

O Teorema de Bäcklund segundo S. S. Chern

Sebastião Carneiro de Almeida
Fernando Antônio Amaral Pimentel

1 Introdução

Em 1834, o cientista e engenheiro escocês Scott Russell teve a oportunidade de observar pela primeira vez o fenômeno das ondas solitárias. Scott Russell seguia o movimento de um pequeno barco em um canal estreito quando este abruptamente parou ao atingir um escolho. Com o impacto, uma certa quantidade de água começou a se deslocar mantendo, por longo tempo, a sua forma original. Impressionado com o fenômeno, Scott Russel batizou-o de *onda solitária* e apesar de muito esforço não chegou a determinar a equação diferencial a ele associada. Foi somente em 1895, após a sua morte, que os cientistas Korteweg e de Vries obtiveram a equação para a propagação de ondas em uma direção na superfície de um canal raso.

As ondas solitárias pareciam fadadas ao esquecimento. Em 1955, Fermi, Pasta e Ulam encontraram uma relação entre a equação de Korteweg de Vries (KdV),

$$\Phi_t = \frac{1}{4}\Phi_{xxx} - \frac{3}{2}\Phi\Phi_x$$

e o comportamento bizarro de sistemas, originalmente lineares, no qual foram introduzidas perturbações não lineares. Ao perceberem que ondas solitárias da equação de Korteweg de Vries não se dispersavam e retinham suas características iniciais após colidirem, os cientistas Zabusky e Kruskal [KZ] chamaram tais ondas de *solitons*.

A partir daí, outros exemplos de ondas solitárias com tais características foram encontradas, com variadas aplicações a problemas da física. Estes exemplos foram chamados também de solitons. Se "solit" obviamente se refere a "solitária", a terminação "on" é a própria palavra grega para partícula, e sugere que tais ondas têm um comportamento corpuscular.

Desde a descoberta em 1965 de *solitons*, isto é, especiais tipos de ondas que retêm suas características após interações não lineares com outras ondas, que Físicos e Matemáticos têm dedicado muito de seus esforços em investigações do citado fenômeno. Entre as equações mais importantes que possuem soluções com a propriedade acima está a *sine-Gordon equation* (SGE)

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \sin \Phi.$$

Sabe-se que existe uma correspondência biunívoca entre soluções da equação de sine-Gordon e superfícies $M \subset R^3$ com curvatura Gaussiana constante $K = -1$. Uma técnica usada com sucesso ao estudar-se as soluções da SGE é a transformação de Backlund para superfícies pseudoesféricas. Em 1875, o matemático sueco A. V. Bäcklund mostrou que era possível construir uma hierarquia de soluções da SGE onde cada solução poderia ser construída a partir de uma solução anterior. Especificamente, ele provou que dada uma superfície $M \subset R^3$ com curvatura $K = -1$ existe uma família a dois parâmetros de superfícies $M_{r\sigma}$ também de curvatura -1 e relacionadas com M através de um difeomorfismo $l: M \rightarrow M_{r\sigma}$. As transformações envolvidas são chamadas de "transformações de Bäcklund". As transformações de Backlund nos permitem construir novas superfícies com curvatura constante -1 e portanto novas soluções da equação de sine-Gordon.

No parágrafo 2 daremos as definições básicas e provaremos o Teorema de Bäcklund. No teorema de Bäcklund encontraremos um tipo particular de congruência de retas envolvendo superfícies de curvatura constante $K < 0$. Estas superfícies foram classicamente chamadas de pseudoesferas.

No parágrafo 3 estudaremos as relações entre as direções assintóticas de uma superfície pseudoesférica e as soluções da equação de sine-Gordon.

O parágrafo 4 é dedicado à construção de exemplos específicos que ilustrem a situação acima. Neste parágrafo faremos uma construção

explícita da transformada de Bäcklund da pseudoesfera usual. Por seu lado a pseudoesfera usual é obtida como uma superfície da família de superfícies pseudoesféricas de Dini, cuja construção é feita relaxando-se a condição de superfície nas fórmulas obtidas para a transformação de Backlund.

No parágrafo 5 chamamos atenção para o Teorema da Permutabilidade de Bianchi. O teorema de Bianchi fornece uma Fórmula de Superposição que nos capacita construir novas famílias de soluções da equação de sine-Gordon.

Estas notas tiveram origem em uma disciplina de tópicos lecionada na Universidade da Califórnia em Berkeley durante a primavera do ano de 1979. O primeiro autor destas notas era um dos alunos do Professor S. S. Chern que no período ministrava esta disciplina. Em uma lista de exercícios de um dos tópicos tratados pedia-se a transformada de Bäcklund da pseudoesfera usual. Na ocasião nenhum dos alunos conseguiu uma solução para o problema proposto. Em dezembro do mesmo ano, em uma conferência do Professor Robert Bryant, constatou-se que na audiência ninguém lembrava de exemplos concretos que pudessem ilustrar (com gráficos) o uso da transformação de Bäcklund para superfícies pseudoesféricas. Este constrangimento geral foi provocado pelo Professor Isadore Singer que manifestou vontade de ver o gráfico da transformada de Bäcklund de alguma superfície pseudoesférica. Na audiência não se conhecia nem mesmo a transformada da pseudoesfera usual. Tendo localizado este e outros exemplos nos trabalhos de L. Bianchi ([B]) (uma tradução alemã do fim do século passado) o primeiro autor achou interessante escrever um resumo que foi então divulgado pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará (veja [A]).

O material apresentado nestas notas é clássico e, como é do conhecimento da comunidade matemática, acha-se contido em trabalhos do eminente geômetra S. S. Chern (Veja [C]). Os exemplos apresentados no parágrafo 4 podem ser encontrados nos trabalhos de L. Bianchi (Veja [B]). Nestas notas estes exemplos foram reconstruídos utilizando-se a notação introduzida no parágrafo 2. Os gráficos destas superfícies foram obtidos por computador usando-se o programa MATHEMATICA. É interessante observar que as equações que determinam estas superfícies foram obtidas ainda no século passado quando modelos de tais superfícies

foram construídos com uma extrema precisão. Por esta razão resolvemos incluir também reproduções dos modelos destas superfícies. Os modelos mencionados acima fazem parte de uma coleção de modelos matemáticos pertencentes à Universidade de Göttingen.

Aos que quiserem se aprofundar no assunto sugerimos os excelentes livros da Professora Keti Tenenblat, (Veja [T2, T3]).

2 Teorema de Bäcklund

O objetivo principal deste parágrafo é apresentar uma demonstração do teorema de Bäcklund. Antes porém faremos um breve comentário sobre a noção de congruência de retas em R^3 .

Uma congruência de retas (Cf. [C]) é uma família a dois parâmetros de retas em R^3 . Localmente as retas da congruência são dadas por

$$\begin{cases} Y(u, v) = X(u, v) + \lambda \xi(u, v), & \lambda \in R \\ |\xi|^2 = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para ilustrar a definição acima relembremos o conceito de congruência normal (Cf. [dC]).

Exemplo 2.1 (Congruência normal): *Seja $X(u, v)$ uma superfície regular parametrizada por linhas de curvatura e sem pontos parabólicos e umbílicos. Sejam M e M^* parametrizadas respectivamente por $Y = X + k_1^{-1}N$ e $Y^* = X + k_2^{-1}N$ onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de $X(u, v)$ e N é um campo de vetores unitários normais a $X(u, v)$. Se $(k_1)_u$ e $(k_2)_v$ nunca se anulam, então M e M^* são superfícies regulares. Quando um ponto X se move sobre a superfície $X(u, v)$, os correspondentes centros de curvatura principais P e P^* descrevem duas superfícies M e M^* , as quais são chamadas superfícies focais da congruência normal.*

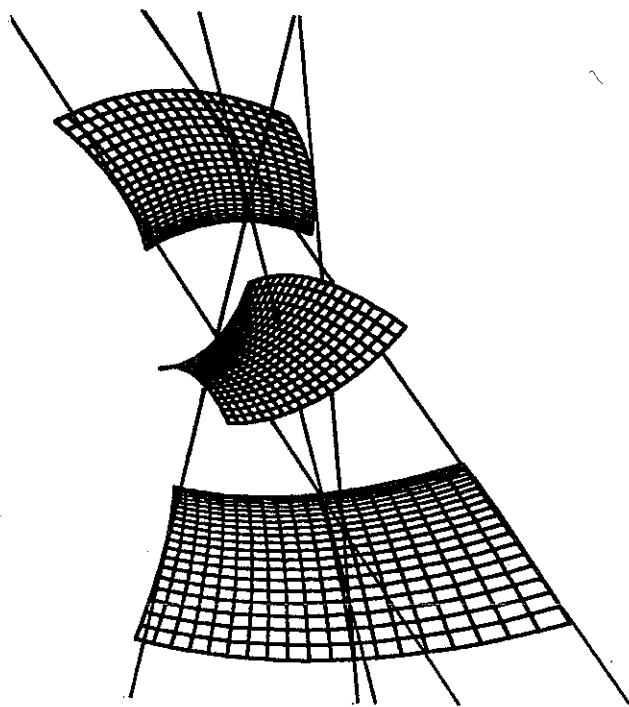


Figura 1: Congruência normal.

No teorema de Bäcklund que enunciaremos a seguir encontraremos um tipo particular de congruência que envolve superfícies de curvatura Gaussiana constante $K < 0$. Em uma tal congruência as superfícies envolvidas são ditas superfícies focais da congruência “pseudoesférica”.

Teorema 2.1 ([Ba]) *Seja $l : M \rightarrow M^*$ um difeomorfismo entre superfícies regulares $M, M^* \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que as retas ligando pontos correspondentes $P \in M$ e $P^* \in M^*$ sejam tangentes a M e M^* em P e P^* respectivamente. Suponha ainda que*

a) $|P - P^*| = r$, onde $r \neq 0$ é uma constante

b) O ângulo entre as normais correspondentes em P e P^* é uma constante $\sigma \neq 0$.

Então ambas superfícies M e M^* têm curvatura Gaussiana constante negativa $K = K^* = -(\sin^2 \sigma)/r^2$.

Prova. A prova que apresentaremos aqui é devida a S. S. Chern e nela fazemos uso do método do triedro móvel. Escolhamos então um referencial ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ em M tal que v_1 seja o vetor unitário tangente na direção de $\overrightarrow{PP^*}$ e $v_3 = v_1 \times v_2$ seja normal à M . Suponhamos que M seja dada localmente por uma imersão $X : U \rightarrow R^3$ onde U é um aberto de R^2 . Denotaremos por $\theta_\alpha, \theta_{\alpha\beta}$ as formas duais e as formas de conexões do referencial $\{v_\alpha\}$. Então

$$dX = \sum_{\alpha=1}^3 \theta_\alpha v_\alpha \quad (2.2)$$

$$dv_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \theta_{\alpha\beta} v_\beta. \quad (2.3)$$

As formas $\theta_\alpha, \theta_{\alpha\beta}$ satisfazem as equações de estrutura e quando restritas a M satisfazem não somente tais equações, como também a relação adicional $\theta_3 = 0$, isto é,

$$\begin{cases} d\theta_\alpha = \sum \theta_{\alpha\beta} \wedge \theta_\beta \\ d\theta_{\alpha\beta} = \sum \theta_{\alpha\gamma} \wedge \theta_{\gamma\beta} \\ \theta_3 = 0, \text{ em } M. \end{cases} \quad (2.4)$$

Usando-se a condição (b) podemos escolher um referencial $\{v_\alpha^*\}$ em M^* tal que

$$\begin{cases} v_1^* = -v_1 \\ v_2^* = -\cos \sigma v_2 - \sin \sigma v_3 \\ v_3^* = -\sin \sigma v_2 + \cos \sigma v_3. \end{cases} \quad (2.5)$$

Como acima denotaremos por $\theta_\alpha^*, \theta_{\alpha\beta}^*$ as formas duais e as formas de conexões associadas ao referencial $\{v_\alpha^*\}$. Para obtermos as curvaturas Gaussianas de M e M^* necessitamos de alguns cálculos. Para isto denotaremos por \langle, \rangle o produto interno usual do R^3 . Inicialmente observamos que

$$\begin{aligned} \theta_{23}^* &= \langle dv_2^*, v_3^* \rangle \\ &= \langle -\cos \sigma dv_2 - \sin \sigma dv_3, -\sin \sigma v_2 + \cos \sigma v_3 \rangle \\ &= -\cos^2 \sigma \theta_{23} + \sin^2 \sigma \theta_{32} \\ &= -\theta_{23}. \end{aligned}$$

A equação acima deve ser vista como

$$l^* \theta_{23}^* = -\theta_{23}. \quad (2.6)$$

Como $l : M \rightarrow M^*$ é um difeomorfismo, a aplicação $X^* : U \rightarrow M^*$, dada por $X^* = l(X)$ é uma parametrização local para M^* . De (2.5) tem-se que:

$$dX^* = \theta_1^*(-v_1) + \theta_2^*(-\cos \sigma v_2 - \sin \sigma v_3). \quad (2.7)$$

Por construção $l(X) = X + r v_1$. Portanto tem-se também que:

$$dX^* = \theta_1 v_1 + (\theta_2 + r \theta_{12}) v_2 + r \theta_{13} v_3. \quad (2.8)$$

De (2.6), (2.7), (2.8) e da simetria das equações envolvidas segue-se que:

$$\begin{cases} l^* \theta_{23}^* = -\theta_{23} \\ l^* \theta_1^* = -\theta_1 \\ l^* \theta_2^* = -(r/\sin \sigma) \theta_{13} \\ l^* \theta_{13}^* = -(\sin \sigma)/r \theta_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\theta_2 + r \theta_{12} = r \cot \sigma \theta_{13}. \quad (2.10)$$

Podemos então calcular facilmente a curvatura Gaussiana K^* de M^* . Para isto usaremos o fato de que a curvatura Gaussiana K^* é a única função satisfazendo a equação $\theta_{13}^* \wedge \theta_{23}^* - K^* \theta_1^* \wedge \theta_2^* = 0$. Usando-se (2.4), (2.9) obtem-se:

$$\begin{aligned} l^* \left(\theta_{13}^* \wedge \theta_{23}^* + \frac{\sin^2 \sigma}{r^2} \theta_1^* \wedge \theta_2^* \right) &= \frac{\sin \sigma}{r} (\theta_2 \wedge \theta_{23} + \theta_1 \wedge \theta_{13}) \\ &= \frac{\sin \sigma}{r} d\theta_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$K^* = -(\sin^2 \sigma)/r^2.$$

Por simetria obtemos também que

$$K = -(\sin^2 \sigma)/r^2.$$

Observação 1 Uma congruência de linhas com superfícies focais M e M^* é dita pseudoesférica se as condições assumidas no Teorema de Bäcklund são todas satisfeitas. Na literatura é comum o uso da notação $M^* = B_\sigma M$ onde $B_\sigma M$ significa que M^* foi obtida através de M por uma transformação de Bäcklund B_σ .

Corolário 2.2 Uma congruência pseudoesférica $l : M \rightarrow M^*$ preserva linhas de curvatura e linhas assintóticas.

Prova. Usaremos a notação do teorema de Bäcklund e o fato elementar de que linhas de curvatura são soluções da equação $\theta_1\theta_{23} - \theta_2\theta_{13} = 0$. Segue-se facilmente de (2.9) que

$$l^*(\theta_1^*\theta_{23}^* - \theta_2^*\theta_{13}^*) = \theta_1\theta_{23} - \theta_2\theta_{13}.$$

Portanto, se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma linha de curvatura de M , então $\beta = l(\alpha)$ é também uma linha de curvatura de M^* . Usando-se um cálculo similar e escrevendo-se $\theta_{i3} = \sum h_{ij}\theta_j$, onde $h_{ij} = h_{ji}$ obtém-se facilmente que as segundas formas fundamentais de M e de M^* satisfazem $\sin \sigma II^* = r h_{12} II$. Conclui-se então que $l : M \rightarrow M^*$ preserva linhas assintóticas.

3 Direções assintóticas e a equação de sine-Gordon

Neste parágrafo manteremos a notação do parágrafo anteriore. Desde que a curvatura Gaussiana K de M é negativa, M pode ser parametrizada localmente por uma imersão $X : U \rightarrow R^3$ tal que os vetores X_u e X_v sejam sempre vetores principais (Veja: [S]). Como anteriormente denotaremos por v_3 , e v_3^* os campos unitários normais à M e M^* respectivamente. Sejam $\{e_\alpha\}$ e $\{e_\alpha^*\}$ referenciais ortonormais em M e M^* dados respectivamente por

$$\begin{cases} e_1 = X_u/|X_u| \\ e_2 = X_v/|X_v| \\ e_3 = v_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} e_1^* = X_u^*/|X_u^*| \\ e_2^* = X_v^*/|X_v^*| \\ e_3^* = v_3^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

Denotaremos por $\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta}$ as 1-formas duais e de conexões associadas ao referencial $\{e_\alpha\}$ e como usualmente usaremos uma “*” para designar as 1-formas de M^* . Observamos agora que a segunda forma fundamental de M^* é dada por

$$\begin{aligned} II^* &= \langle -de_3^*, dX^* \rangle \\ &= \langle \sum \omega_{i3}^* e_i^*, \sum \omega_j^* e_j^* \rangle \\ &= k_1^* (\omega_1^*)^2 + k_2^* (\omega_2^*)^2 \end{aligned}$$

onde k_1^* e k_2^* são as curvaturas principais de M^* . Para o cálculo de II^* precisaremos determinar os valores das curvaturas principais k_1^* e k_2^* . Para isto escreva

$$\begin{cases} v_1 = \sin \Psi^* e_1 + \cos \Psi^* e_2 \\ v_2 = -\cos \Psi^* e_1 + \sin \Psi^* e_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

e observe que

$$\begin{cases} \theta_1 = \sin \Psi^* \omega_1 + \cos \Psi^* \omega_2 \\ \theta_2 = -\cos \Psi^* \omega_1 + \sin \Psi^* \omega_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Sabemos do Corolário 2.2 que as curvas integrais dos vetores $e_i^*, i = 1, 2$ são linhas de curvaturas de M^* . Portanto as curvaturas principais de M^* são dadas por

$$\begin{aligned} k_1^* &= \frac{\theta_{13}^*(e_1^*)}{\theta_1^*(e_1^*)} = \frac{(-\sin \sigma)/r \cdot \theta_2(e_1)}{-\theta_1(e_1)} = -\frac{\sin \sigma}{r} \cot \Psi^* \\ k_2^* &= \frac{\theta_{13}^*(e_2^*)}{\theta_1^*(e_2^*)} = \frac{(-\sin \sigma)/r \cdot \theta_2(e_2)}{-\theta_1(e_2)} = \frac{\sin \sigma}{r} \tan \Psi^*. \end{aligned}$$

Segue-se então que:

$$\begin{aligned} II^*(\sin \Psi^* e_1^* + \cos \Psi^* e_2^*) &= k_1^* \sin^2 \Psi^* + k_2^* \cos^2 \Psi^* \\ &= \sin \sigma \left(-\cot \Psi^* \sin^2 \Psi^* + \tan \Psi^* \cos^2 \Psi^* \right) / r \\ &= 0. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *A função Ψ^* mede o ângulo entre as direções assintóticas e as linhas de curvatura $X^*(u_0, v)$ de M^* .*

Como acima continuaremos assumindo que M é dada localmente por uma parametrização $X(u, v)$ onde as curvas coordenadas são sempre linhas de curvaturas. Veremos no Apêndice destas notas que a condição $K < 0$ nos permite escolher $X(u, v)$ de modo que as formas duais e de conexões associadas ao referencial $\{e_\alpha\}$ sejam dadas por

$$\omega_1 = \sin \Psi \, du, \quad \omega_2 = \cos \Psi \, dv \quad (3.5)$$

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Psi_v du - \Psi_u dv & \sqrt{-K} \cos \Psi du \\ \cdot & 0 & -\sqrt{-K} \sin \Psi dv \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

A função Ψ nas equações acima é a função ângulo entre uma direção assintótica e as curvas $X(u_0, v)$. A partir da equação de Gauss

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

obtem-se

$$(\Psi_{vv} - \Psi_{uu}) \, du \wedge dv = -K \sin \Psi \cos \Psi \, du \wedge dv.$$

Note que quando $K = -1$ a função $\Phi = 2\Psi$ satisfaz a equação de sine-Gordon. Usando-se o teorema de existência e unicidade para superfícies obtemos o seguinte

Teorema 3.2 *Existe uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação de "sine-Gordon", $\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = \text{sen} \Phi$, $0 < \Phi < \pi$ e superfícies com curvatura Gaussiana constante $K = -1$ em R^3 a menos de um movimento rígido.*

A equação (2.10) é chamada de transformação de Bäcklund. No resultado que se segue reescreveremos a transformação de Bäcklund em termos das funções Ψ e Ψ^* . Antes de enunciarmos o resultado convém mencionar o seguinte fato cuja prova é um simples cálculo:

Observação 2 *As direções de $X^* \in M^*$ para $X \in M$ são determinadas pelo campo de vetores $v_1^* = -v_1$. Os campos v_1^* e v_1 são obtidos das seguintes relações:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin \Psi^* e_1 + \cos \Psi^* e_2 \\ -v_1^* &= \sin \Psi e_1^* + \cos \Psi e_2^*. \end{aligned}$$

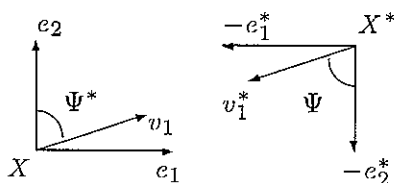


Figura 2: Direção de $X \in M$ p/ $X^* \in M^*$.

Teorema 3.3 *Em termos das coordenadas assintóticas (x, y) dadas por $u = x - y$, $v = x + y$ a transformação de Bäcklund é equivalente a:*

$$\begin{cases} (\Psi^* + \Psi)_x = \sqrt{-K}(\csc \sigma - \cot \sigma) \sin(\Psi^* - \Psi) \\ (\Psi^* - \Psi)_y = \sqrt{-K}(\csc \sigma + \cot \sigma) \sin(\Psi^* + \Psi). \end{cases} \quad (3.7)$$

Prova. Da equação (3.4) temos que:

$$\theta_2 = -\cos \Psi^* \omega_1 + \sin \Psi^* \omega_2.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \theta_{13} &= \langle dv_1, v_3 \rangle \\ &= -\langle de_3, v_1 \rangle \\ &= \langle \omega_{13}e_1 + \omega_{23}e_2, \sin \Psi^* e_1 + \cos \Psi^* e_2 \rangle \\ &= \sin \Psi^* \omega_{13} + \cos \Psi^* \omega_{23} \end{aligned}$$

e de maneira análoga

$$\theta_{12} = -d\Psi^* + \omega_{12}$$

Usando-se (3.5) e (3.6) obtém-se:

$$\begin{cases} \theta_2 = \sin(\Psi^* - \Psi)dx + \sin(\Psi^* + \Psi)dy \\ \theta_{13} = [\sin(\Psi^* - \Psi)dx - \sin(\Psi^* + \Psi)dy]\sqrt{-K} \\ \theta_{12} = -(\Psi^* + \Psi)_x dx - (\Psi^* - \Psi)_y dy. \end{cases} \quad (3.8)$$

Um simples cálculo mostra que a equação (2.10) é equivalente a:

$$(\Psi^* + \Psi)_x = c \sqrt{-K} \sin(\Psi^* - \Psi)$$

$$(\Psi^* - \Psi)_y = c^{-1} \sqrt{-K} \sin(\Psi^* + \Psi)$$

onde $c = \csc \sigma - \cot \sigma$. Isto completa a prova do teorema.

Como consequência do teorema acima é fácil ver que quando $K = -1$ tanto a função Ψ como a função Ψ^* são soluções da equação de "sine-Gordon". Explicitamente temos:

Corolário 3.4 *Suponha que a superfície M tenha curvatura $K = -1$. Então as funções $\Phi = 2\Psi$ e $\Phi^* = 2\Psi^*$ são ambas soluções da equação de "sine-Gordon".*

Prova. Do Teorema acima vê-se facilmente que

$$2(\Psi^* + \Psi)_{xy} = \sin(2\Psi^*) + \sin(2\Psi)$$

$$2(\Psi^* - \Psi)_{yx} = \sin(2\Psi^*) - \sin(2\Psi).$$

Somando-se ou subtraindo-se as equações acima obtém-se

$$\Phi_{xy}^* = \sin \Phi^*$$

$$\Phi_{xy} = \sin \Phi.$$

É fácil ver que $\Phi_{xy} = \Phi_{vv} - \Phi_{uu}$. Portanto Φ e analogamente Φ^* satisfazem a equação de "sine-Gordon".

4 Construção de exemplos

Neste parágrafo mostraremos como a transformação de Bäcklund se aplica a exemplos concretos de superfícies de curvatura constante negativa. Antes de apresentarmos estes exemplos devemos mencionar que a equação (2.10) é completamente integrável.

Teorema 4.1 (*[C]*) *Seja M uma superfície pseudoesférica de curvatura*

$K = -(\sin^2 \sigma)/r^2$, onde σ, r são constantes diferentes de zero. Para cada ponto $p_0 \in M$ e cada direção não principal fixa v_0 , existe uma única superfície $M^* = B_\sigma M$ satisfazendo as condições do teorema de Bäcklund com a condição inicial $v_1(p_0) = v_0$.

Prova. Daremos apenas uma indicação de como a demonstração pode ser feita. Define-se $\Phi = \theta_2 + r\theta_{12} - r \cot \sigma \theta_{13}$ e mostra-se que $d\Phi = 0$, mod Φ . Em seguida usa-se o teorema de Frobenius (Cf. [W]).

Exemplo 4.1 [Superfície de Kuen (1884)] - Seja M a pseudoesfera obtida pela revolução em torno eixo- x da tractriz $\alpha(v) = (0, \sec v, v - \tan v)$. Sendo uma superfície de revolução M pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = (-\sin u \sec hv, \cos u \sec hv, v - \tan hv). \quad (4.1)$$

Desde que M é uma superfície de revolução, suas curvas coordenadas são sempre linhas de curvaturas. As direções principais de M são, portanto, dadas por

$$\begin{aligned} X_u &= \sec hv (-\cos u, -\sin u, 0) \\ X_v &= \tan hv (\sin u \sec hv, -\cos u \sec hv, \tan hv). \end{aligned}$$

Consideraremos agora um referencial ortonormal $\{e_\alpha\}$ em M tal que e_1 e e_2 sejam múltiplos de X_u, X_v respectivamente. Explicitamente, definiremos $\{e_\alpha\}$ por:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\cos u, -\sin u, 0) \\ e_2 &= (\sin u \sec hv, -\cos u \sec hv, \tan hv) \\ e_3 &= (\sin u \tan hv, -\cos u \tan hv, -\sec hv). \end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que as 1-formas duais e de conexões associadas ao referencial $\{e_\alpha\}$ são dadas por:

$$\omega_1 = \sec hv \, du, \quad \omega_2 = \tan hv \, dv$$

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \sec hv \, du & \tan hv \, dv \\ \cdot & 0 & -\sec hv \, dv \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $v > 0$, o ângulo Ψ , $0 < \Psi < \pi/2$, entre as direções assintóticas e as curvas $X(u_0, v)$ é dado por:

$$\sin \Psi = \sec hv, \quad \cos \Psi = \tan hv.$$

Das equações acima é fácil ver que $K = -1$, $\omega_1 = \sin \Psi \, du$, $\omega_2 = \cos \Psi \, dv$ e que as formas de conexões satisfazem (3.6). Nosso objetivo

agora é determinar $M^* = B_\sigma M$, para o caso especial em que $\sigma = \pi/2$ e $r = 1$. Para se construir uma tal congruência pseudoesférica com M sendo uma das superfícies focais, teremos de determinar o campo de vetores $v_1 = \sin \Psi^* e_1 + \cos \Psi^* e_2$. Por outro lado, sabemos do Teorema 3.3 que Ψ^* satisfaz

$$\begin{cases} (\Psi^* + \Psi)_x = \sin(\Psi^* - \Psi) \\ (\Psi^* - \Psi)_y = \sin(\Psi^* + \Psi). \end{cases} \quad (4.2)$$

Estas equações são equivalentes a

$$\begin{cases} \Psi_u^* = (1 - \cos \Psi^*) \sin \Psi \\ \Psi_v^* = \sin \Psi^* \cos \Psi \end{cases} \quad (4.3)$$

cujas soluções são dadas por

$$\cot(\Psi^*/2) = (c - u) \sec hv.$$

Aqui c é uma constante. Escolhamos $c = 0$ e denotemos por M^* a transformada de Bäcklund de M . Como usualmente M^* é dada pela parametrização $X^*(u, v) = X(u, v) + v_1$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \sin \Psi^* &= \frac{2}{\cot(\Psi^*/2) + \tan(\Psi^*/2)} \\ \cos \Psi^* &= \frac{\cot(\Psi^*/2) - \tan(\Psi^*/2)}{\cot(\Psi^*/2) + \tan(\Psi^*/2)}. \end{aligned}$$

Um cálculo simples fornece

$$v_1 = \frac{-2u \cos hv}{u^2 + \cos h^2 v} e_1 + \frac{u^2 - \cos h^2 v}{u^2 + \cos h^2 v} e_2 \quad (4.4)$$

A transformada de Bäcklund da pseudoesfera usual é dada parametricamente por $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ onde

$$\begin{aligned} x_1^* &= \lambda(u \cos u - \sin u) \\ x_2^* &= \lambda(u \sin u + \cos u) \\ x_3^* &= v - \lambda \sin hv \end{aligned}$$

e λ é a função dada por

$$\lambda = \frac{2 \cos hv}{u^2 + \cos h^2 v}$$

A figura abaixo mostra a pseudoesfera usual e a sua transformada de Bäcklund com parâmetros $r = 1$ e $\sigma = \pi/2$.

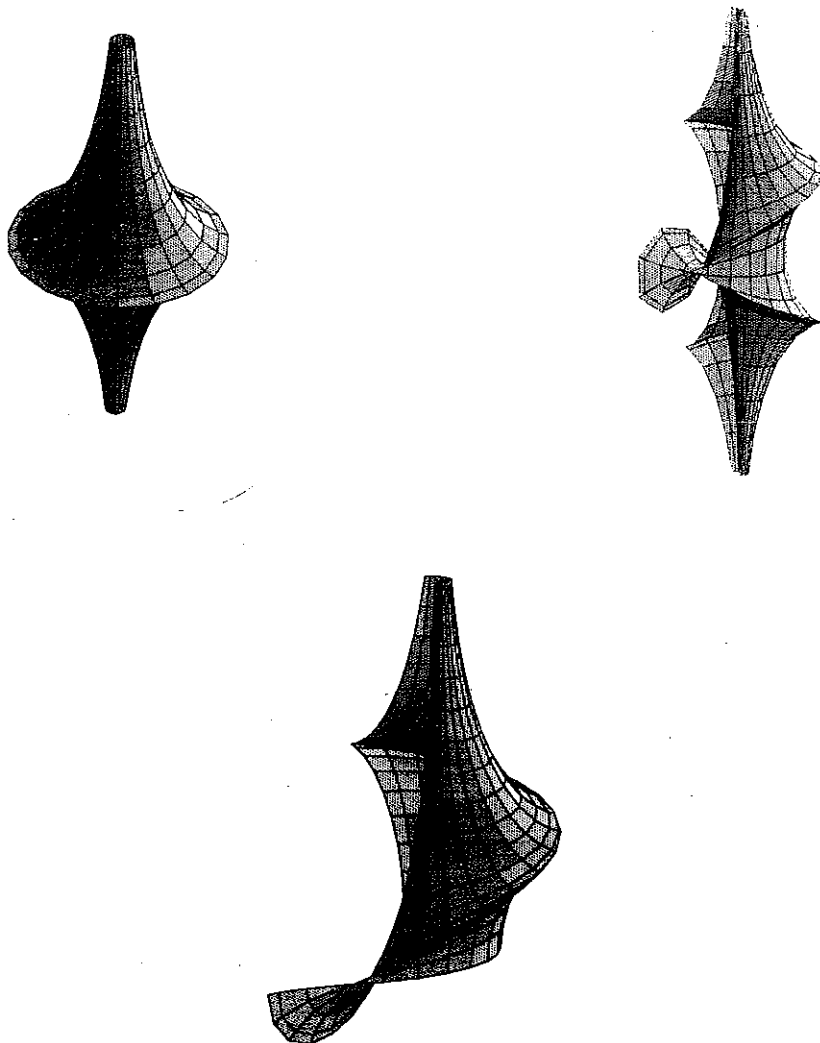


Figura 3: Transformada de Bäcklund da pseudoesfera.

A construção de Bäcklund pode ser feita mesmo quando $X(u, v)$ deixa de ser uma superfície regular. Apresentaremos agora um exemplo desta situação. Para isto precisamos da seguinte definição:

Definição 4.2 *Uma superfície pseudoesférica generalizada é uma família de referenciais ortonormais $X e_1, e_2, e_3$ tal que as formas $\omega'_{\alpha s}$ e $\omega'_{\alpha\beta s}$ satisfazem equações semelhantes à aquelas dadas em (3.5) e (3.6) para uma determinada escolha da função Ψ .*

Exemplo 4.2 *Seja $X(u, v) = (0, 0, v)$ e $X e_1, e_2, e_3$ a família de referenciais dada por:*

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 1) \\ e_3 &= (-\cos u, -\sin u, 0). \end{aligned}$$

É fácil verificar que, para $\Psi = 0$, $X e_1, e_2, e_3$ forma uma superfície pseudoesférica generalizada. As equações em (3.7) se transformam em:

$$\begin{cases} \Psi_x^* = (\csc \sigma - \cot \sigma) \sin \Psi^* \\ \Psi_y^* = (\csc \sigma + \cot \sigma) \sin \Psi^* \end{cases} \quad (4.5)$$

cujas soluções são dadas por $\tan(\Psi^/2) = e^\alpha$ onde $\alpha = c - \cot \sigma u + \csc \sigma v$. Isto nos dá:*

$$\sin \Psi^* = \sec h \alpha, \quad \cos \Psi^* = -\tan h \alpha.$$

A valores gerais de σ correspondem as pseudoesferas de Dini que são dadas por $X^ = X + \sin \sigma (\sin \Psi^* e_1 + \cos \Psi^* e_2)$. Explicitamente as pseudoesferas de Dini tem a seguinte equação paramétrica.*

$$X^* = \left(-\frac{\sin \sigma}{\cos h \alpha} \sin u, \frac{\sin \sigma}{\cos h \alpha} \cos u, v - \sin \sigma \tanh \alpha \right).$$

O caso especial $\sigma = \pi/2$ nos dá as pseudoesferas de Beltrami:

$$X_\alpha^* = (-\sec h \alpha \sin u, \sec h \alpha \cos u, v - \tanh \alpha).$$

No caso especial das pseudoesferas de Beltrami temos que $\alpha = v + c$. Tomando-se $c = 0$ encontraremos a pseudoesfera usual dada no exemplo 4.1.

