

## A 3-Esfera e seus familiares. O fibrado de Hopf

Andrei Marénitch, Alexandre Ananin e Yuri Bozhkov

Vamos analisar espaços conhecidos de um ponto de vista diferente daquele habitualmente apresentado nos cursos de graduação (isto é sempre útil, e não só na matemática). No plano  $\mathbb{R}^2$  escolhamos um ponto qualquer  $O$ , que chamaremos “origem”; consideremos como um espaço topológico o conjunto de todas as retas que passam pela origem. Este espaço tem nome: *reta projetiva real*,  $\mathbb{RP}^1$ . Notemos que cada reta da qual excluimos a origem pode ser vista como uma órbita de ação do grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R} \mid r \neq 0\}$ . Assim,  $\mathbb{RP}^1$  é um espaço quociente  $(\mathbb{R}^2 \setminus O)/\mathbb{R}^*$ . Qualquer circunferência, por exemplo, a unitária, com centro na origem intercepta cada reta em exatamente dois pontos diametralmente opostos: logo a circunferência  $S^1$  é uma lista de elementos de  $\mathbb{RP}^1$ , onde cada elemento aparece duas vezes. Portanto  $\mathbb{RP}^1$  é  $S^1$  com pontos diametralmente opostos considerados idênticos,  $\mathbb{RP}^1 = S^1/\{\text{id}, \tau\}$ .

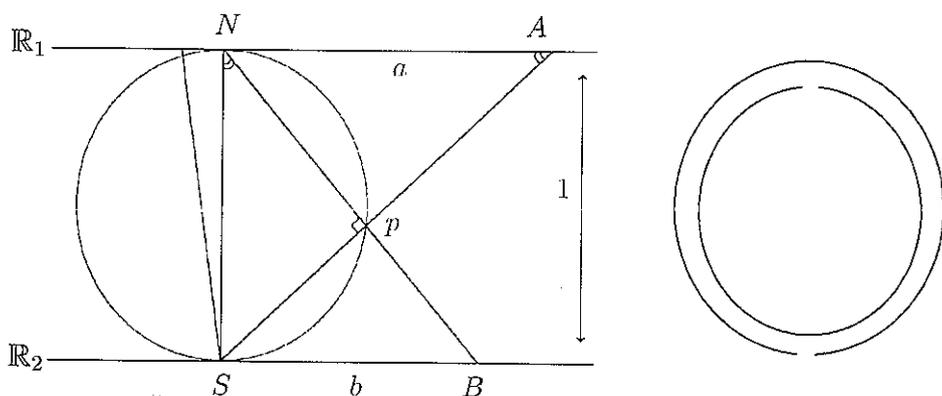
As coordenadas usuais  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  definem coordenadas projetivas  $(x : y)$  em  $\mathbb{RP}^1$ :

- Cada elemento de  $\mathbb{RP}^1$  tem coordenadas projetivas únicas
- Coordenadas projetivas  $(x : y)$  e  $(\alpha x : \alpha y)$  são “iguais” qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- Pelo menos uma das coordenadas  $x$  ou  $y$  é diferente de zero

Em outras palavras,  $\mathbb{RP}^1 = U_1 \cup U_2$ , onde  $U_1$  é o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{RP}^1$  com coordenada projetiva  $y$  não-nula e  $U_2$  — com coordenada projetiva  $x$  não-nula.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Observemos que não tem sentido falarmos em “valor” de uma coordenada projetiva. Mas podemos dizer que uma coordenada projetiva é ou não nula

