MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 24/25 – junho/dezembro 1998 – pp. 2-9

O problema da corda suspensa

Paulo R. Ruffino

1 Introdução

O problema de saber qual é a curva descrita por uma corda ou corrente flexível e homogênea suspensa em suas extremidades, sob a ação de seu próprio peso é bastante antigo. Um dos primeiros cientistas que esboçou algum resultado para esse problema foi Galileu Galilei em *As Duas Novas Ciências* (1638), onde julgava que tal curva seria uma parábola, veja [2, parágrafos 186, 309 e 310]. No mesmo século, Jacques Bernoulli encontrou a equação que modela o problema. Posteriormente o matemático e físico holandês Christiaan Huygens mostrou que a curva solução, uma catenária, isto é, o gráfico do cosseno hiperbólico $y = c\cosh(x/c)$ onde c é um parâmetro real positivo, é não algébrica (veja por exemplo Boyer [1]). Nossa intenção neste artigo é deduzir a equação diferencial dessa curva considerando que a densidade da corda varia ao longo do seu comprimento e com isso chegar a algumas conclusões relativamente simples, mas interessantes, que serão ilustradas nos exemplos da última seção.

Esse tipo de situação com a corda ou fio com densidade não homogênea é o caso por exemplo quando penduramos pesos ao longo da corda suspensa. Diríamos até que seria bastante sugestivo denominarmos essa questão como sendo o "problema do varal", formulado da seguinte maneira: qual é a curva descrita pelo fio do varal dada uma certa distribuição de roupas? Ou ainda, qual a forma do cabo de sustentação de uma ponte pênsil dada a distribuição do peso na plataforma da pista? E várias outras versões desse mesmo problema poderiam ser mencionadas que também envolvem situações do nosso dia-a-dia. Para citar algumas, observe nas ruas: cabos telefônicos, várias lâmpadas sustentadas por um mesmo fio suspenso nas extremidades, bandeirolas, semáforos sustentados por cabos e outros.

2 O Modelo Matemático

Como esse tipo de problema é eminentemente estático, não estaremos considerando por exemplo vibrações ou fenômenos ondulatórios em nossa corda, tampouco serão consideradas as variações de comprimento devidas à elasticidade ou temperatura. Outra hipótese física que consideraremos é que essa corda é "totalmente articulada", no sentido de que a força de tensão ao longo da corda não tem componente normal a ela. Seria como imaginar que, dentro da situação estudada, essa corda se comportasse como uma corrente infinitamente articulada, isto é, como se fosse formada por infinitos gomos de comprimento infinitamente pequeno. Essa hipótese é absolutamente aceitável desde que os parâmetros envolvidos sejam razoáveis, por exemplo, desde que o comprimento da corda seja muito maior (milhares de vezes!?) que o diâmetro e a curvatura máxima da forma assumida não ultrapasse um certo limite, que varia de acordo com o material (por exemplo raio de curvatura mínimo seja muito maior que o diâmetro da seção transversal da corda).

Colocaremos nosso centro de coordenadas na extremidade esquerda da corda, então, chamando de $f(x)$ a função que descreve posição ao longo do eixo horizontal, teremos $f(0) = 0$, e a extremidade da direita estará fixada a uma distância horizontal da outra ponta de c, a uma altura $A = f(c)$, conforme a figura 1.

