

## Formas diferenciais e o grupo fundamental

Nicolau C. Saldanha

Seja  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ; neste artigo mostramos como relacionar o espaço das 1-formas fechadas com o grupo fundamental de  $A$ . Mais precisamente, seja  $Z^1(A)$  o espaço das 1-formas fechadas (i.e., com derivada nula) e  $B^1(A) \subseteq Z^1(A)$  o sub-espaço das 1-formas exatas (i.e., que são derivadas de alguma 0-forma). Lembramos que 0-formas sobre  $A$  são funções de  $A$  em  $\mathbb{R}$  e 1-formas podem ser identificadas com campos de vetores via o produto interno usual. Com esta identificação,  $B^1$  é o espaço dos gradientes de funções e  $Z^1$  é o espaço dos campos de vetores que são localmente gradientes de alguma função. Definimos  $H_{\text{dR}}^1(A) = Z^1(A)/B^1(A)$ ; este espaço é conhecido como o primeiro espaço de cohomologia de de Rham de  $A$  (veja [1] para uma discussão detalhada da cohomologia de de Rham). Demonstraremos que  $H_{\text{dR}}^1(A) = \text{Hom}(\pi_1(A), \mathbb{R})$ .

Esta relação é bem conhecida, mas em geral é apresentada como consequência de outros teoremas muito mais gerais e poderosos, como o teorema de de Rham, o teorema de Hurewicz, o teorema dos coeficientes universais ou a definição de  $H^1(A)$  em termos de funções de  $A$  em  $\mathbb{S}^1$ . Nossa demonstração supõe apenas a definição de de Rham para  $H^1(A)$  os fatos básicos sobre grupo fundamental e espaços de recobrimento (como em [5] ou [6]) e a existência de partições suaves da unidade (como em [3] ou [4]). O leitor que conhecer a definição de variedade perceberá que pode facilmente substituir  $A$  por uma variedade qualquer.

O aberto  $A$  admite um recobrimento universal  $\tilde{A}$ . Seja  $p: \tilde{A} \rightarrow A$  a aplicação de recobrimento, e sejam  $y_0 \in \tilde{A}$  e  $x_0 = p(y_0) \in A$  pontos base para  $\tilde{A}$  e  $A$ . O grupo fundamental  $\pi_1(A, x_0)$  admite pelo menos as três seguintes interpretações:

- (a) o conjunto dos caminhos fechados em  $A$  com extremos iguais a  $x_0$ , identificando caminhos homotópicos;
- (b) o conjunto das imagens inversas de  $x_0$  por  $p$  (identificamos aqui  $y_0$  com  $e$ );
- (c) o conjunto das transformações de recobrimento de  $\tilde{A}$ , isto é, o conjunto das funções contínuas  $G$  de  $\tilde{A}$  em  $\tilde{A}$  satisfazendo  $p \circ G = p$ .

Vamos supor que o leitor esteja familiarizado com estas interpretações de  $\pi_1$ . Um aberto  $U \subseteq A$  é dito *distinguido* se a restrição de  $p$  a uma componente conexa  $\tilde{U}$  de  $p^{-1}(U)$  é um homeomorfismo entre  $\tilde{U}$  e  $U$ . Pela definição de espaço de recobrimento,  $A$  é coberto por abertos distinguidos. Podemos tomar uma cobertura localmente finita de  $A$  por abertos distinguidos:  $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  (isto é, para cada ponto  $x \in A$  existe uma vizinhança de  $x$  que tem intersecção não vazia com apenas um número finito de  $U_\lambda$ 's; a existência de uma cobertura localmente finita segue da paracompacidade de  $A$  (veja [2] para a definição de paracompacidade)). Tomemos agora uma partição suave da unidade subordinada a esta cobertura, ou seja, uma família de funções  $C^\infty$ ,  $h_\lambda : A \rightarrow [0, 1]$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , satisfazendo  $\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda = 1$  com o suporte de  $h_\lambda$  contido em  $U_\lambda$  (veja [3] ou [4] para a demonstração de que existe esta partição da unidade). Isto conclui a lista dos pré-requisistos.

Vamos construir a aplicação natural de  $H^1$  para  $\text{Hom}(\pi_1(A, x_0), \mathbb{R})$ . Suponha dada uma 1-forma fechada  $\omega \in Z^1(A)$  e um elemento  $g$  de  $\pi_1(A, x_0)$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  um representante suave de  $g$ ; associamos a  $\omega$  e a  $g$  o valor da integral

$$\int_{[0,1]} \gamma^* \omega;$$

pelo teorema de Stokes é fácil verificar que este número independe da escolha de  $\gamma$ . A verificação de que esta aplicação define um homomorfismo de  $H^1$  para  $\text{Hom}(\pi_1, \mathbb{R})$  é trivial (detalhes a cargo do leitor); devemos verificar que ela é injetora e sobrejetora.

