é convergente então a seqüência (S_n) dada em (5) é eqüicontínua em J.

Prova: Para $x,y \in J$,

$$| S_n(x) - S_n(y) | \le \sum_{k=1}^{n} | f_k(x) - f_k(y) | .$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe θ_k no intervalo de extremos x e y tal que

$$|f_k(x) - f_k(y)| = |f_k'(\theta_k)|\,|x - y|\,.$$

Logo,

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq |x - y| \sum_{k=1}^{\infty} M_k\,,$$

donde segue a eqüicontinuidade de (S_n) em J.

Exemplo 1: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x/k)\,, \qquad x \in [0,\pi]$.

Aqui, $f_k(x) = \cos\left(\dfrac{x}{k}\right)$, $f_k'(x) = \dfrac{-1}{k}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{k}\right)$; como

$$|f_k'(x)| \leq \frac{1}{k}\frac{|x|}{k} \leq \frac{\pi}{k^2}$$

e a série $\sum_{k=1}^{\infty} \pi/k^2$ é convergente, segue do lema que a seqüência (S_n) é eqüicontínua em $[0,\pi]$. No entanto, (S_n) não é convergente nesse intervalo, como se pode notar tomando o ponto $x = 0$.

Exemplo 2: $f_n(x) = x + x^2/n\,, \quad x \in R$.

Neste caso, $f_n(x) \to f(x) = x$, para todo x real e essa convergência não é uniforme em R. Logo, também não é uniforme em R a convergência da seqüência das derivadas $f_n'(x) = 1 + 2x/n$. No entanto, esta é eqüicontínua em R uma vez que $|f''(x)| = \dfrac{2}{n} \leq 2$, $\forall n \in N$, $\forall x \in R$. Assim concluímos que $f_n'(x) \to f'(x) = 1$, $\forall x \in R$, o que, neste caso, pode ser facilmente verificado por cálculo direto.

Observamos que no exemplo 2 o Teorema 3 é aplicado em toda a reta $(J = R)$ ao passo que, para aplicar o Teorema 1, o procedimento deve ser este: fixa-se $x \in R$, toma-se um intervalo $[a,b]$ contendo x e mostra-se que a convergência de (f_n') é uniforme nesse intervalo. Mas, em casos mais complicados como o do próximo exemplo, isso pode não ser muito simples ou mesmo ser impossível.

Exemplo 3: $S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \operatorname{sen}(x/k)/\log k\,, \; x \in [0,\pi]$.

Para cada x fixado em $]0,\pi[$ a expressão $\operatorname{sen}(x/k)/\log k$ define uma seqüência de termos positivos e decrescente para zero. Logo pelo Critério de Leibniz a seqüência (S_n) é convergente (pontualmente) em $]0,\pi[$, portanto em $[0,\pi]$, o mesmo acontecendo com a seqüência das derivadas

$$S_n'(x) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{\cos(x/k)}{k\log k}.$$

Para mostrar que (S_n') é eqüicontínua em $[0,\pi]$, seja

$$f_k(x) = (-1)^k \cos\left(\frac{x}{k}\right)/k\log k.$$

Então $f_k'(x) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{k}\right)/k^2\log k$ e

$$|f_k'(x)| \leq \frac{1}{k^2\log k} \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Como a série $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k^2\log k$ é convergente, segue do lema que (S_n') é eqüicontínua em $[0,\pi]$. Assim, segue do Teorema 3 que, se

$$S(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{k})}{\log k}, \quad x \in [0,\pi]$$

então S é diferenciável em $[0,\pi]$ e

$$S'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\frac{x}{k})}{k\log k}.$$

Exemplo 4: $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in [0,1].$

Fixemos $x \in]0,1]$. Escrevendo $f_n(x)$ na forma

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{x^n}{n^n}, \text{ isto é}$$

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{x^n}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}),$$

observamos facilmente que $(f_n(x))$ é crescente. Da última expressão,

$$f_n(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!}, \text{ donde}$$

$$f_n(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n-1}} \text{ e então}$$

$$f_n(x) \leq 1 + x\left[1 + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{2^{2n-1}}\right], \text{ ou equivalentemente,}$$

$$f_n(x) \leq 1 + \frac{2x}{2-x},$$

sendo portanto $(f_n(x))$ limitada. Assim é convergente em $[0,1]$ a sequência (f_n). Seja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in [0,1]. \tag{6}$$

Mostremos que (f_n') é eqüicontínua em $[0,1]$. Temos:

$$f_n'(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \frac{f_n(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)},$$

$$f_n''(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)f_n'(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

Logo, para $x \in [0,1]$,

$$|f_n''(x)| \leq f_n'(x) | \leq |f_n(x)|.$$

Sendo (f_n) uniformemente limitada em $[0,1]$ segue que (f_n'') também o é, e portanto (f_n') é eqüicontínua em $[0,1]$. Do Teorema 3 segue que a f definida em (6) é derivável e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{1 + \frac{x}{n}} = f(x), \qquad x \in [0,1]$$

Como $f_n(0) = 1$ para todo $n \in N$, então $f(0) = 1$. Assim, a f dada em (6) é a solução do problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = y; \qquad y(0) = 1,$$

e esta é a função exponencial $f(x) = e^x$.

Referências

[1] Bartle, R.G. - *Elementos de Análise Real,* Ed. Campus, 1983
[2] Lima, E.L. - *Analise Real - vol 1*, (2ª Edição), Coleção Matemática Universitaria, IMPA, 1993.
[3] Lima, E.L. - *Espaços Métricos* (3ª Edição) Projeto Euclides. IMPA, 1993.
[4] Rudin, W. - *Princípios de Análise Matemática,* L.T. e Ed. UnB, 1971.

Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP