MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
no.20/21 – junho/dezembro 1996 – pp.46-59

O teorema da função aberta e sua consequência na análise local de funções de classe C^1

Antônio Zumpano

Neste artigo, vamos descrever, analisar e comentar o teorema da aplicação aberta de Banach e sua consequência na análise local das funções de classe C^1*. Apresentaremos uma demonstração onde os conceitos envolvidos podem ser, a nosso ver, melhor discernidos. Acreditamos que uma abordagem via existência de inversa à direita satisfazendo determinada condição simplifica o processo iterativo usado na literatura corrente. Em seguida, daremos uma versão generalizada do teorema do ponto fixo de Banach, que possibilitará a apresentação do teorema da função sobrejetora dentro do contexto da teoria de ponto fixo. A abordagem que faremos é bem diferente das apresentadas nos tratados e nos livros didáticos. Veja, por exemplo, [1], p. 154, [2], p. 378 e [3], (10.1) exercício 8, (10.3) exercício 1.*

O teorema da aplicação aberta ocupa um lugar de destaque dentro da Análise Funcional. Resultados fundamentais como o teorema do gráfico fechado e o teorema da limitação uniforme podem ser dele derivados. Por sua vez, o teorema da função sobrejetora, mesmo que algumas vezes nem seja citado como um teorema fundamental, é a parte essencial do teorema da função inversa e, consequentemente, do teorema da função implícita. Ele mostra, de maneira surpreendente, como propriedades locais podem ser obtidas através da aproximação linear da derivada. Na verdade, a propriedade da transformação linear (a derivada) é localmente herdada pela função não linear; e é principalmente nisso que consiste a análise matemática.

No contexto em que trabalharemos, os espaços vetoriais são de dimensão infinita. Tais espaços surgem naturalmente ao considerarmos espaços de funções ([4], exemplo 16, p. 53). Entretanto, a estrutura de espaço vetorial não é, na maioria das vezes, suficiente para a obtenção de resultados fortes. Para isso, é necessária a inserção de uma estrutura topológica nestes espaços. Ao contrário do caso de dimensão finita, não existe algum isomofismo natural que permita a introdução de uma topologia ([4], teorema 10, p. 107 e teorema 10 e Corolário, pp. 383/4). Ainda mais grave: não é possivel, em muitos exemplos relevantes, introduzir uma topologia gerada por um produto interno (como a tratada por Hoffman e Kunze, [4], Capítulo 8 e seguintes). Trabalharemos com topologias geradas por uma norma ([5], Capítulo 1, exemplo 6), mas salientamos que algumas vezes não é possível proceder assim: é necessário recorrer a estruturas topológicas mais gerais.

Começaremos com um teorema elucidativo para a análise heurística do teorema da aplicação aberta, que discutiremos e enunciaremos em seguida. Dizemos que uma aplicação é aberta quando a imagem de todo conjunto aberto for um conjunto aberto.

Teorema 1 *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $L : X \to Y$ uma aplicação linear. As três afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) L é aberta;

(ii) Existe $r > 0$ tal que $B(0,1) \subset L(B(0,r))$;

(iii) Existem uma função $M : Y \to X$ e uma constante $c > 0$ tais que,

$$\|M(y)\| \leq c\|y\| \text{ e } (L \circ M)(y) = y \text{ para todo } y \in Y.$$

Observação Se L for aberta, evidentemente L é sobrejetora, pois $L(X)$ é um subespaço aberto de Y; portanto $L(X) = Y$. A afirmação (iii) diz que L possui uma inversa à direita que satisfaz $\|M(y)\| \leq c\|y\|$ para todo $y \in Y$, mas M não é necessariamente linear, como veremos mais adiante. Observe que L ser sobrejetora decorre imediatamente também de (iii), pois uma aplicação é sobrejetora se e somente se possui uma inversa à direita.