Seja  $(x : y) \in U_1$ . Então  $(x : y) = (x/y : 1)$  e qualquer ponto de  $U_1$  tem a forma  $(a : 1)$ . Assim,  $U_1$  é isomorfo a uma reta real  $\mathbb{R}_1$  pela regra  $(x : y) \mapsto x/y$ . Analogamente,  $U_2 \simeq \mathbb{R}_2$ ,  $(x : y) \mapsto y/x$ . Seja  $p \in U_1 \cap U_2$  ou seja  $p = (x : y)$ . Então temos  $a \in \mathbb{R}_1$  e  $b \in \mathbb{R}_2$ , elementos que se relacionam com  $p$  pelas fórmulas  $a = x/y$  e  $b = y/x$ . Obviamente,  $ab = 1$ . Em outras palavras, a reta projetiva  $\mathbb{R}P^1$  é a colagem de duas retas habituais,  $\mathbb{R}_1$  e  $\mathbb{R}_2$ . As partes "comuns" são  $\mathbb{R}_1 \setminus O$  e  $\mathbb{R}_2 \setminus O$  identificadas pela fórmula  $ab = 1$ . Para se convencer que  $\mathbb{R}P^1$  é uma circunferência, digamos de raio  $1/2$ , consideremos a figura a seguir:

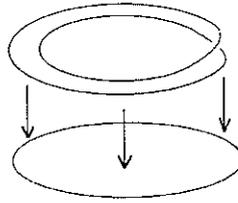


A circunferência  $C$  acima tem raio  $1/2$ ; a reta  $\mathbb{R}_1$  é tangente a  $C$  no polo norte  $N$ , e tem origem em  $N$ ; a reta  $\mathbb{R}_2$  é paralela a  $\mathbb{R}_1$ , é tangente a  $C$  no polo sul  $S$ , e tem origem em  $S$ . A projeção estereográfica do polo norte  $N$  identifica  $\mathbb{R}_2$  com  $C \setminus N$ . Analogamente, a projeção estereográfica do polo sul  $S$  identifica  $\mathbb{R}_1$  com  $C \setminus S$ . Mais ainda, os pontos de  $\mathbb{R}_1$  e de  $\mathbb{R}_2$  que se relacionam a um mesmo ponto de  $C$ , têm as coordenadas  $a \in \mathbb{R}_1$  e  $b \in \mathbb{R}_2$  que satisfazem à expressão  $ab = 1$ : os triângulos  $NSA$  e  $SNB$  são semelhantes, donde  $a/1 = 1/b$  ou  $ab = 1$ .

A esfera  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus O$  também pode ser tratada como um espaço quociente pela ação do grupo  $\mathbb{R}^+$  de números reais positivos. Isto é, a composição  $S^1 \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus O) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus O)/\mathbb{R}^+$  é uma identificação.

Como o grupo  $\mathbb{R}^+$  é um subgrupo de  $\mathbb{R}^*$ , cada órbita de  $\mathbb{R}^+$  está incluída em uma órbita apropriada de  $\mathbb{R}^*$ . É natural definir a sobrejeção entre os espaços quocientes obedecendo à seguinte regra:

$$\begin{array}{c}
 (\mathbb{R}^2 \setminus O)/\mathbb{R}^+ \simeq S^1 \\
 \downarrow \\
 (\mathbb{R}^2 \setminus O)/\mathbb{R}^* = \mathbb{RP}^1
 \end{array}$$



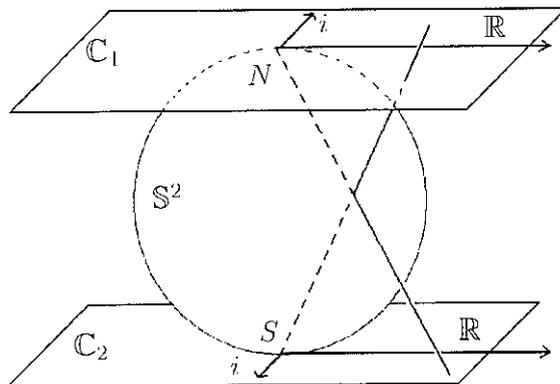
Da mesma maneira a *reta projetiva complexa* pode ser definida como  $\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus O)/\mathbb{C}^*$ . De novo, as coordenadas usuais  $(z, w)$  em  $\mathbb{C}^2$  definem as coordenadas projetivas  $(z : w)$  em  $\mathbb{CP}^1$  e temos as propriedades semelhantes:

- Cada elemento de  $\mathbb{CP}^1$  tem coordenadas projetivas únicas
- Coordenadas projetivas  $(z : w)$  e  $(\alpha z : \alpha w)$  são “iguais”, agora, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{C}^*$
- Pelo menos uma das coordenadas  $z$  ou  $w$  é diferente de zero

De novo temos que  $\mathbb{CP}^1 = V_1 \cup V_2$ , onde  $V_1$  é o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{CP}^1$  com coordenada projetiva  $w$  não-nula e  $V_2$  é o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{CP}^1$  com coordenada projetiva  $z$  não-nula.

Analogamente ao caso real, a parte  $V_1$  tem pontos com coordenadas do tipo  $(a : 1)$  e é isomorfa a um plano complexo  $\mathbb{C}_1$  pela regra  $(a : 1) \mapsto a$  e  $V_2 \simeq \mathbb{C}_2$ ,  $(1 : b) \mapsto b$ . Para cada  $p \in V_1 \cap V_2$  com coordenadas  $a \in \mathbb{C}_1$  e  $b \in \mathbb{C}_2$ , temos  $ab = 1$ , isto é, os números complexos  $a$  e  $b$  têm módulos inversos e argumentos opostos.

Assim, temos a seguinte figura:



A esfera  $S^2$  tem raio  $1/2$ ; os planos  $\mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2$  são tangentes a  $S^2$  nos

polos  $N$  e  $S$ , têm origens em  $N$  e  $S$ , são paralelos, têm eixos coordenados paralelos da seguinte maneira: os eixos reais são paralelos estando um no plano de cima e o outro no plano de baixo e os eixos complexos apontam em direções opostas. A projeção estereográfica do polo norte  $N$  identifica  $\mathbb{C}_2$  com  $\mathbb{S}^2 \setminus N$ ; a projeção estereográfica do polo sul  $S$  identifica  $\mathbb{C}_1$  com  $\mathbb{S}^2 \setminus S$ . Como no caso real, vamos provar que os pontos de  $\mathbb{C}_1$  e de  $\mathbb{C}_2$  que se relacionam a um mesmo ponto de  $\mathbb{S}^2$  têm coordenadas  $a \in \mathbb{C}_1$  e  $b \in \mathbb{C}_2$  que satisfazem à expressão  $ab = 1$ . O fato de que  $|a| \cdot |b| = 1$  deriva dos argumentos e esboço usados para o caso real. O leitor, com pouco esforço, poderá ter o prazer de completar a prova utilizando a figura acima, observando que  $\arg a + \arg b = 0$ .

Assim,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ . Esta esfera é dita *esfera de Riemann*.

Obviamente,  $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ , o que também é válido se tiramos as origens:  $(\mathbb{C}^2 \setminus O) \simeq (\mathbb{R}^4 \setminus O)$ . A esfera  $\mathbb{S}^3$  pode ser tratada como o espaço quociente  $(\mathbb{R}^4 \setminus O)/\mathbb{R}^+$ . Como o grupo  $\mathbb{R}^+$  é um subgrupo de  $\mathbb{C}^*$ , assim, mais uma vez, obtemos uma sobrejeção  $\chi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^4 \setminus O) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4 \setminus O)/\mathbb{R}^+ & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^3 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \chi \\ (\mathbb{C}^2 \setminus O) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^2 \setminus O)/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Esta sobrejeção é denominada *fibrado de Hopf*.