Faremos nosso modelo a partir da distribuição (ou densidade) de peso da corda em relação à variável x , com $0 \leq x \leq c$, denotada por $\rho(x)$. Outra abordagem possível seria considerar a densidade $\bar{\rho}(l)$ em relação à parametrização de comprimento de arco, $l = l(x)$, da corda, onde

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(s)^2} ds$$

é o comprimento da corda do ponto $(0,0)$ ao ponto $(x, f(x))$. Podemos facilmente calcular $\bar{\rho}(l)$ a partir de $\rho(x)$ da seguinte maneira: seja $m(x)$ a massa (ou peso) total da corda do ponto $(0,0)$ até o ponto $(x, f(x))$ e $\bar{m}(l)$ a massa total até o comprimento l; note então que $m(x) =$

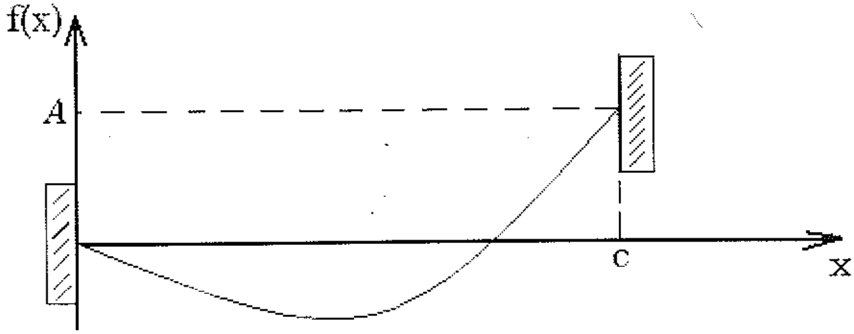

Figura 1: *Modelo da corda suspensa*

$\bar{m}\,(l\,(x))$. Agora, pela regra da cadeia

$$\rho\,(x) = \frac{dm}{dx} = \frac{d\,\bar{m}\,(l)}{dl}\frac{dl}{dx} = \bar{\rho}\,(l)\sqrt{1 + f'\,(x)^2}. \qquad (1)$$

A vantagem de formular a equação com a densidade $\rho\,(x)$ é a simplificação na modelagem matemática: compare a equação diferencial linear (3) com a equação não-linear envolvendo $\bar{\rho}\,(l)$ (4). Note também que para que nosso modelo admita cargas pontuais a densidade $\rho\,(x)$ deve ser considerada não como uma função propriamente, mas uma medida no intervalo $[0, c]$.

A equação da curva formada pela corda pode ser facilmente deduzida a partir de um elemento infinitesimal dessa corda, representado na figura 2.

Chamaremos de $T(x)$ a tensão da corda no ponto $x \in [0, c]$ e $\alpha\,(x)$ será a inclinação da curva no ponto x, ou seja: $\tan\alpha\,(x) = f'\,(x)$. Uma primeira observação interessante é que como não existe movimento horizontal, pela segunda lei de Newton, as forças horizontais aplicadas em qualquer segmento da corda devem se anular, isto é, $T\,(x)\cos\alpha\,(x)$ é constante, ou em termos da derivada da f:

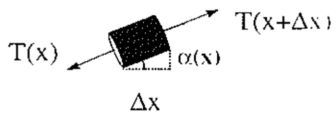

Figura 2: *Elemento infinitesimal da corda*

$$T\,(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = k \tag{2}$$

para todo ponto x no intervalo, onde k é uma constante que vai depender do comprimento total da corda. Observe que o ponto de menor tensão é onde a derivada da f se anula e vice-versa: quanto maior o módulo da derivada, maior é a tensão. Quanto à componente vertical da tensão, de novo pela segunda lei de Newton, devemos ter que a diferença entre as componentes verticais da tensão em x e $(x + \Delta x)$ deve ser igual à força externa sobre o elemento correspondente da corda, para que este esteja em equilíbrio, isto é:

$$T(x+\Delta x)\frac{f'\,(x+\Delta x)}{\sqrt{1+f'(x+\Delta x)^2}} - T(x)\frac{f'\,(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \Delta x \cdot \rho\,(x) + o\,(\Delta x)\,,$$

onde $o\,(x)\,/\Delta x$ tende a zero quando Δx tende a zero. Rearranjando os termos e usando a equação da componente horizontal (2) temos:

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = k^{-1}\rho(x) + \frac{o\,(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero temos então a equação diferencial linear que modela o problema:

$$f''\,(x) = k^{-1}\rho\,(x)\,. \tag{3}$$

O que mostra também que a forma assumida pela corda submetida apenas à força de gravidade tem sempre concavidade positiva.