O teorema da aplicação aberta trata da seguinte questão: uma aplicação linear sobrejetora é aberta? Nesta pergunta, estamos lidando com implicações de conceitos concernentes a estruturas distintas: a estrutura topológica e a estrutura algébrica. O vínculo criado entre essas duas estruturas - quando se exige que as operações algébricas sejam contínuas (consequência imediata da definição de norma; veja, comparativamente, a definição de espaço vetorial topológico em [6]) - implica, como vimos acima, que uma aplicação linear aberta seja sobrejetora. Seria interessante, e também muito importante, obter a recíproca deste resultado, pois conseguiríamos com isso garantir sempre a continuidade da inversa de uma bijeção linear. É claro que não podemos esperar que a recíproca seja verdadeira com esse grau de generalidade, pois estaríamos concluindo que toda bijeção linear é um homeomorfismo linear, o que é falso (veja exemplo 1, abaixo).

Analisemos, entretanto, um caso particular: suponha que o espaço Y tenha dimensão finita e L seja uma aplicação linear sobrejetora. Neste caso, é fácil mostrar que L possui uma inversa à direita que satisfaz a condição (iii), e portanto L é uma aplicação aberta. De fato, seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de Y. Como L é sobrejetora, escolha para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, um vetor u_i em X tal que $L(u_i) = v_i$. Seja $M : Y \to X$ a aplicação linear definida por $M(v_i) = u_i$. A função M assim definida claramente satisfaz a condição (iii) ([5], p. 238).

No caso geral, para conseguir algum resultado nessa direção, precisamos acrescentar algumas hipóteses de caráter topológico e estrutural, como a continuidade da aplicação L e a completeza dos espaços X e Y.

Demonstração do teorema 1:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Suponhamos que L seja aberta. Então, $L(B(0,1))$ é aberto em Y. Como $0 \in L(B(0,1))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, $B(0,\varepsilon) \subset L(B(0,1))$. Pela linearidade de L temos que $B(0,1) \subset L(B(0,r))$, onde $r = 1/\varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $y \in Y$, $y \neq 0$. Como $y/(2\|y\|) \in B(0,1)$, escolha $x \in B(0,r) \subset X$ tal que $L(x) = y/(2\|y\|)$ e defina

$$M(y) = 2\|y\|x, \quad M(0) = 0.$$

A função $M : Y \to X$ assim definida satisfaz (iii) pois,

$$(L \circ M)(y) = L(2\|y\|x) = 2\|y\|L(x) = 2\|y\|\left(\frac{y}{2\|y\|}\right) = y$$

e

$$\|M(y)\| = 2\|y\|.\|x\| \leq 2r\|y\|, \ \forall\, y \in Y.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Decorre de (iii) que,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ B(0, \varepsilon) \subset L(B(0, c\varepsilon)),$$

o que implica que L é aberta: com efeito, dados $x_0 \in X$ e $\delta > 0$, devemos mostrar que $L(B(x_0, \delta))$ é aberto em Y. Para isso, sejam $a \in B(x_0, \delta)$ e $b = L(a) \in L(B(x_0, \delta))$. Mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b, \varepsilon) \subset L(B(x_0, \delta))$.

Se $y \in B(b, \varepsilon)$, então $y - b \in B(0, \varepsilon) \subset L(B(0, c\varepsilon))$. Logo, $y - b = L(x)$ para algum x tal que $\|x\| < c\varepsilon$. Daí, $y = L(x + a)$ e

$$\|x + a - x_0\| \leq \|x\| + \|a - x_0\| < c\varepsilon + \|a - x_0\|.$$

Tomando $\varepsilon = (\delta - \|a - x_0\|)/c$, temos que $x + a \in B(x_0, \delta)$ e portanto $B(b, \varepsilon) \subset L(B(x_0, \delta))$. □

Exemplo 1 Vejamos um exemplo simples de uma bijeção linear descontínua. Seja X um espaço vetorial normado completo de dimensão infinita. Seja $\mathcal{B} \subset X$ uma base de Hamel normal para o espaço X, i.e., $\mathcal{B}$ é um subconjunto maximal de vetores unitários linearmente independente, ou seja, todo elemento de x possui uma representação única como combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$. Como X é completo, o conjunto $\mathcal{B}$ não pode ser enumerável: se fosse, X seria união enumerável de subespaços de dimensão finita, contrariando o teorema de Baire ([6], p. 52).

