Matemática Universitária Nº 19, Dezembro de 1995, 55-63

A série harmônica e a fórmula de Euler-MacLaurin

Geraldo Ávila

Introdução

Com o rápido progresso da computação, tanto na área de hardware como de software, cálculos que eram difíceis ou trabalhosos até dez ou vinte anos atrás, são hoje facilmente executáveis com a ajuda desses programas sofisticados, como o MATHEMATICA. Isso até nos faz lembrar a situação no tempo de Kepler, - que saudou a invenção dos logaritmos como um "alívio para o astrônomo" - pois representa não só um alívio de "trabalho braçal", mas um ganho considerável de tempo para outras tarefas mais nobres do que efetuar cálculos ou fazer programas para cada problema particular.

Todavia, enquanto desfrutamos as benesses desse "paraíso da computação", não podemos nos descuidar da Matemática. Pelo contrário, isso deve mesmo ser um estímulo a que procuremos nos informar - e informar nossos alunos - sobre que tipo de operações estaria executando o computador quando acionamos alguns desses programas. E há muita Matemática - boa e antiga - que está sendo usada nesses cálculos.

O objetivo deste artigo é o de apresentar uma fórmula muito poderosa e pouco conhecida, mas de grande importância no cálculo numérico de séries e na estimativa de restos; portanto, de muita atualidade nessa era de softwares sofisticados.

A Série Harmônica

Logo no início do estudo de séries o aluno trava conhecimento com a série geométrica, a mais simples dentre as séries convergentes; e, logo a seguir, com a série harmônica, também a mais simples dentre as séries divergentes com termo geral tendendo a zero. Aliás, o aluno iniciante e inexperiente com séries infinitas, é levado a crer que essa série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

deva ser convergente, não divergente. Afinal, os termos da série estão decrescendo para zero; após a soma de um grande número deles, quando chegarmos a $n = 10^{20}$, 10^{30}, 10^{100} etc., estaremos somando tão pouco, que sem uma análise mais cuidadosa, o aluno iniciante haverá mesmo de pensar que a série converge. E não há cálculo experimental que possa mudar essa opinião, como veremos adiante. Mas, antes, vale a pena lembrar a demonstração de que a série diverge, feita pela primeira vez por Oresme[1]. O raciocínio usado nessa demonstração e ensinado nos cursos de Cálculo consiste em agrupar os termos da série, de forma que a soma em cada grupo supere 1/2. Assim,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

Em vista disso, concluímos que a série diverge.

Voltemos agora ao que dissemos acima, de que a divergência da série jamais seria descoberta por inspeção através de cálculos. Vamos supor que fossemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo. Como um ano tem aproximadamente

$$365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.557.600 \text{ segundos},$$

nesse período de tempo seríamos capazes de somar a série até $n = 31.557.600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a pouco mais de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, esses números são muito pequenos para indicar divergência da série; não somente isso, mas depois de 100 anos já estaríamos somando algo muito pequeno, da ordem de 3×10^{-9}. É claro também que é impossível efetuar essas somas para valores tão grandes de n.

Se é impossível somar a série até valores tão grandes de n, como sabemos

1 Nicole Oresme (1325-1382), bispo de Lisieux e professor da Universidade de Paris, foi um destacado intelectual do século XIV em vários campos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais, e até mesmo Economia, uma ciência praticamente inexistente naquela época.

que a soma atinge esses valores 17, 20, 27? A resposta a essa pergunta - e a outras mais - nos virá da fórmula de Euler-MacLaurin. Mas, antes, vamos fazer mais um exercício de imaginação.

Hoje em dia temos computadores muito rápidos, e a tecnologia está produzindo máquinas, cada vez mais rápidas. Mas isso tem um limite, pois, como sabemos, nenhum sinal físico pode ser transmitido com velocidade superior à da luz. Portanto, nenhum computador poderá efetuar uma soma em tempo inferior a 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer distância igual ao diâmetro de um elétron. Pois bem, com tal computador, em um ano, mil anos e um bilhão de anos, respectivamente, poderíamos somar termos em números iguais a

$$315.576 \times 10^{25}\ ,\ 315.576 \times 10^{28} \text{ e } 315.576 \times 10^{34}.$$

E veja os resultados aproximados que obteríamos para a soma da série harmônica, em cada um desses casos, respectivamente:

$$70{,}804\ ,\ 77{,}718 \text{ e } 91{,}5273.$$

Imagine, finalmente, que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há 16 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,2999 para soma da série harmônica, um número ainda muito pequeno...

A Fórmula de Euler-MacLaurin

Vamos, finalmente, enbarcar na análise que nos permite substituir a soma da série por expressão equivalente, que possa ser calculada com facilidade. É isto o que permite fazer a fórmula de Euler-MacLaurin, substituindo uma soma do tipo $\sum_1^n f(n)$ pela integral $\int_1^n f(x)dx$. No caso concreto da série harmônica $f(x) = 1/x$.