A equação que obtemos usando a densidade $\bar{\rho}$ (l) fica um pouco mais complicada. A partir da fórmula (1) temos a seguinte equação não-linear:

$$\left(1+f'(x)^2\right)^{-\frac{1}{2}} f''(x) = k^{-1}\,\bar{\rho}\,\left(\int_0^x \sqrt{1+f'(s)^2}ds\right). \tag{4}$$

3 Catenária ou Parábola?

Para calcular as soluções das equações (3) ou (4) devemos levar em conta não só as condições de contorno $f(0) = 0$ e $f(c) = A$, mas também lembrar que a constante k dessas equações depende do comprimento total L da corda, e portanto deve ser ajustada para que

$$\int_0^c \sqrt{1+f'(x)^2}dx = L. \tag{5}$$

Exemplo 1

Considere a situação em que temos uma distribuição uniforme de peso em função de x com $\rho(x) = \rho$. Essa é por exemplo em primeira aproximação a situação do cabo de sustentação de uma ponte pênsil se supusermos que o peso da plataforma da pista está espalhado uniformemente ao longo da ponte e que o peso do cabo propriamente é desprezível em relação ao peso dessa plataforma. Neste caso, derivando-se duas vezes a função:

$$f(x) = \frac{1}{2}k^{-1}\rho x^2 + ax,$$

verificamos que $f(x)$ é a solução para a equação diferencial, portanto a curva descrita pelo cabo é uma parábola; onde, como dissemos, as constantes k e a devem ser ajustadas de acordo com a altura A da extremidade direita e com o comprimento total do cabo.

Exemplo 2

Na situação da corda homogênea com $\bar{\rho}$ (l) $=\bar{\rho}$ constante ao longo do seu comprimento teremos, pela equação (4) a seguinte equação diferencial:

$$\left(1+f'(x)^2\right)^{-\frac{1}{2}} f''(x) = k^{-1}\,\bar{\rho} \tag{6}$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $y = f'(x)$ na equação acima e separando-se as variáveis, temos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int k^{-1}\,\bar{\rho}\;dx,$$

ou seja,

$$arcsenh\;(y) = k^{-1}\,\bar{\rho}\,x + a,$$

portanto,

$$f'(x) = senh\,\left(k^{-1}\,\bar{\rho}\,x + a\right),$$

logo,

$$f(x) = \frac{\cosh\left(k^{-1}\,\bar{\rho}\,x + a\right) + b}{k^{-1}\,\bar{\rho}}$$

onde a e b são constantes de integração. Da condição $f(0) = 0$ temos $b = -\cosh a$, portanto, a solução da equação é a catenária

$$f(x) = \frac{\cosh\left(k^{-1}\,\bar{\rho}\,x + a\right) - \cosh a}{k^{-1}\,\bar{\rho}}.$$

Se a altura da extremidade direita for $A = f(c)$ e o comprimento total da corda for L , verifica-se facilmente, integrando a equação (5), que devemos determinar as constantes k e a de modo que satisfaçam as condições impostas pelo seguinte sistema de equações transcendentais:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1}{k^{-1}\,\bar{\rho}}\left(\sinh\left(k^{-1}\,\bar{\rho}\,c + a\right) - \sinh a\right) & = & L \\ \dfrac{1}{k^{-1}\,\bar{\rho}}\left(\cosh\left(k^{-1}\,\bar{\rho}\,c + a\right) - \cosh a\right) & = & A \end{array}\right.$$

que devem em geral ser resolvidas numericamente. Mesmo no caso particular em que $A = 0$ teremos que