Note que a cardinalidade de $\mathcal{B}$ pode ser maior que a cardinalidade da reta. Se, no entanto, X for separável, então sua cardinalidade é a do contínuo, pois todo espaço métrico separável pode ser topologicamente imerso no cubo de Hilbert, para o qual existe uma curva de Peano ([5], p. 281).

Portanto, $\mathcal{B}$ contém um subconjunto $\mathcal{B}'$ que está em bijeção com o intervalo $(0, \infty)$. Podemos então indexar os elementos de $\mathcal{B}'$ tendo como conjunto de índices o intervalo $I = (0, \infty)$, ou seja, $\mathcal{B}' = \{e_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Defina uma aplicação linear $L : X \to X$ por

$$L(e_\lambda) = \lambda e_\lambda \qquad \text{e} \qquad L(u) = u \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{B} - \mathcal{B}'.$$

Temos assim, uma aplicação linear sobrejetora que não é aberta, pois sua inversa não é contínua, mesmo sendo o espaço X completo. Na verdade a própria aplicação L também não é contínua.

Exemplo 2 Vamos aproveitar o espaço X do exemplo acima para construir uma bijeção linear contínua que não seja aberta. Defina em X a seguinte norma:

$$\|x\|_1 = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|,$$

onde $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $u_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Temos que,

$$\|x\| = \|\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\| \leq |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = \|x\|_1,$$

para todo $x \in X$, onde $\|\cdot\|$ é a norma original de X. Portanto, a aplicação identidade é uma bijeção linear contínua de $(X, \|\cdot\|_1)$ em $(X, \|\cdot\|)$.

É fácil ver que o espaço $(X, \|\cdot\|_1)$ não é completo, pois a sequência definida por

$$x_n = u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \ldots + \frac{1}{2^n} u_n, \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

é uma sequência de Cauchy que não converge, onde $\{u_n\}_{n \in I\!N} \subset \mathcal{B}$, $u_i \neq u_j$ se $i \neq j$ para todo $i, j \in I\!N$. Decorre daí que a aplicação identidade não é aberta, pois se fosse, teríamos um homeomorfismo linear entre $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|)$, o que seria absurdo, visto que $(X, \|\cdot\|)$ é completo.

Exemplo 3 Um outro exemplo de uma bijeção linear contínua não aberta é o seguinte: seja X o espaço das funções reais de classe C^1 com domínio no intervalo $[0, 1]$, ou seja, $X = C^1([0, 1], I\!R)$. Podemos definir em X duas normas,

$$\|u\|_1 = \max |u(t)| + \max |u'(t)| \qquad \text{e} \qquad \|u\| = \max |u(t)|.$$

A aplicação identidade de $(X, \|\cdot\|_1)$ em $(X, \|\cdot\|)$ é uma bijeção linear contínua, mas não aberta, pois o espaço $(X, \|\cdot\|)$ não é completo.

Estamos prontos, depois de termos visto os três exemplos acima, para enunciar o teorema da aplicação aberta de Banach (compare os exemplos acima com as hipóteses do teorema da aplicação aberta). Lembramos que um espaço de Banach é um espaço vetorial normado que é completo (em relação a sua norma).

Teorema 2 *(Teorema da aplicação aberta de Banach) Sejam X, Y espaços de Banach e $L : X \to Y$ uma aplicação linear contínua e sobrejetora. Então L é uma aplicação aberta.*

Observação Trataremos agora de questões um pouco mais sofisticadas; a leitura desta observação não é necessária para a compreensão do restante do texto. Como veremos na demonstração deste teorema, a hipótese em questão sobre o espaço Y não é exatamente a sua completeza, mas sim o fato de ser da segunda categoria (veja [6], p. 41 para a definição de conjunto magro e de segunda categoria). Mais precisamente, o teorema da aplicação aberta é válido com as seguintes hipóteses mais gerais: X um espaço vetorial normado completo, Y um espaço vetorial normado, $L : X \to Y$ uma aplicação linear contínua e a imagem $L(X)$ de L um subespaço da segunda categoria em Y. O exemplo que daremos em seguida mostra que existem espaços normados de Baire que não são completos.

