MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº. 22/23 – junho/dezembro 1997 – pp.30-41

Uma caracterização de polinômios

Nikolai Goussevskii e Antônio Zumpano

1 Introdução

O propósito deste artigo é estender um resultado clássico, válido para funções analíticas, ao conjunto das funções de classe C^∞.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio, isto é,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}.$$

É claro então que f é de classe C^∞ e a derivada $f^{[n+1]}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, decorre facilmente da fórmula de Taylor que, dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que, para algum $n \in I\!N$, tenhamos $f^{[n]}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é um polinômio. Temos portanto o seguinte fato elementar: uma função f de classe C^∞ é um polinômio se e somente se existir um inteiro positivo n tal que $f^{[n]}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Uma generalização deste fato encontra-se no problema proposto 17 da revista *Matemática Universitária* número 7 e sua solução no número seguinte.

Não é difícil mostrar um resultado ainda mais geral. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ exista $n = n(x) \in I\!N$ tal que $f^{[n]}(x) = 0$. Se existir algum $n_0 \in I\!N$ tal que $n(x) \leq n_0$ para todo $n(x)$, então f é um polinômio.

Se supusermos f analítica, como se sabe, é fácil provar que a hipótese de $n(x)$ ser limitado não é necessária para concluirmos que f é um polinômio.

Nosso objetivo é mostrar que esta condição mais fraca é também suficiente para que uma função de classe C^∞ seja um polinômio. Mostraremos ainda a versão deste resultado para funções de várias variáveis reais e para funções definidas em subconjuntos abertos e conexos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$.

O principal resultado deste artigo é, portanto, o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ exista $n = n(x)$ tal que $f^{[n]}(x) = 0$. Então, f é um polinômio.*

A demonstração deste teorema depende fortemente de estruturas topológicas bem sofisticadas dos números reais, em contraste com o caso analítico, onde a representação polinomial dessas funções tem uma ação amenizadora quanto à dependência topológica.

Corolário 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que f não seja um polinômio. Então, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^{[n]}(x) \neq 0$ para todo $n \in I\!N$.*

Mostraremos no final do artigo que se f não for um polinômio, então o conjunto dos pontos onde todas as derivadas são diferentes de zero é bastante maciço, na verdade, é um conjunto da segunda categoria em $\mathbb{R}$.

A versão para funções de várias variáveis é a seguinte:

Teorema 1.2 *Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que, para todo $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, existam $n_i = n_i(x) \in I\!N$ $(1 \leq i \leq k)$ tais que*

$$\frac{\partial^{n_i} f}{\partial x_i^{n_i}}(x) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq k.$$

Então, f é um polinômio nas variáveis $x_1, \dots, x_k$.

É importante ressaltar que, também neste caso de várias variáveis, se a função for analítica e satisfizer as hipóteses do Teorema 1.2, decorre facilmente do princípio de continuação analítica, que f é necessariamente um polinômio nas várias variáveis.

Para o estudo das principais propriedades das funções de várias variáveis reais recomendamos [1]-[5].

Com a finalidade de tornar o principal resultado deste artigo acessível aos estudantes que completaram um primeiro curso de análise, daremos as demostrações de alguns fatos que consideramos pertinentes a este propósito, tentando tornar, assim, o artigo o mais auto-suficiente possível em sua parte principal, que é o Teorema 1.1.

2 Preliminares

2.1 Topologia da Reta

Vamos relembrar aqui algumas definições e propriedades concernentes à topologia da reta.

2.1.1 Subconjuntos Abertos e Fechados

Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *aberto* se para todo $a \in A$ existir um $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$.

Definimos subconjuntos fechados a partir dos abertos, ou seja, um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é *fechado* quando seu complementar $\mathbb{R} \backslash F$ for aberto.

Decorre imediatamente da definição que

(i) a união de uma família qualquer de abertos é um aberto,

(ii) a interseção de uma família finita de abertos é um aberto,

(iii) a união de uma família finita de fechados é um fechado,

(iv) a interseção de uma família qualquer de fechados é um fechado.

Repare que o subconjunto vazio $\emptyset$ é simultaneamente aberto e fechado, o mesmo ocorrendo com o espaço inteiro $\mathbb{R}$.