$$a = -\frac{1}{2}k^{-1}\,\bar{\rho}\,c$$

e usando o fato de que o seno hiperbólico é uma função ímpar, $k > 0$ deve ser a solução da equação transcendental:

$$\sinh\left(\frac{\bar{\rho}\,c}{2k}\right) = \frac{\bar{\rho}\,L}{2k}$$

Note que como a derivada de $\sinh(x)$ é $\cosh(x) \geq 1$, isto implica em $senh\ (x) \geq x$ para todo $x \geq 0$, logo, a equação acima só tem solução para k se $L > c$. Além disso repare que, fixado $\bar{\rho}$, k tende a zero quando L tende a infinito; por outro lado k tende a infinito quando L tende a c, isto é a corda estaria "perfeitamente esticada", com $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, c]$.

Exemplo 3

Exemplos de modelos onde a densidade $\rho(x)$ é uma medida ao invés de função também nos levam a situações interessantes. Imagine por exemplo que o peso total é unitário e está concentrado no ponto médio do intervalo $x_0 = c/2$. Essa é a situação se temos, digamos, um fio com peso desprezível onde penduramos um gancho com peso unitário. A densidade será um delta de Dirac $\rho(x) = \delta_{x_0}$. Pela equação (3) temos que a solução:

$$f(x) = \int_0^x \int_0^s k^{-1} \rho(u)\, du ds + a_1 x + a_2$$

será dada pelos segmentos de reta descritos por:

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq c/2 \\ \left(a_1 + \frac{1}{k}\right) x - \frac{c}{2k} & \text{se} \quad c/2 \leq x \leq c, \end{cases}$$

onde os parâmetros a_1 e k dependem da altura A da extremidade direita e do comprimento total do fio. Observe que generalizando esse exemplo podemos pendurar pesos concentrados em vários pontos ao longo do intervalo $[0, c]$ para obter assim qualquer curva poligonal (convexa ou não, se admitirmos cargas negativas) conforme o esboço da figura 3.

Por fim, observe que pela equação (3), se admitirmos que $\rho(x)$ pode ser negativo (por exemplo se existir um terceiro apoio no meio da corda que exerça uma força estritamente vertical para cima, isto é, a corda pode deslizar sem atrito sobre esse apoio; ou se atuarem campos elétrico ou magnético verticais), então toda função de classe C^2 por partes no intervalo $[0, c]$ pode ser obtida suspendendo-se uma corda com comprimento e distribuição de peso $\rho(x)$ adequados.

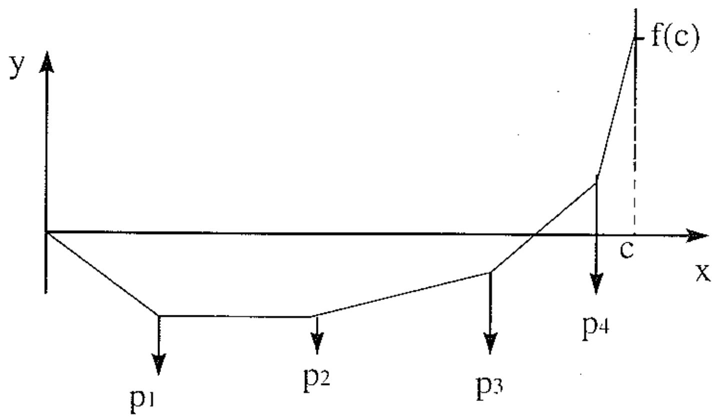

Figura 3: *Curva poligonal obtida com vários pesos concentrados*

Referências

1. C. Boyer: *História da Matemática.* Editora Edgar Blücher Ltda,1986

2. Galileo Galilei: *Dialogues Concerning Two New Sciences.* Dover Publications, Inc., New York, 1954.

Departamento de Matemática - IMECC
Universidade Estadual de Campinas,
13.081-970 - Campinas - SP, Brasil
e-mail: `ruffino@ime.unicamp.br`