Seja  $\omega$  uma forma que induz o homomorfismo nulo de  $\pi_1$  para  $\mathbb{R}$ : isto significa que a integral da forma sobre qualquer caminho fechado é sempre zero. Ou seja, podemos integrar a forma  $\omega$  obtendo uma função  $v$  com  $dv = \omega$ , ou seja,  $\omega$  é exata. Assim, nossa aplicação é injetora.

Seja  $\phi$  um homomorfismo de  $\pi_1$  em  $\mathbb{R}$ . Vamos construir uma forma  $\omega$  que seja levada em  $\phi$ . As componentes conexas das imagens inversas dos abertos  $U_\lambda$  formam uma cobertura localmente finita de  $\tilde{A}$ ; chamemos esta cobertura de  $\tilde{U}_{\lambda,g}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $g \in \pi_1(A, x_0)$ . O segundo índice funciona da seguinte forma: escolhemos arbitrariamente uma componente conexa de  $p^{-1}(U_\lambda)$  e chamamos este aberto de  $\tilde{U}_{\lambda,e}$ ; dado  $g \in \pi_1(A)$ , seja  $G$  a transformação de recobrimento correspondente a  $g$ : definimos  $\tilde{U}_{\lambda,g}$  como  $G(\tilde{U}_{\lambda,e})$ . Seja  $\tilde{h}_{\lambda,g}$  a função com suporte contido em  $\tilde{U}_{\lambda,g}$  satisfazendo

$$\tilde{h}_{\lambda,g}|_{\tilde{U}_{\lambda,g}} = (h_\lambda \circ p)|_{\tilde{U}_{\lambda,g}};$$

ou seja, decompomos a função  $h_\lambda \circ p$  como uma soma de funções com suportes contidos nas componentes conexas de  $p^{-1}(U_\lambda)$ . Definimos agora uma função suave  $u$  de  $\tilde{A}$  em  $\mathbb{R}$  por

$$u = \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda,g};$$

como nossa cobertura é localmente finita, localmente a "série" reduz-se a uma soma finita, garantindo tanto a convergência quanto a suavidade. Afirmamos que a 1-forma  $\omega$  desejada é definida por  $p^*\omega = du$ .

Seja  $G_i : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  a transformação de recobrimento correspondente a  $g_i \in \pi_1(A)$ . Observe que  $G_1(\tilde{U}_{\lambda,g_2}) = (G_1 \circ G_2)(\tilde{U}_{\lambda,e}) = \tilde{U}_{\lambda,g_1g_2}$  e  $h_{\lambda,g_1g_2} \circ G_1 = h_{\lambda,g_2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} u \circ G_1 &= \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda, g_1^{-1}g} = \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g_1g) \tilde{h}_{\lambda,g} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} (\phi(g_1) + \phi(g)) \tilde{h}_{\lambda,g} \\ &= \phi(g_1) + \sum_{\lambda \in \Lambda, g \in \pi_1} \phi(g) \tilde{h}_{\lambda,g} = \phi(g_1) + u. \end{aligned}$$

Portanto,  $G^*du = du$  para qualquer transformação de recobrimento  $G$ , ou seja, existe uma 1-forma fechada  $\omega$  em  $A$  com  $p^*\omega = du$ . Finalmente, se  $\gamma$  é um caminho representando  $g$ ,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \gamma^*\omega &= \int_{[0,1]} \tilde{\gamma}^*du \\ &= u(\tilde{\gamma}(1)) - u(\tilde{\gamma}(0)) \\ &= u(G(y_0)) - u(y_0) = \phi(g), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$  e  $G$  é a transformação de recobrimento correspondente a  $g$ , o que mostra que  $\omega$  de fato está associada a  $\phi$ , e conclui a demonstração.

*Agradecimentos:* Gostaria de agradecer a Elon Lages Lima por me incentivar a escrever este artigo.

## Referências

- [1] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag (GTM 82), New York 1982
- [2] J. L. Kelley, *General Topology*, Second printing, Springer-Verlag (GTM 27), New York 1985
- [3] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Third edition, Springer-Verlag (GTM 142), New York 1993
- [4] E. L. Lima, *Curso de Análise, vol. 2*, 4<sup>a</sup> ed., Projeto Euclides, IMPA, CNPq 1995
- [5] ———, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq 1993
- [6] W. M. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Corrected eighth printing, Springer-Verlag (GTM 56), New York 1989

Departamento de Matemática  
PUC-Rio  
Rua Marquês de São Vicente 225  
Gávea  
Rio de Janeiro, RJ 22453-900  
BRASIL

email: nicolau@mat.puc-rio.br