Agora, vamos tratar de  $\mathbb{R}^4$  como conjunto de *quatérnios*:

$$\mathbb{H} = \{q = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i + \gamma \cdot j + \delta \cdot k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$

onde a multiplicação entre os elementos de  $\mathbb{H}$  é a multiplicação algébrica usual considerando-se, além disso,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

( $\mathbb{R}$  comuta com 1,  $i$ ,  $j$  e  $k$ ). Obtemos uma  $\mathbb{R}$ -álgebra. É fácil ver que  $\mathbb{H}$  não é comutativa, mas é associativa. Por analogia com os números complexos, definimos a operação de *conjugação* como sendo

$$\overline{\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i + \gamma \cdot j + \delta \cdot k} = \alpha \cdot 1 - \beta \cdot i - \gamma \cdot j - \delta \cdot k.$$

Uma conta simples mostra que  $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$  e  $q \overline{q} = \overline{q} q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ . A partir dessa expressão definimos o módulo de um quatérnio:

$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ . Dai segue-se que  $|q_1q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$ . Podemos realizar a divisão por qualquer quatérnio não-nulo, à esquerda e à direita. Ou seja: existem soluções únicas para as equações  $xq_1 = q_2$  e  $q_1y = q_2$ , que são, respectivamente,  $x = \frac{q_2\bar{q}_1}{|q_1|^2}$  e  $y = \frac{\bar{q}_1q_2}{|q_1|^2}$ .

Os números complexos formam um subespaço vetorial no espaço dos quatérnios:  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i \subset \mathbb{H}$ ; assim, os quatérnios também podem ser definidos da seguinte maneira:  $\mathbb{H} = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot j$ , onde a multiplicação entre os elementos de  $\mathbb{H}$  é a multiplicação algébrica usual, e se considera, além disso,  $j^2 = -1$  e  $jc = \bar{c}j$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Isto é: qualquer quatérnio  $q = \alpha + \beta i + (\gamma + \delta i)j$  tem forma  $q = z + wj$ , onde  $z, w \in \mathbb{C}$ . Continuando, fazemos as identificações:  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot j$ .

A esfera  $\mathbb{S}^3$ , como um subconjunto de  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot j$ , é

$$\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} = \{q = z + wj \in \mathbb{H} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1, z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Para  $t \in [0, 1]$ , consideremos o conjunto

$$T_t = \{q = z + wj \in \mathbb{H} \mid |z|^2 = t, |w|^2 = 1 - t\}.$$

Para  $t$  percorrendo o intervalo  $[0, 1]$  teremos, obviamente,  $\mathbb{S}^3$  como união de todos os  $T_t$ 's que não se interceptam para  $t$ 's diferentes:  $\mathbb{S}^3 = \bigcup_{t \in [0, 1]} T_t$ .

O conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = t\}$  é uma circunferência no plano coordenado  $\mathbb{C} \cdot 1$  e o conjunto  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w|^2 = 1 - t\}$  é uma circunferência<sup>2</sup> no plano  $\mathbb{C} \cdot j$ . Como as variáveis complexas  $z$  e  $w$  são independentes,  $T_t$  é o produto cartesiano de duas circunferências, isto é, um toro.<sup>3</sup>

O fibrado de Hopf  $\chi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}P^1$  leva os pontos  $(z, w)$  e  $(z', w')$  da 3-esfera para um mesmo ponto  $(z: w) \in \mathbb{C}P^1$ , se e somente se existir  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tal que  $z' = \alpha z$  e  $w' = \alpha w$ . Como  $(z, w), (z', w') \in \mathbb{S}^3$ , temos:  $1 = |z|^2 + |w|^2 = |z'|^2 + |w'|^2 = |\alpha z|^2 + |\alpha w|^2 = |\alpha|^2 \cdot (|z|^2 + |w|^2)$ , o que implica  $|\alpha| = 1$ . Logo, cada fibra (isto é, a  $\chi$ -pré-imagem de um ponto de  $\mathbb{S}^2$ ) é um conjunto do tipo