Podemos caracterizar os subconjuntos fechados em termos de sequências: um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se e somente se F contiver todos os pontos que são limites de sequências em F, isto é, se x_n for uma sequência com $x_n \in F$ para todo $n \in I\!N$ e $x_n \to x$, então $x \in F$.

2.1.2 Subconjuntos Densos e Interior de um Conjunto

Dizemos que um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ é *denso* em $\mathbb{R}$ se, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, tivermos

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap D \neq \emptyset.$$

Os conjuntos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dos números racionais e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos irracionais são exemplos de subconjuntos densos em $\mathbb{R}$.

Podemos também caracterizar os subconjuntos densos através de sequências: um subconjunto $D \subset I\!R$ é denso se, e somente se, todo ponto $x \in \mathbb{R}$ for limite de alguma sequência x_n em D, isto é,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, x_n \in D : \ x_n \to x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

A partir desta caracterização prova-se facilmente que, dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anula em um subconjunto denso D, então f é identicamente nula.

Seja $M \subset \mathbb{R}$ um subconjunto. Definimos então o *conjunto interior* de M, denotado por $intM$, da seguinte maneira:

$$x \in intM \quad \text{se, e somente se, existir} \quad \epsilon > 0 \quad \text{tal que } (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset M.$$

Vemos claramente que o interior de qualquer subconjunto é aberto. Ainda, $intM = \emptyset$ se e somente se $\mathbb{R} \setminus M$ for um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

2.1.3 Subconjuntos da Primeira e Segunda Categorias

Dizemos que um subconjunto M é da *primeira categoria* (ou *magro*) em $\mathbb{R}$ se M estiver contido em uma união enumerável de subconjuntos fechados, todos eles com interior vazio. Mais precisamente, M é da primeira categoria em $\mathbb{R}$ se $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada $F_n \subset \mathbb{R}$ é fechado e $intF_n = \emptyset$ para todo $n \in I\!N$. Um exemplo simples de um conjunto da primeira categoria em $\mathbb{R}$ é o conjunto $\mathbb{Q}$.

Quando M não for da primeira categoria em $\mathbb{R}$ dizemos que M é da *segunda categoria* em $\mathbb{R}$.

Decorre imediatamente da definição que uma união enumerável de conjuntos da primeira categoria é um conjunto da primeira categoria.

O Teorema de Baire que veremos na próxima seção diz que todo conjunto com interior não vazio é da segunda categoria. Porém, há conjuntos com interior vazio que são da segunda categoria, como por exemplo, o conjunto dos irracionais.

2.1.4 Teorema de Baire

O resultado que veremos a seguir é conhecido como *teorema de Baire* e está relacionado com a estrutura topológica da reta. Observamos que este resultado é essencial na prova do Teorema 1.1.

Teorema 2.1 *Todo subconjunto M da primeira categoria em $\mathbb{R}$ tem interior vazio.*

Demonstração: Vamos provar este fato mostrando diretamente que $intM = \emptyset$. Para isso, seja $a_0 \in M$ e seja $\epsilon_0 > 0$. Devemos verificar que $(a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0)$ não está contido em M.

Pela hipótese, $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde cada F_n é fechado e $intF_n = \emptyset$ para todo $n \in I\!N$. Como $intF_1 = \emptyset$, existe $a_1 \in (a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0)$ tal que $a_1 \notin F_1$, ou seja, a_1 pertence ao aberto $\mathbb{R} \setminus F_1$ (pois F_1 é fechado). Logo, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $[a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1] \subset \mathbb{R} \setminus F_1$ e $[a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1] \subset (a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0)$.

Como $intF_2 = \emptyset$, existe $a_2 \in (a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1)$ tal que $a_2 \notin F_2$. Mas, $\mathbb{R} \setminus F_2$ é aberto. Logo, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $[a_2 - \epsilon_2, a_2 + \epsilon_2] \subset \mathbb{R} \setminus F_2$ e $[a_2 - \epsilon_2, a_2 + \epsilon_2] \subset (a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1)$.