Seja, pois, $f(x)$ uma função definida no semi-eixo real positivo e suficientemente regular para que as operações indicadas possam ser efetuadas. Em particular, f é derivável e f' integrável. Assim, indicando com f_j o valor $f(j)$, uma integração por partes nos dá:

$$\int_j^{j+1} f(x)dx = (j+1)f_{j+1} - jf_j - \int_j^{j+1} xf'(x)dx$$

$$= f_{j+1} - \int_j^{j+1} (x-j)f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right)f'(x)dx.$$

Vamos agora efetuar a soma para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Mas, ao fazer isso, o termo

$jf'(x)$, que aparece no integrando, muda conforme j muda de valor. Para contornar esse inconveniente, basta substituir esse j por $[x]$, com o costumeiro significado de "maior inteiro contido em x", isto é $[x]$ é o número inteiro tal que $x - 1 < [x] \leq x$. Então, introduzindo a função

$$P_1(x) = \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)$$

e efetuando a soma, obtemos:

$$\sum_1^n f(n) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f_1 + f_n) + \int_1^n P_1(x) f'(x)dx \tag{1}$$

Esta é a primeira versão da fórmula de Euler-MacLaurin. Vamos logo aplicá-la ao caso da série harmônica.

A constante de Euler-Mascheroni

Com a substituição $f(x) = 1/x$ em (1), a reduzida da série harmônica,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$

passa a ser

$$S_n = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx \tag{2}$$

A primeira coisa a observar aqui é que a expressão $S_n - \log n$ tem limite com $n \to \infty$, limite esse que é a *constante de Euler-Mascheroni*, denotada com γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx - \int_n^\infty \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

Seu valor numérico aproximado é $\gamma \approx 0{,}57721$

Quantos termos somar

Com introdução da constante γ a expressão (2) de S_n se transforma em

$$S_n = \log n + \frac{1}{2n} + \gamma + \int_n^\infty \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

Aplicando o segundo teorema da média para integrais ([A], p. 174), obtemos:

$$S_n = \log n + \frac{1}{2n} + \gamma + \frac{1}{n^2}\int_n^c P_1(x)dx,$$

onde c é uma constante conveniente.

Essa fórmula nos permite tratar uma questão interessante sobre a série harmônica, qual seja, a de determinar o menor valor de n para o qual a reduzida S_n atinja um certo valor prescrito A. Mais precisamente, dado o número A, desejamos determinar n tal que $S_n \geq A$ e $S_{n-1} < A$.

Como a função $P_1(x)$ é periódica de período 1 e é dada por $P_1(x) = x - 1/2$ no intervalo $0 \leq x < 1$, é fácil ver que

$$-\frac{1}{8} < \int_n^c P_1(x)dx < 0.$$

Destas desigualdades e da expressão anterior para S_n obtemos:

$$\log n + \frac{1}{2n} + \gamma > S_n > \log n + \frac{1}{2n} + \gamma - \frac{1}{8n^2}.$$

Substituindo n por $n - 1$ na penúltima dessas desigualdades, vemos que $S_n > A$ e $S_{n-1} < A$ se

$$\log n > A - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}$$

e

$$\log (n-1) < A - \gamma - \frac{1}{2(n-1)},$$

ou ainda

$$\log n > \log e^{A-\gamma} - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right)$$

e

$$\log(n-1) < \log e^{A-\gamma} - \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Essas desigualdades servem de base para obter critérios de determinação de n em termos de A e γ. Para os detalhes remetemos o leitor ao trabalho de Boas e Wrench [B-W]; aqui vamos nos contentar apenas com a observação de que o valor desejado de n está próximo de $e^{A-\gamma}$, como se vê por um exame superficial das próprias desigualdades.

A título de ilustração, suponhamos que se queira saber quantos termos devemos somar para que a soma S_n atinja o valor 20. Neste caso, tomando

$$n = e^{20-0,57721} \approx 272.402.000$$

o comando Nsum[1/n, {1, 272402000}] do MATHEMATICA nos responde $S_n = 20$. Trocando o último número de comando por 272.410.000, ele ainda nos responde $S_n = 20$; trocando por 272.520.000, a resposta agora é $S_n = 20{,}0001$. Nada mal, como se vê.

A fórmula de Euler-MacLaurin generalizada

Vamos explorar um pouco mais a fórmula (1), aplicando integração por partes na última integral que nela aparece. Faremos isso integrando $P_1(x)$ e derivando $f'(x)$ o que exige supormos que f'' exista e seja integrável. Nossa apresentação segue de perto a de Knopp ([K], p. 522 e seguintes).