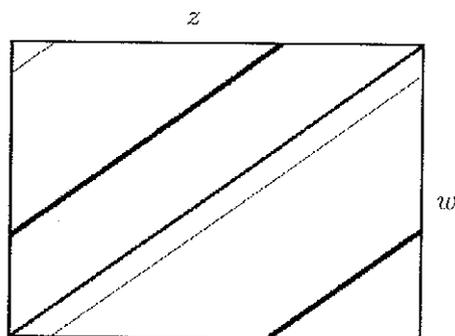
$$\{(\varepsilon z, \varepsilon w) \in \mathbb{C}^2 \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\} = \{\varepsilon q \in \mathbb{H} \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$$

com  $|q| = 1$ ,  $q = z + wj \in \mathbb{H}$ . Observemos que, caso  $(z, w) \in T_t$ , temos  $(\varepsilon z, \varepsilon w) \in T_t$  para qualquer  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  tal que  $|\varepsilon| = 1$ .

<sup>2</sup>Para  $t = 0$  ou  $t = 1$  tais circunferências podem ser degeneradas

<sup>3</sup>Para  $t = 0$  ou  $t = 1$  tal toro é degenerado

Quando o argumento de  $\varepsilon$  percorre o intervalo de 0 a  $2\pi$ , cada coordenada do ponto  $(\varepsilon z, \varepsilon w)$  dá, ao mesmo tempo, exatamente uma volta ao longo das circunferências coordenadas do toro; em outras palavras, o ponto percorre a diagonal do toro. Portanto o toro todo fica decomposto nas diagonais que são as fibras:



Assim, cada fibra tem a forma  $\mathbb{S}^1 q$ , onde  $\mathbb{S}^1 = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid |\varepsilon| = 1\}$  é a circunferência unitária no plano coordenado  $\mathbb{C} \cdot 1$  e  $q = (z, w) \in \mathbb{H}$  é um quatérnio unitário,  $|q| = 1$ . A multiplicação por um quatérnio é uma transformação linear que leva planos em planos e retas em retas. Da identidade  $|q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$  para quatérnios, segue-se que a multiplicação por um quatérnio unitário é uma isometria. Logo, tal multiplicação leva a circunferência plana  $\mathbb{S}^1$  de raio 1 numa circunferência plana de raio 1. Em particular, todas as fibras são circunferências planas unitárias, isto é, geodésicas da 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ .

Novamente usamos a projeção estereográfica, agora de  $\mathbb{S}^3$ , para visualizar as fibras em  $\mathbb{R}^3$ . A esfera  $\mathbb{S}^3$  é dada por  $\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$  e tem, como o polo norte, o ponto  $N = (0, 0, 0, 1)$ . Projetamos do ponto  $N$  para o hiperplano  $\mathbb{R}^3$ , dado pela equação  $\delta = 0$ . Seja  $p$  um ponto da esfera com coordenadas  $(z, \gamma, \delta)$ , onde  $z \in \mathbb{C}$  corresponde às duas primeiras coordenadas e  $\delta \neq 1$ . A projeção o leva para o ponto  $\frac{1}{1-\delta}(z, \gamma) = (u, r)$  em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $u \in \mathbb{C}$  e  $r \in \mathbb{R}$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^3$ . Para  $p \in T_t$ , temos

$$\begin{cases} |u|^2 = \frac{t}{(1-\delta)^2} \\ r^2 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^2 = \frac{1-t}{(1-\delta)^2} \end{cases}$$

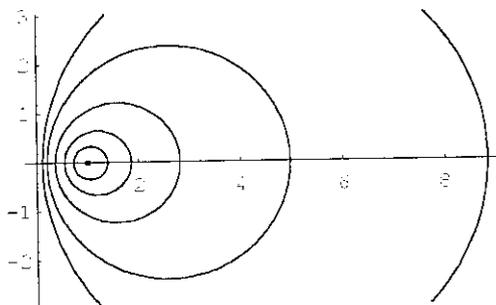
Daí obtemos  $|u|^2 + r^2 = \frac{1 - \delta^2}{(1 - \delta)^2} = -1 + \frac{2}{1 - \delta}$ , o que implica