Prosseguindo indutivamente, obtemos uma sequência a_n e números positivos ϵ_n de forma que $[a_n - \epsilon_n, a_n + \epsilon_n] \subset \mathbb{R} \setminus F_n$ e $[a_{n+1} - \epsilon_{n+1}, a_{n+1} + \epsilon_{n+1}] \subset (a_n - \epsilon_n, a_n + \epsilon_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

É claro que podemos escolher ϵ_n de modo que $\epsilon_n \to 0$. Isso, se quisermos que a_n seja uma sequência de Cauchy. Mas, não é necessário esse procedimento, pois é suficiente que a_n possua uma subsequência convergente. Logo, $a_n \to a$ (ou uma subsequência) para algum $a \in \mathbb{R}$. Evidentemente, $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n - \epsilon_n, a_n + \epsilon_n]$. Portanto, $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e $a \in (a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0)$.

Segue-se então que $(a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0)$ não está contido em M como queríamos demonstrar. □

Observação 2.1 Como consequência desse teorema temos o seguinte fato importante: suponha que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado. Então, algum F_n tem interior diferente de vazio. Caso contrário, o interior de $\mathbb{R}$ seria vazio, o que é evidentemente falso.

Mas, podemos concluir algo mais forte:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} intF_n \quad \text{é um aberto denso em } \mathbb{R}.$$

Com efeito, seja $A \neq \emptyset \subset \mathbb{R}$ um aberto. Suponha que $A \cap intF_n = \emptyset$ para todo $n \in I\!N$. Então, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \setminus intF_n)$. Como $F_n \setminus intF_n$ é fechado e $int(F_n \setminus intF_n) = \emptyset$ para todo $n \in I\!N$, decorre do teorema de Baire que

$$int[\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \setminus intF_n)] = \emptyset.$$

Logo, A não pode estar contido em $\bigcup_{n-1}^{\infty}(F_n \setminus intF_n)$, pois A é aberto não vazio. Portanto, $A \cap intF_n \neq \emptyset$ para algum n e isso implica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} intF_n$ é um aberto denso em $\mathbb{R}$. (Este argumento simplifica a demonstração dada em [4], p. 191).

Observação 2.2 O teorema de Baire continua válido se considerarmos, no lugar de $\mathbb{R}$, qualquer subconjunto aberto ou fechado, com a topologia induzida pela de $\mathbb{R}$. Na verdade, o teorema de Baire é válido para qualquer espaço métrico completo ou topologicamente completo, veja [4]. Estes resultados só serão utilizados na parte final deste artigo, não comprometendo o caráter elementar de sua parte principal. Considerando $B \subset \mathbb{R}$ com a topologia induzida, denotaremos o interior de um subconjunto $F \subset B$ por

$$int_B F = \{x \in F : (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap B \subset F, \text{ para algum } \epsilon = \epsilon(x)\}.$$

2.2 Lemas

Demonstraremos nessa seção os resultados mencionadas na introdução. São na verdade fatos bem simples e serão usados na prova do Teorema 1.1.

Lema 2.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^n, n \geq 1$, onde I é um intervalo aberto. Suponha que exista $1 \leq k \leq n$ tal que $f^{[k]}(x) = 0$ para todo $x \in I$. Então, f é um polinômio.*

Demonstração: Pode-se demonstrar este resultado usando o teorema fundamental do cálculo (ou o teorema do valor médio) e uma fácil indução. Mas vamos utilizar a fórmula de Taylor com resto integral, que no fundo não deixa de ser o teorema fundamental do cálculo.

Seja $x_0 \in I$. Temos pela fórmula de Taylor que para todo $x \in I$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{[j]}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k-1} f^{[k]}(t)dt.$$

Como $f^{[k]}(t) = 0$ para todo $t \in I$, então a integral acima é nula. Logo, f é um polinômio em I de grau menor ou igual a $k-1$. □

Lema 2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Suponha que, para todo $x \in \mathbb{R}$, exista $n = n(x) \in I\!N$ tal que $f^{[n]}(x) = 0$. Então f é um polinômio.*

Demonstração: Vamos demonstrar este fato usando o teorema de Baire.

Defina $F_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{[n]}(x) = 0\}$. Temos então que cada F_n é fechado e $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. Logo, pelo teorema de Baire, $intF_n \neq \emptyset$ para algum $n \in I\!N$.