Exemplo 4 Seja E um espaço normado completo e $\mathcal{B}$ uma base de Hamel em E (veja exemplo 1, acima). Seja $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\} \subset \mathcal{B}$, com $u_i \neq u_j$, se $i \neq j$. Defina $\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \mathcal{U}$ e $E_n = [\mathcal{B}' \cup \{u_1, \ldots, u_n\}]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ onde $[A]$ denota o espaço gerado por A. Vemos que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

donde concluimos que algum E_n é da segunda categoria em E. Aplicando o exercício 31, p. 205 da referência [5], concluímos que E_n é da segunda categoria em si mesmo. É fácil ver que todo espaço vetorial normado da segunda categoria em si mesmo é um espaço de Baire, isto é, satisfaz à seguinte propriedade: seus abertos são da segunda categoria nele. De fato, tome $A \subset E_n$ aberto. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in A$. Concluímos

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} kA,$$

donde obtemos kA (para algum k) e portanto A da segunda categoria em E_n.

Observe que para E_n ser da segunda categoria em E, é necessário que ele seja um subespaço denso; caso contrário seu fecho seria um subespaço próprio e fechado, e portanto com interior vazio. Logo, seria magro em E. Isso mostra que E_n não é completo.

Porém, há subespaços densos que são magros (por exemplo, $L_2 \subset L_1$ é denso em L_1 e também magro em L_1, veja [6]). O espaço $(X, \|\cdot\|)$ do terceiro exemplo acima é magro nele mesmo, pois, pelo teorema da aplicação aberta, se ele fosse da segunda categoria nele mesmo, a aplicação identidade seria um homeomorfismo linear.

Essas hipóteses "aparentemente" mais gerais para o teorema da aplicação aberta podem ser úteis quando não se sabe, a priori, se o espaço Y é completo ou se a aplicação L é sobrejetora. Mas, quando da aplicação do teorema da aplicação aberta, trata-se na verdade de um eufemismo, pois tendo concluido que L é uma aplicação aberta, vimos, no início, que ela é necessariamente sobrejetora, ou seja, $L(X) = Y$. Decorre então que Y é linearmente homeomorfo ao espaço quociente $X/ker(L)$ ([6], p. 47). Portanto, Y é completo, pois o espaço quociente é completo. Para o caso geral deste teorema com espaços vetoriais não normados, veja também [6], p. 47, [7], p. 75 e [8], (12.16.8).

A demonstração do Teorema 2 se baseia no seguinte lema:

Lema 3 *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $L : X \to Y$ uma aplica- ção linear contínua. Suponha que X seja completo e que existam funções $M : Y \to X$, $\varphi : Y \to Y$ e constantes $c > 0$ e λ, $0 < \lambda < 1$ tais que,*

$$\|M(y)\| \leq c\|y\|, \ \|\varphi(y)\| \leq \lambda\|y\| \ e \ (L \circ M)(y) = y - \varphi(y), \quad \forall\, y \in Y.$$

Então L possui uma inversa à direita $\tilde{M}$ tal que

$$\|\tilde{M}(y)\| \leq \frac{c}{1-\lambda}\|y\| \quad \forall\, y \in Y.$$

Observação Podemos dizer que a função M é quase uma inversa à direita de L, pois $L \circ M$ é uma "pequena" perturbação da identidade. A função $\tilde{M}$ satisfaz a condição (iii) do Teorema 1, donde podemos concluir que a aplicação L é aberta e sobrejetora. Uma versão deste lema para espaços métricos pode ser encontrada em [8], (12.16.8.2).