A figura abaixo mostra uma seqüência de superfícies de Dini convergindo para a pseudoesfera usual. Estas superfícies são todas localmente isométricas.



Figura 4: Superfícies pseudoesféricas de Dini

Na figura abaixo mostramos uma cópia de um modelo de uma das superfícies pseudoesféricas de Dini. Apresentamos também uma cópia de um modelo da *superfície complementar* da pseudoesfera (Cf. [B]). Classicamente, quando $\sigma = \pi/2$, chamava-se a transformada de Bäcklund de uma dada superfície pseudoesférica de superfície complementar desta superfície. Estes modelos foram construídos ainda no século passado. Podemos aqui constatar a extrema precisão das construções feitas se comparadas com as figuras produzidas utilizando-se o programa MATHEMATICA. Os modelos mencionados acima fazem parte da coleção de modelos matemáticos da Universidade de Göttingen.

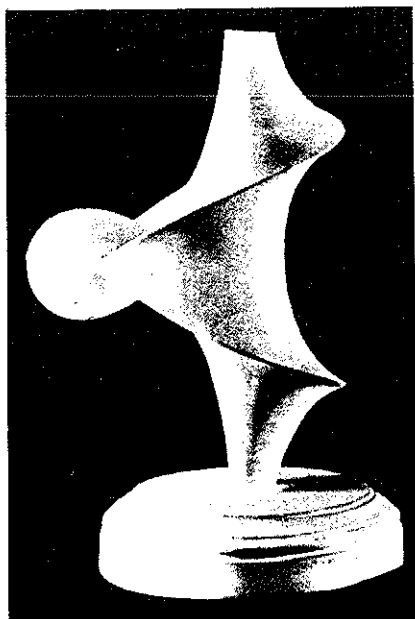
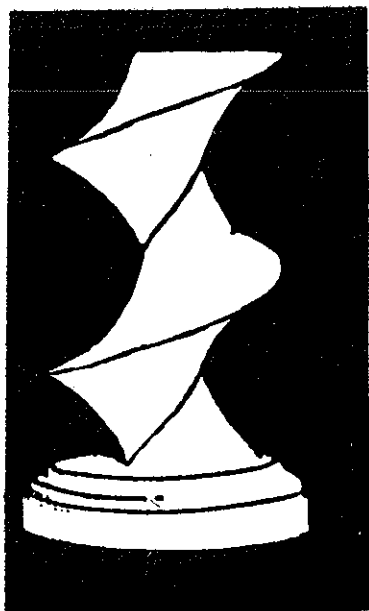


Figura 5: Modelos.

Exemplo 4.3 *Sejam M e M^* as superfícies focais de uma congruência normal obtida a partir de uma certa superfície S como a descrita no parágrafo 1. Definamos*

- a) $v_1 =$ campo de vetores unitário normal à M
- b) $r =$ diferença entre os raios de curvatura principais de S .
- c) $\sigma_p =$ ângulo entre os vetores normais de M e M^* em pontos correspondentes da congruência.

Prova-se facilmente que em uma congruência normal como a descrita no parágrafo 1 a reta que liga o ponto $p \in M$ ao ponto $p^ \in M^*$ é tangente à ambas superfícies. Nestes pontos os vetores normais à M e M^* são sempre perpendiculares entre si. Portanto $\sigma \equiv \pi/2$. Se admitirmos que a diferença entre os raios de curvatura principais de S é constante, então a situação apresentada acima nos fornece exemplos de superfícies M e M^* satisfazendo as condições do teorema de Bäcklund, i. é., nos fornece exemplos de congruências pseudoesféricas.*

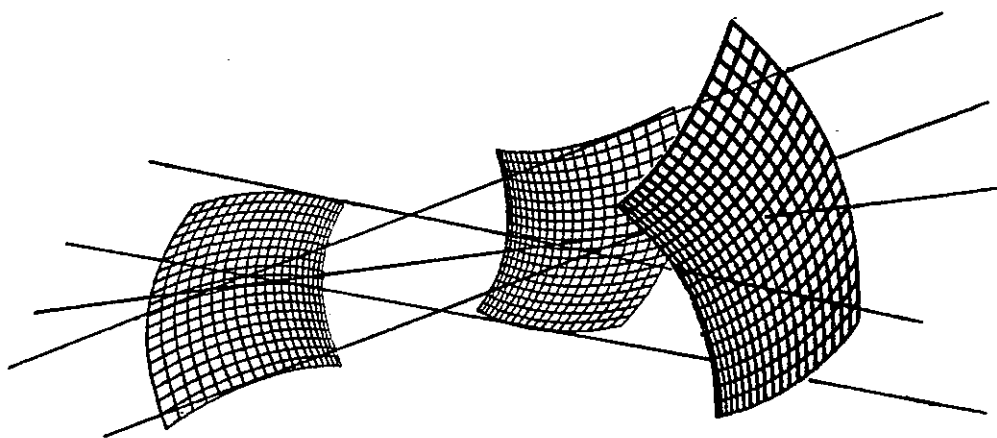


Figura 6: Congruência normal com $(k_1^{-1} - k_2^{-1})$ constante

5 Observações finais

Sejam M_1 e M_2 superfícies pseudoesféricas obtidas a partir de M através de transformações B_{σ_1} , B_{σ_2} . Existe então uma quarta superfície pseudoesférica M_3 obtida de M_1 e M_2 por transformações \tilde{B}_{σ_1} , \tilde{B}_{σ_2} . Isto significa que:

$$\tilde{B}_{\sigma_2} B_{\sigma_1} = \tilde{B}_{\sigma_1} B_{\sigma_2}.$$

Por um abuso de notação omitiremos o "til" e enunciaremos o resultado acima como:

Teorema 5.1 (*Teorema de Permutabilidade de Bianchi*):

$$B_{\sigma_2} B_{\sigma_1} = B_{\sigma_1} B_{\sigma_2}.$$

Prova. Veja as fontes indicadas na bibliografia. Apenas mencionaremos que se Ψ_i^* , $i = 1, 2$ determinam as direções das tangentes comuns de M e $B_{\sigma_i}M$ e se Ψ_3^* é a função equivalente para $B_{\sigma_2}B_{\sigma_1}M$ tem-se então que:

$$\tan \frac{\Psi_3^* - \Psi}{2} = \frac{\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1}{\cos(\sigma_2 - \sigma_1) - 1} \tan \frac{\Psi_2^* - \Psi_1^*}{2}.$$

Observação 3 *A expressão acima é a chamada "Fórmula de Superposição de Bianchi".*

6 APÊNDICE

No parágrafo 3, ao tratarmos de superfície M com curvatura constante $K < 0$, fizemos a suposição adicional de que as 1-formas ω'_s satisfaziam as equações (3.5) e (3.6). Para provarmos este fato assumiremos (Cf. [S]) que M é dada localmente por uma parametrização $f(s, t)$ onde as curvas coordenadas sejam sempre linhas de curvatura. Como anteriormente denotaremos por v_3 o campo normal unitário e definiremos

$$\begin{cases} e_1 = f_s/|f_s| \\ e_2 = f_t/|f_t| \\ e_3 = v_3. \end{cases} \quad (6.1)$$

Denotaremos por $\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta}$ as 1-formas duais e de conexões associadas com o referencial $\{e_\alpha\}$. Obviamente

$$\begin{cases} \omega_1 = A ds \\ \omega_2 = C dt. \end{cases} \quad (6.2)$$

Aqui $A = |f_s|$ e $C = |f_t|$. Desde que f_s, f_t são sempre direções principais, podemos escrever:

$$\begin{cases} \omega_{13} = A k_1 ds \\ \omega_{23} = C k_2 dt. \end{cases} \quad (6.3)$$

Sabemos das equações de Codazzi que $d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$. Estas equações fornecem:

$$(A k_1)_t = k_2 A_t, \quad (C k_2)_s = k_1 C_s.$$

Como $K < 0$ podemos escrever $k_1 = \sqrt{-K} \cot \Psi, k_2 = -\sqrt{-K} \tan \Psi$, para certa função Ψ . Segue-se então que:

$$\frac{A_t}{A} = -\frac{(k_1)_t}{k_1 - k_2} = \Psi_t \cot \Psi$$

$$\frac{C_s}{C} = -\frac{(k_2)_s}{k_2 - k_1} = -\Psi_s \tan \Psi.$$

Existem então funções $A_1^*(s), C_1^*(t)$ tais que

$$\ln(A/\sin \Psi) = A_1^*(s)$$

$$\ln(C/\cos \Psi) = C_1^*(t).$$

Portanto

$$A = A_1(s) \sin \Psi, \quad C = C_1 \cos \Psi.$$

Desde que as funções A_1 e C_1 são sempre positivas podemos fazer uma mudança de coordenadas separadamente. Para isto definamos

$$u = \int_{s_0}^s A_1(s) ds, \quad v = \int_{t_0}^t C_1(t) dt.$$

Vê-se facilmente que

$$e_1 = X_u/|X_u|$$

$$e_2 = X_v/|X_v|.$$

Por definição de (u, v) temos que $du = A_1(s)ds$ e $dv = C_1(t)dt$. Um simples cálculo mostra que as 1-formas $\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta}$ satisfazem as equações (3.5) e (3.6).

Observação 4 *A função Ψ obtida acima é o ângulo entre uma direção assintótica e as curvas $X(u_0, v)$. De fato,*

$$\begin{aligned} II(\sin \Psi e_1 + \cos \Psi e_2) &= k_1 \sin^2 \Psi + k_2 \cos^2 \Psi \\ &= \sqrt{-K} (\cot \Psi \sin^2 \Psi + \tan \Psi \cos^2 \Psi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Referências

- [A] S. C. de Almeida, Notas sobre transformações de superfícies $S \subset R^3$ com curvatura Gaussiana constante negativa. Monografias de Matematica da UFC, (1980)
- [Ba] A. V. Bäcklund, Concerning Surfaces with Constant Negative Curvature, (traduzido por E. M. Coddington), New Era Printing Co., Lancaster, Pa., (1905).
- [B] L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1899.
- [C] S. S. Chern, C. L. Terng, An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry, Rocky Mountain J. Math., 10, 105-124 (1980).
- [D] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. III., Chelsea Publishing Company (1972)
- [dC] Manfredo do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall Inc., 1976
- [DEGM] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, Inc., 1982.

- [F] G. Fischer, *Mathematische Modelle*, Braunschweig Wiesbaden Vieweg, 2 vols. (1986).
- [M] R. McLachlan, A gallery of constant-negative-curvature surfaces, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 16, Number 4 (1994).
- [O] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966
- [S] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. III, Boston: Publish or Perish, Inc. (1975).
- [T1] K. Tenenblat, C. L. Terng, Bäcklund theorem for n -dimensional submanifolds of Euclidean $(2n-1)$ -space, *Ann. of Math.*, 111, 477-490 (1980).
- [T2] K. Tenenblat, *Transformações de Superfícies e Aplicações*, 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, (1981).
- [T3] K. Tenenblat, *Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations*, International Congress on Differential Geometry, IMPA, Rio de Janeiro, (1996).
- [W] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company (1971).
- [ZK] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240-243 (1965).

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici
60.455-760 Fortaleza-Ce, Brazil