Como $intF_n$ é aberto, ele contém um intervalo aberto $I \subset intF_n$. Segue-se do lema 2.1 que f é um polinômio em I, pois $f^{[n]}(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Seja $p(x)$ esse polinômio. Temos então que $f(x) = p(x)$ para todo $x \in I$. Ora, duas funções analíticas em $\mathbb{R}$ que coincidem em um intervalo aberto são iguais em toda a reta. Logo, $f(x) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ([3], p. 322). □

Vamos precisar ainda do seguinte lema cuja demonstração deixamos como exercício.

Lema 2.3 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{∞}. Suponhamos que exista $c \in (a,b)$ tal que a restrição de f em (a,c) e em (c,b) seja um polinômio. Então, f é um polinômio.*

2.3 Um resultado particular mais simples

Provaremos agora a afirmação feita na introdução, a saber,

Teorema 2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{∞}. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ exista $n = n(x) \in I\!N$ tal que $f^{[n]}(x) = 0$. Ainda, suponha que $n(x)$ seja limitado, isto é, que exista $n_0 \in I\!N$ com $n(x) \leq n_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, f é um polinômio.*

Demonstração: Faremos uso novamente do teorema de Baire.

Defina $F_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{[n]}(x) = 0\}$, $n = 0, 1, \ldots, n_0$. Temos então que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{n_0} F_n$. Como cada F_n é fechado, segue-se do resultado visto na seção 2.1 que $A = \bigcup_{n=0}^{n_0} intF_n$ é um aberto denso em $\mathbb{R}$. (Não precisamos realmente usar o teorema de Baire, pois temos apenas uma união finita de fechados. Neste caso, pode-se provar que A é denso em $\mathbb{R}$ usando apenas o fato de que, em qualquer espaço topológico, uma união finita de fechados com interior vazio possui interior vazio.).

Seja $a \in A$. Então, $a \in intF_n$ para algum $n \in I\!N$. Isso implica que existe um intervalo aberto I_a com $a \in I_a \subset intF_n$. Pelo Lema 2.1 concluimos então que f é um polinômio em I_a de grau menor ou igual a $n - 1$. Portanto, $f^{[n_0]}(x) = 0$ para todo $x \in A$. Como a derivada $f^{[n_0]}$ é contínua e A é denso em $\mathbb{R}$, temos que $f^{[n_0]}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e o resultado segue □

Observação 2.3 Veja que a hipótese de f ser de classe C^∞ não é necessária. É suficiente supor f de classe C^{n_0}. A classe de diferenciabilidade pode ser diminuida, mas não muito, como podemos ver no seguinte exemplo: $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x^n$ se $x \geq 0$, onde $n \geq 2$. Temos que f é de classe C^{n-1}, $n_0 = n + 1$, e f não é polinômio.

Pode-se mostrar o mesmo resultado supondo que f seja apenas de classe $C^{n_0 - 1}$. A demonstração não é elementar.

3 Demonstração do Teorema 1.1

Primeira parte

Defina $F_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{[n]}(x) = 0\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ Temos, pela hipótese, que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. Pelo teorema de Baire, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} intF_n$ é um aberto denso em $\mathbb{R}$. Seja $B = \mathbb{R} \setminus A$. Então, B é fechado e $intB = \emptyset$. Observe que, pelo Lema 2.1, f é analítica em A, e portanto, f é um polinômio em cada intervalo componente (também chamado componente conexa) de A. Veja ([3], pp. 132 e 322). Mostraremos, por contradição, que B deve ser vazio. Com isso, temos que $A = \mathbb{R}$, daí advindo o resultado (de acordo com o Lema 2.2).

Vamos supor então que $B \neq \emptyset$. Afirmamos que B não possui ponto isolado. Com efeito, suponha que $b \in B$ e $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap B = \{b\}$, ou seja, $(b, b + \epsilon) \subset A$ e $(b - \epsilon, b) \subset A$ para algum $\epsilon > 0$. Como f é um polinômio em cada componente conexa de A, então f é um polinômio em $(b-\epsilon, b)$ e $(b, b+\epsilon)$. Logo, pelo Lema 2.3 $b \in A$, o que é absurdo.