Observamos que a função $P_1(x)$ tem a seguinte série de Fourier:

$$P_1(x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{\text{sen } 2n\pi x}{n\pi},$$

a qual é a derivada, termo a termo, da série

$$P_2(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}.$$

Portanto, a anunciada integração por partes em (1) nos dá:

$$\sum_{1}^{n} f(n) = \int_{1}^{n} f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f_1 + f_n) + \frac{P_2(0)}{2}(f_n' - f_1')$$

$$- \int_{1}^{n} P_2(x) f''(x) dx. \qquad (3)$$

Para fazermos novas integrações por partes, introduzimos as seguintes funções, para $k = 1,2, \ldots$:

$$P_{2k}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k}},$$

e

$$P_{2k-1}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k-1}},$$

que são tais que $P_j' = P_{j-1}$. Observamos ainda que $P_{2k-1}(0) = 0$ e

$$P_{2k}(0) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^{2k}} = \frac{B_{2k}}{(2k)!}, \tag{4}$$

onde os B_{2k} são os chamados *números de Bernoulli*. Como se vê, esses números são dados pela própria série numérica em (4). Mas eles podem ser definidos e calculados de outra maneira ([K], p. 183). Com o auxílio desses números, e supondo que f tenha todas as derivadas necessárias, é fácil ver que repetidas integrações por partes em (3) nos dão:

$$\sum_{1}^{n} f(n) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f_1 + f_n) + \frac{B_2}{2}(f_n' - f_1') + \frac{B_4}{4!}(f_n''' - f_1''')$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f_n^{(2k-1)} - f_1^{(2k-1)} \right) + \int_1^n P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\, dx, \tag{5}$$

que é a fórmula de Euler-MacLaurin generalizada.

Novamente a série harmônica

Aplicando a fórmula anterior à função $f(x) = 1/x$ obtemos:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{B_2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{B_4}{4}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2k}}{2k}\left(1 - \frac{1}{n^{2k}}\right) - (2k+1)! \int_1^n \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}\, dx. \tag{6}$$

Vamos ilustrar a utilização desta fórmula, concretamente, fixando $k = 3$, substituindo os valores ([K], p.183) $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ e $B_6 = 1/42$ e desdobrando a última integral na soma de duas outras, digamos de 1 a 4 e de 4 a n. O resultado

$$S_n = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{120}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)$$

$$+ \frac{1}{252}\left(1 - \frac{1}{n^6}\right) - 7!\left(\int_1^4 \frac{P_7(x)}{x^8}\, dx + \int_4^n \frac{P_7(x)}{x^8}\, dx\right) \tag{7}$$

O último termo que aí aparece é, em módulo, inferior a 10^{-6}, isto é,

$$7!\left|\int_4^n \frac{P_7(x)}{x^8}\,dx\right| \le 7!\int_4^\infty \frac{|P_7(x)|}{x^8}\,dx \le 7!\times\frac{4}{(2\pi)^7}\times\frac{1}{7\times 4^7} < 10^{-6}.$$

Em vista desta estimativa, a fórmula (7) nos dá a reduzida S_n com n arbitrariamente grande, através de poucos cálculos simples, desde que desprezemos a última integral que nela aparece e saibamos o valor da penúltima. Ora, essa penúltima integral é dada pela própria fórmula (7), em termos de S_4 e log 4, quando fazemos $n = 4$. Fica assim esclarecido como calcular, aproximadamente, com erro inferior a 10^{-6}, a reduzida S_n com poucas operações aritméticas, não importa quão grande seja n.

Fica também claro como fazer esse cálculo com qualquer aproximação desejada; teríamos de decompor a integral em (6) na soma de outras duas, de 1 a c e de c a n, onde c, quanto maior for, melhor aproximação dará aos cálculos.

A constante de Euler

Para finalizar, observemos que a constante de Euler pode ser calculada de maneira análoga. Passando log n para o primeiro membro em (6) e fazendo $n \to \infty$, obtemos:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k} - (2k+1)!\left(\int_1^\infty \frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+2}}\,dx\right). \tag{8}$$

Não podemos passar ao limite com $k \to \infty$ pois a série resultante seria divergente, visto que, em vista de (4),

$$|B_{2k}| > (2k)!$$

Mas podemos usar essa fórmula (8) para calcular γ com a aproximação que se desejar. Assim, com as mesmas substituições que fizemos em (6) para obter (7), a fórmula (8) se reduz a

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} + \frac{1}{252} - 7!\left(\int_1^4 \frac{P_7(x)}{x^8}\,dx + \int_4^\infty \frac{P_7(x)}{x^8}\,dx\right).$$

O cálculo de γ com esta fórmula é inteiramente análogo ao procedimento descrito acima para calcular S_n.

Observação final. A fórmula generalizada de Euler-MacLaurin, ou seja, a fórmula (5), pode ser utilizada para vários outros cálculos envolvendo certas séries numéricas, como cálculos de reduzidas e estimativas de restos. O leitor interessado deve consultar [B] e [K].

Referências

[A] G. Ávila, *Introdução à Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher, 1973.

[B] R. P. Boas Jr., *Partial sums of infinite series, and how they grow*, Amer. Math. Monthly, vol. 84 (1977) 237-258.

[B-W] R. P. Boas Jr. and J. W. Wrench Jr., *Partial sums of the harmonic series*, Amer. Math. Monthly, vol. 78 (1971) 864-869.

[K] K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, reimpressão pela Hafner Publishing Co., N. Y., 1971 (A primeira edição é de 1921.)

[G,K,P] Graham, Knuth, Patashnik, *Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science;* Addison-Wesley.

Instituto de Matemática e Física, UFG
74001-970 Goiânia, GO