Demonstração do Lema 3:

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$,sendo $\varphi^0(y) = y, \varphi^n(y) = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi(y)$ (n vezes), temos que

$$\|\varphi^n(y)\| \leq \lambda^n \|y\| \ \forall \ y \in Y.$$

Temos então que $\|M\varphi^n(y)\| \leq c\|\varphi^n(y)\| \leq c\lambda^n\|y\|, \ \forall \ y \in Y$.
Defina $\tilde{M} : Y \to X$ por

$$\tilde{M}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} M\varphi^n(y).$$

Como X é completo e $0 < \lambda < 1$, a série é convergente em X e portanto $\tilde{M}$ está bem definida. Além disso,

$$\|\tilde{M}(y)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\varphi^n(y)\| \leq c\|y\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{c}{1-\lambda}\|y\|$$

e

$$(L \circ \tilde{M})(y) = \sum_{n=0}^{\infty} LM\varphi^n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi^n(y) - \varphi^{n+1}(y)) = y,$$

pois L é linear e contínua e $\varphi^n(y) \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo $y \in Y$. Logo, $\tilde{M}$ é uma inversa à direita de L e satisfaz à condição do lema. □

Demonstração do Teorema 2:

Como L é sobrejetora,

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B(0, n)).$$

Temos ainda que Y é completo e portanto, pelo teorema de Baire, Y é da segunda categoria nele mesmo. Isso implica que $int(\overline{L(B(0, n))}) \neq \emptyset$ para algum $n \in I\!N$. Seja $b \in int(\overline{L(B(0, n))})$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $B(b, \varepsilon) \subset \overline{L(B(0, n))}$. Afirmamos que $B(0, 1) \subset \overline{L(B(0, r))}$ onde $r = 2n/\varepsilon$. Com efeito, seja $y \in B(0, 1)$; então $\varepsilon y + b \in B(b, \varepsilon)$. Como $B(b, \varepsilon)$ está contida no fecho de $L(B(0, n))$, isso implica que existem sequências (x_k) e (a_k) contidas em $B(0, n)$ tais que, $L(x_k) \to \varepsilon y + b$ e $L(a_k) \to b$.

Pela linearidade de L, temos que $L(\varepsilon^{-1}(x_k - a_k)) \to y$. Como $\varepsilon^{-1}(x_k - a_k) \in B(0,r)$, concluimos que $y \in \overline{L(B(0,r))}$, ou seja, $B(0,1) \subset \overline{L(B(0,r))}$.

Seja agora $y \in Y, y \neq 0$. Como $y/(2\|y\|) \in B(0,1)$, escolha $x \in B(0,r)$ tal que $\|y/(2\|y\|) - L(x)\| < 1/4$ e defina $M : Y \to X$ e $\varphi : Y \to Y$ por

$$M(y) = 2\|y\|x, \ M(0) = 0, \qquad \varphi(y) = y - (L \circ M)(y).$$

Temos então que, $(L \circ M)(y) = y - \varphi(y)$, $\|M(y)\| = 2\|y\|.\|x\| \leq 2r\|y\|$ e

$$\begin{aligned} \|\varphi(y)\| &= \|y - (L \circ M)(y)\| \\ &= \left\| y - (2\|y\|)L(x) \right\| \\ &= 2\|y\| \left\| \frac{y}{2\|y\|} - L(x) \right\| \leq \frac{1}{2}\|y\| \end{aligned}$$

para todo $y \in Y$.

Pelo Lema 1 concluimos que L é uma aplicação aberta. □

Examinaremos a seguir uma consequência do teorema da aplicação aberta na análise local das funções de classe C^1. Demonstraremos o teorema da função sobrejetora citado no início do artigo usando o teorema do ponto fixo de Banach, que apresentaremos em uma forma que generaliza suas versões habituais. Isso facilita muito a demonstração, além de inserir o processo iterativo usado nas referências [1] e [2] em um princípio geral de ponto fixo. Apesar de se tratar de uma generalização natural do teorema do ponto fixo de Banach, não conseguimos encontrá-la na literatura. O leitor pode consultar a referência [9], onde grande parte dos teoremas de ponto fixo existentes são apresentados.