Seja $b \in B$ e seja $\epsilon > 0$. Se $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \subset F_n$ para algum $n \in I\!N$, então, como A é denso, $(b-\epsilon, b+\epsilon) \subset intF_n \subset A$, o que é absurdo pois $b \notin A$. Logo,

$$(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \cap (\mathbb{R} \setminus F_n) \neq \emptyset \ \forall \epsilon > 0, \ \forall n \in I\!N, \ \forall b \in B. \qquad (1)$$

Seja $b \in B$ e seja $\epsilon > 0$. Suponha que $B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) \subset F_k$ para algum $k \in I\!N$. Como B não poss ui ponto isolado, então $B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$.

Por (1), existe $a \in (b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \cap (\mathbb{R} \setminus F_k)$. Se I_a é a componente conexa de A que contém a, então I_a é um intervalo da forma

$$(c, a+\delta) \quad \text{com} \quad -\infty \leq c < a+\delta \leq b, \quad \text{se} \quad a \in (b-\epsilon, b),$$

ou da forma

$$(a-\delta, c) \quad \text{com} \quad b \leq a-\delta < c \leq +\infty \quad \text{se} \quad a \in (b, b+\epsilon),$$

para algum $\delta > 0$.

A função f é um polinômio em I_a de grau maior ou igual a k, pois $f^{[k]}(a) \neq 0$. Se $m \geq k$ for o grau desse polinômio, então $f^{[m]}(x) = const \neq 0$ em I_a. Daí, $f^{[m]}(a+\delta) \neq 0$ ou $f^{[m]}(a-\delta) \neq 0$ conforme o caso. Mas, $a+\delta \in B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon)$ ou $a-\delta \in B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon)$. Como $m \geq k$, então $f^{[m]}(a+\delta) = 0$ ou $f^{[m]}(a-\delta) = 0$, pois $B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$.

Chegamos a um absurdo. Logo,

$$B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus F_k) \neq \emptyset \ \forall \epsilon > 0, \ \forall k \in I\!N, \ \forall\, b \in B. \qquad (2)$$

A propriedade (2) será essencial para a segunda parte da demonstração, onde chegaremos a uma contradição pelo fato de supormos que B não é vazio. Para esta segunda parte da demonstração do teorema daremos duas provas alternativas. A primeira, bem elementar e construtiva, é essencialmente a demonstração do teorema de Baire. A segunda, mais curta, aplica o teorema de Baire no conjunto B (conforme a observação 2.2).

Segunda Parte

Por (2), existe $b_0 \in B$ tal que $f(b_0) \neq 0$.

Como f é contínua, existe um intervalo aberto I_0 com $b_0 \in I_0$ e $|f(x)| \geq \epsilon_0 > 0$ para todo $x \in I_0$. Novamente por (2), existe $b_1 \in I_0$ tal que $f'(b_1) \neq 0$. Como f' é contínua, existe um intervalo aberto I_1, com $b_1 \in I_1 \subset \overline{I_1} \subset I_0$ tal que $|f'(x)| \geq \epsilon_1 > 0$ para todo $x \in I_1$. Prosseguindo, por (2), existe $b_2 \in I_1$ tal que $f''(b_2) \neq 0$. Como f'' é contínua, existe um intervalo aberto I_2 com $b_2 \in I_2 \subset \overline{I_2} \subset I_1$ tal que $|f''(x)| \geq \epsilon_2 > 0$ para todo $x \in I_2$.

Indutivamente, seja $b_n \in I_n \subset \overline{I_n} \subset I_{n-1}$ tal que $|f^{[n]}(x)| \geq \epsilon_n > 0$ para todo $x \in I_n, b_n \in B$.

Por (2), existe $b_{n+1} \in I_n$ tal que $f^{[n+1]}(b_{n+1}) \neq 0$. Como $f^{[n+1]}$ é contínua, existe um intervalo aberto I_{n+1} com $b_{n+1} \in I_{n+1} \subset \overline{I_{n+1}} \subset I_n$ tal que $|f^{[n+1]}(x)| \geq \epsilon_{n+1} > 0$ para todo $x \in I_{n+1}$.

