Matemática Universitária Nº 18, junho de 1995, 51-52

Uma nota sobre eqüicontinuidade

Elon Lages Lima

No número 3 da "Matemática Universitária" (junho de 1986), publiquei um pequeno artigo onde chamei atenção para as demonstrações matemáticas a que dei o nome de *educadas*. Naquela ordem de idéias, talvez seja pertinente apresentar uma alternativa para a prova do teorema principal do trabalho precedente [3]. A versão que apresento aqui se resume a mostrar que a situação permite o uso do Teorema de Ascoli-Arzelá [1], [2], instrumento natural de se empregar quando se trata de eqüicontinuidade.

Por clareza, repetimos o enunciado do teorema, seguido da demonstração que propomos.

Teorema. Seja (f_n) uma seqüência de funções deriváveis no intervalo $[a,b]$. Suponha que 1) a seqüência das derivadas f_n' é eqüicontínua e 2) para todo $x \in [a,b]$ tem-se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Então a função $f: [a,b] \to I\!R$ é derivável e $f_n' \to f'$ uniformemente em $[a,b]$.

Demonstração. Para todo $x \in [a,b]$, a seqüência $(f_n'(x))$ é limitada. Pois do contrário existiria $c \in [a,b]$ tal que $(f_n'(c))$ seria, digamos, ilimitada superiormente. Passando a uma subseqüência, se necessário, teríamos $f_n'(c) > n+1$ para todo $n \in I\!N$. Pela eqüicontinuidade, existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a,b], |x-c| < \delta \Rightarrow f_n'(x) > f_n'(c) - 1 > n$ para todo n. Fixemos $d \neq c$ em $[a,b]$, com $|d-c| < \delta$. Então, para todo $n \in I\!N$ seria

$$f_n(d) = f_n(c) + \int_c^d f_n'(t)\,dt > f_n(c) + n\,.\,|d-c|\,.$$

Logo a seqüência $(f_n(d))$ seria ilimitada, contradizendo a hipótese 2) do teorema. Por Ascoli-Arzelá, toda subseqüência de (f_n') possui uma subseqüência convergente. Portanto, para concluir que $f_n' \to f'$ uniformemente, basta provar que toda subseqüência (f_{n_k}') que seja uniformemente convergente tem limite f'. Para isto, suponha $f_{n_k}' \to g$ uniformemente e faça $k \to \infty$ na igualdade

$$f_{n_k}(x) = f_{n_k}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_{n_k}'(t)\, dt,$$

para obter $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$. Logo f é derivável em todo ponto $x_0 \in [a,b]$ e $f'(x_0) = g(x_0)$. Portanto $g = f'$ e $f_n' \to f'$ uniformemente em $[a,b]$.

Referências

[1] E.L. Lima. *Curso de Análise,* vol. 1 (8ª edição), Projeto Euclides, IMPA, 1995, pág. 330.

[2] E.L. Lima. *Espaços Métricos,* (3ª edição) Projeto Euclides, IMPA, 1993, pág. 244.

[3] A. Spezamiglio, *Sobre a Convergência de Seqüências de Funções Diferenciáveis,* Revista Matemática Universitária, nº 18, pág. 39-48, 1995.

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 - Jardim Botânico
Rio de Janeiro - RJ.