Seja (X, d) um espaço métrico. Definimos, em 2^X (o conjunto de todos os subconjuntos de X), uma relação binária ρ chamada distância de Hausdorff, a saber, $\rho(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}$. Evidentemente estamos excluindo o conjunto vazio. Porém não excluimos a possibilidade $\rho(A, B) = \infty$. As propriedades dessa relação que usaremos no teorema são óbvias e, tendo em vista o propósito deste artigo, não nos interessa analisá-las ou comentá-las. Veja referência [1], p. 41.

Lema 4 *(Teorema do ponto fixo de Banach) Sejam X um espaço métrico completo e $T : B[x_0, r] \to 2^X$ uma função plurívoca (para cada $x \in B[x_0, r]$, Tx é um subconjunto não vazio de X), onde $B[x_0, r]$ é a bola fechada de centro x_0 e raio $r > 0$ contida em X. Suponha que*

(i) $\rho(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)\ \forall x, y \in B[x_o, r], 0 < \lambda < 1$;

(ii) $d(x_0, Tx_0) < (1 - \lambda)r$.

Então existe $x^* \in B[x_0, r]$ tal que $x^* \in \overline{Tx^*}$.

Demonstração:

Como $d(x_0, Tx_0) < (1 - \lambda)r$, existe $x_1 \in Tx_0$ tal que $d(x_1, x_0) < (1 - \lambda)r$. Temos

$$d(x_1, Tx_1) \leq \rho(Tx_0, Tx_1) \leq \lambda d(x_0, x_1) < \lambda(1 - \lambda)r.$$

Seja $x_2 \in Tx_1$ tal que $d(x_2, x_1) < \lambda(1 - \lambda)r$. Isto implica que

$$d(x_2, Tx_2) \leq \rho(Tx_1, Tx_2) \leq \lambda d(x_1, x_2) < \lambda^2(1 - \lambda)r.$$

Indutivamente, seja $x_n \in Tx_{n-1}$ tal que $d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^{n-1}(1 - \lambda)r$. Daí

$$d(x_n, Tx_n) \leq \rho(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) < \lambda^n(1 - \lambda)r.$$

Escolha $x_{n+1} \in Tx_n$ tal que $d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n(1 - \lambda)r$. Temos assim uma sequência (x_n) em que

$$d(x_n, x_0) < (\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda^2 + \lambda + 1)(1 - \lambda)r < r.$$

Segue-se que $x_n \in B(x_0, r)\ \forall n$, e como $d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n(1 - \lambda)r\ \forall n$, então (x_n) é de Cauchy. Logo, $x_n \to x^* \in B[x_0, r]$. Temos,

$$d(x_{n+1}, Tx^*) \leq \rho(Tx_n, Tx^*) \leq \lambda d(x_n, x^*)$$

e $d(x_{n+1}, Tx^*) \to d(x^*, Tx^*)$. Portanto, $d(x^*, Tx^*) = 0$ e isso implica que $x^* \in \overline{Tx^*}$. □

Observação O lema continua válido tendo como hipótese a bola aberta $B(x_0, r)$; basta escolher $r' < r$ tal que

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \lambda)r' < (1 - \lambda)r$$

e trabalhar com a bola fechada $B[x_0, r']$. Se Tx for um subconjunto unitário para todo $x \in B(x_0, r)$, temos uma função unívoca $T : B(x_0, r) \to X$ que satisfaz:

$$d(Tx, Ty) = \rho(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \forall x, y \in B(x_0, r)$$

e

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \lambda)r.$$

Essas são precisamente as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach ([3], (10.1.2); [1], p. 39 e [5], p. 199).