Temos então uma sequência b_n, $b_n \in B$ para todo $n \in I\!N$, com $b_n \in I_n$ e $\overline{I_{n+1}} \subset I_n$ para todo $n \in I\!N$. Ainda, $|f^{[n]}(x)| \geq \epsilon_n > 0$ para todo $x \in I_n$.

Evidentemente podemos escolher os intervalos I_n cada um com comprimento menor que $1/(n+1)$ para que b_n seja uma sequência de Cauchy. Com isso, $b_n \to x_0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. É claro então que $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, e portanto, $f^{[n]}(x_0) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese do teorema. Logo, $B = \emptyset$. □

Daremos agora a demonstração alternativa que falamos acima.

Temos, $B = \bigcup_{n=0}^{\infty}(B \cap F_n)$, B é um espaço métrico completo e $B \cap F_n$ é fechado em B para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Baire, $int_B(B \cap F_n) \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Logo, existe $\epsilon > 0$ e $b \in B \cap F_n$ tal que $B \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) \subset B \cap F_n \subset F_n$, o que contradiz a propriedade (2). Portanto, $B = \emptyset$. □

4 Demonstração do Teorema 1.2

Demonstraremos o caso em que $k = 2$, ou seja, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. O caso geral demonstra-se trivialmente por indução, usuando o princípio de continuação analítica.

Suponha então que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existam $n = n(x, y), m = m(x, y) \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x,y) = 0.$$

Seja

$$F_{n,m} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = 0 \;\text{ e }\; \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x,y) = 0\}.$$

Pela hipótese, temos que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n,m=0}^{\infty} F_{n,m}$. Como cada $F_{n,m}$ é fechado, temos, pelo teorema de Baire, que $int F_{n,m} \neq \emptyset$ para algum par n, m. Existe então um retângulo aberto $P = (a,b) \times (c,d) \subset F_{n,m}$. Segue-se daí que $f(x,y) = p(x,y)$ para todo $(x,y) \in P$, onde $p(x,y)$ é um polinômio em x e y.

Pelo Teorema 1.1, temos que, para cada y fixo, a função $\varphi_y(x) = f(x,y)$ é um polinômio em x e, para x fixo, a função $\psi_x(y) = f(x,y)$ é um polinômio em y. Então, se $y \in (c,d)$ temos $\varphi_y(x) = f(x,y) = p(x,y)$ para todo $x \in (a,b)$; logo, $\varphi_y(x) = p(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x,y) = \varphi_y(x) = p(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in (c,d)$.

Agora, $\psi_x(y) = f(x,y) = p(x,y)$ para todo $y \in (c,d)$ e para todo $x \in \mathbb{R}$; logo, $\psi_x(y) = f(x,y) = p(x,y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x,y) = \psi_x(y) = p(x,y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com isso, mostramos que $f(x,y) = p(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. □

5 Considerações Finais

Os Teoremas 1.1, 1.2, 2.2 e o Lema 2.2 podem ser demonstrados quando considerarmos funções definidas em subconjuntos abertos e conexos.

Como consequência imediata do Teorema 1.1 temos o seguinte fato: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ que não seja um polinômio, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^{[n]}(x) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demonstra-se também que o conjunto destes pontos é da segunda categoria em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se*

$$P = \{x \in \mathbb{R} : f^{[n]}(x) \neq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$$

for da primeira categoria em $\mathbb{R}$, então f é um polinômio.

Pode ser que existam argumentos mais fortes para demonstrar que f seja um polinômio, supondo apenas que o conjunto S acima seja denso. Seria também interessante estender o Teorema 5.1 para funções de várias variáveis.

Referências

[1] Dieudonné, J., *Eléments d'Analyse, Tome I, Fondements de l'analyse moderne*, 3^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1979.

[2] Lima, E.L., *Curso de Análise*, vol. 2, 3^a edição, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1989.

[3] ———, *Curso de Análise*, vol. 1, 6^a edição, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1989.

[4] ———, *Espaços Métricos*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1977.

[5] Figueiredo, D. G., *Análise I*, 2^a edição, LTC-Editora, Rio de Janeiro, 1996.

Departamento de Matemática - ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
e-mail: nikolay@mat.ufmg.br e zumpano@mat.ufmg.br