Agora estamos em condições de demonstrar o teorema da função sobrejetora. Compare com a demonstração dada em [2], p. 378 e [1], p. 154. Até o presente momento, de acordo com a literatura, supunha-se que o processo iterativo usado na demonstração do teorema da função sobrejetora não estivesse relacionado com o Teorema do ponto fixo de Banach (veja [1], início da seção 15.3; lá, o teorema da função sobrejetora é chamado teorema da aplicação aberta).

Teorema 5 *(Teorema da função sobrejetora) Sejam X, Y espaços de Banach e $f : \Omega \to Y$ uma função de classe C^1, onde Ω é um aberto de X. Suponha que, para algum $a \in \Omega$, $f'(a)$ seja uma aplicação linear sobrejetora. Então, existe uma vizinhança aberta V de $f(a)$ tal que, $f(a) \in V \subset f(\Omega)$.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor $f(0) = 0$ e $L \equiv f'(0)$ sobrejetora. (Lembramos que a derivada é, por definição, uma aplicação linear contínua.)

Defina uma função auxiliar $h(x) = f(x) - L(x)$. Temos, h é de classe C^1 e $h(0) = h'(0) = 0$. Mostraremos que existe $\alpha > 0$ tal que $B(0, \alpha) \subset f(\Omega)$. Seja $y \in B(0, \alpha)$. Queremos provar que existe $x \in \Omega$ tal que $y - h(x) = L(x)$, pois $L(x) + h(x) = f(x)$. Seja então $\tilde{L} : X/ker(L) \to Y$ definida por

$$\tilde{L}([x]) = L(x), \text{ onde } [x] = x + ker(L).$$

A aplicação linear $\tilde{L}$ é uma bijeção contínua entre dois espaços de Banach. A norma do espaço quociente é definida por

$$\|[x]\| = d(x, ker(L)) = inf\{\|x - u\|; u \in ker(L)\}.$$

([6], p. 30 ou [1], p. 51.) Pelo teorema da aplicação aberta temos então que a inversa $\tilde{L}^{-1}$ é contínua.

Defina $T : X \to 2^X$ por

$$Tx = \tilde{L}^{-1}(y - h(x)).$$

Observe agora que, se $x \in Tx = \overline{Tx}$, então $[x] = \tilde{L}^{-1}(y - h(x))$, donde $L(x) = \tilde{L}([x]) = y - h(x)$, ou seja, $f(x) = y$. O que temos que fazer é, portanto, verificar se a função T satisfaz as hipóteses do Lema 4. Vejamos: como h é C^1 e $h'(0) = 0$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\| h'(\xi) \| < \varepsilon$ para todo $\xi \in B[0, \delta]$. Pela desigualdade do valor médio,

$$\|h(x) - h(z)\| \leq \|h'(\xi)\|.\|x - z\| \leq \varepsilon\|x - z\| \ \forall\ x,\ z \in B[0, \delta].$$

Daí,

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Tz) &= \|\tilde{L}^{-1}(y - h(x)) - \tilde{L}^{-1}(y - h(z))\| \\ &\leq c\|h(x) - h(z)\| \\ &\leq c\varepsilon\|x - z\|, \ \forall\ x,\ z \in B[0, \delta]. \end{aligned}$$

Ainda,

$$d(0, T(0)) = \|\tilde{L}^{-1}(y - h(0))\| = \|\tilde{L}^{-1}(y)\| \leq c\|y\| < c\alpha.$$

Temos portanto o resultado se escolhermos adequadamente ε e α, por exemplo, $\varepsilon = 1/(2c)$ e $\alpha = \delta/(2c)$. □

Se soubermos, a priori, que a aplicação L possui uma inversa à direita M linear e contínua, a demonstração pode ser feita de maneira bem mais simples. Definimos $Tx = M(y - h(x))$ e com escolha adequada de ε e α, T é uma contração de $B[x_0, \delta]$ em $B[x_0, \delta]$. Com isso, T possui um único ponto fixo em $B[x_0, \delta]$ o qual satisfaz $f(x) = y$. Por exemplo, se a dimensão de Y for finita, vimos no início do artigo que L possui uma inversa à direita linear contínua. Demonstraremos a seguir um teorema que fornece condição necessária e suficiente para que L possua tal inversa.

Teorema 6 *Sejam X, Y espaços de Banach e $L : X \to Y$ uma aplicação linear contínua e sobrejetora. Então, L possui uma inversa à direita linear contínua se e somente se existir um subespaço fechado Z de X tal que $X = ker(L) \bigoplus Z$.*

Demonstração:

Suponha que exista $M : Y \to X$ linear contínua tal que $(L \circ M)(y) = y \ \forall\, y \in Y$. Seja $Z = M(Y)$. O subespaço Z é fechado em X, pois se (z_n) for uma sequência em Z com $z_n \to z$ temos,

$$L(z_n) \to L(z) \text{ e } M(L(z_n)) \to M(L(z)).$$

Mas, $z_n = M(y_n), y_n \in Y$. Isso implica que $M(L(z_n)) = z_n$. Logo, $z = M(L(z)) \in Z$.

Se $x \in X, x = x - M(L(x)) + M(L(x))$. Como

$$x - M(L(x)) \in ker(L) \text{ e } M(L(x)) \in Z,$$

segue-se que $X = ker(L) + Z$.

Ainda, se $L(x) = 0$ e $x = M(y)$ para algum $y \in Y$, então $0 = L(x) = L(M(y)) = y$ e $x = M(y) = M(0) = 0$. Portanto, $X = ker(L) \bigoplus Z$.

Reciprocamente, supondo que $X = ker(L) \bigoplus Z$, defina $S : Z \to Y$ como sendo a restrição da aplicação L ao subespaço Z. Como L é sobrejetora e contínua, S é uma bijeção linear contínua entre dois espaços completos. Logo, pelo teorema da aplicação aberta de Banach, temos que S é um homeomorfismo linear. Defina então $M : Y \to X$ por $M(y) = S^{-1}(y)$ e o resultado segue-se. $\square$

Nem sempre podemos garantir a existência de um complementar topológico Z para o núcleo de L ([6], p. 125), mas em alguns casos sim. Se a dimensão do $ker(L)$ for finita, existe um complementar topológico para $ker(L)$, ([6], p.100). Se X for um espaço de Hilbert (veja [10] para a definição e propriedades), o complementar ortogonal do $ker(L)$ é um complementar topológico ([10], p. 80). Vimos, também, no início, que se a dimensão de Y for finita, L possui uma inversa à direita linear contínua, portanto, seu núcleo possui um complementar topológico. Pelo resultado do Teorema 6, vemos que uma inversa à direita satisfazendo a condição (iii) do Teorema 1 não é necessariamente linear.

Referências

[1] **Deimling, K.** *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.

[2] **Bartle, R. G.** *The Elements of Real Analysis,* John Wiley & Sons, New York, second edition, 1976.

[3] **Dieudonné, J.** *Eléments D' analyse, Tome I, Fondements de l' analyse moderne,* Gauthier-Villars, Paris, 3^e^ édition, 1979.

[4] **Hoffman, K.** e **Kunze, R.** *Álgebra Linear,* Livro Técnico e Científico, 2a. edição, 1979.

[5] **Lima, E. L.** *Espaços Métricos,* Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1977.

[6] **Rudin, W.** *Functional Analysis,* Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1974.

[7] **Yosida, K.** *Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, sixth edition, 1980.

[8] **Dieudonné, J.** *Eléments d' analyse, Tome II,* Gauthier-Villars, Paris, 3^e^ edition, 1982.

[9] **Bose, R. K.** e **Joshi, M. C.** *Some Topics in Nonlinear Functional Analysis, Wiley Eastern Limited,* New Delhi, 1985.

[10] **Rudin, W.** *Real And Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 3rd. Edition, 1987.

Zumpano, Antônio
Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Caixa Postal: 702
30.161-970 Belo Horizonte - MG
Brasil
Fax: (031) 448 5797
e-mail: zumpano@mat.ufmg.br