$$(|u|^2 + r^2 + 1)^2 t = 4|u|^2.$$

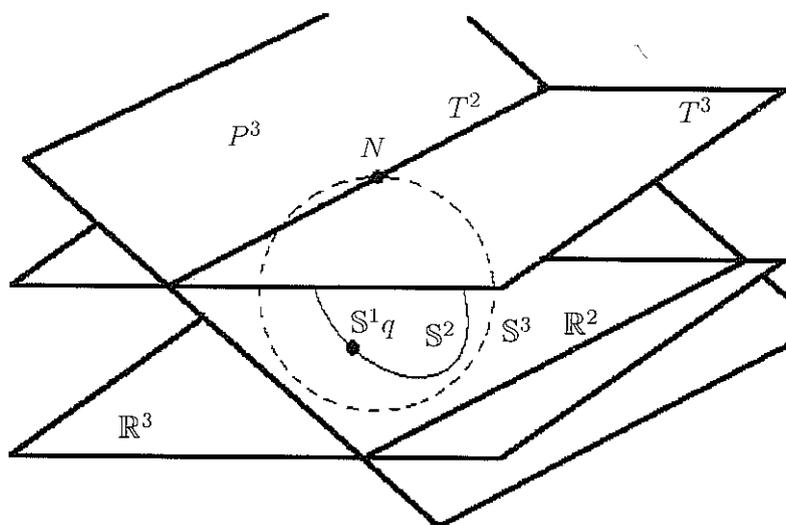
Caso  $t = 0$ , teremos o eixo  $r$ . Caso  $t \neq 0$ , dividimos ambos os membros da última expressão por  $t$  e obtemos  $|u|^2 + r^2 + 1 = \frac{2}{\sqrt{t}}|u|$ , isto é,

$$\left(|u| - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 + r^2 = \frac{1}{t} - 1.$$

Como esta equação depende somente de  $|u|$ , a imagem de  $T_t$  é uma figura de rotação em torno do eixo  $r$ . Para cada argumento de  $u$  fixo, digamos,  $0$ , obtemos a circunferência com centro em  $\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 0\right)$  e raio  $\sqrt{\frac{1}{t} - 1}$  (caso  $t = 1$ , teremos um único ponto). Quando  $t$  tende a zero, o centro da circunferência tende ao infinito; mas o raio também aumenta, de modo que a circunferência tende ao eixo  $r$ : para  $0 < t < 1$ , a função  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{1}{t} - 1} = \frac{1 - \sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}$  é positiva e tem derivada positiva,  $f'(t) = \frac{1 - \sqrt{1-t}}{2\sqrt{t^3(1-t)}}$ . Logo, uma circunferência com raio maior intercepta o plano mais perto do eixo  $r$ :



Qualquer fibra  $S^1 q$ , que é uma circunferência geodésica, é a intersecção de  $S^3$  com um plano  $P^2$  de dimensão 2 passando pela origem.



Se a geodésica não passar pelo polo norte  $N$ , então existe um único hiperplano  $P^3$  que contém o plano  $P^2$  e  $N$  (se  $S^1q$  contém o polo norte, escolhamos um hiperplano arbitrariamente). O hiperplano  $P^3$  passa pela origem e intercepta o hiperplano  $\mathbb{R}^3$  (dado pela equação  $\delta = 0$ ) ao longo de um plano  $\mathbb{R}^2$ . Denotemos por  $T^3$  o hiperplano tangente a  $S^3$  em  $N$ . É claro que  $T^3$  é paralelo a  $\mathbb{R}^3$ . Portanto  $T^2$ , a intersecção de  $T^3$  com  $P^3$ , é paralelo a  $\mathbb{R}^2$ , intersecção de  $\mathbb{R}^3$  com  $P^3$ . Por outro lado, a intersecção de  $S^3$  com  $P^3$  é uma 2-esfera  $S^2$  que contém a fibra  $S^1q$  e o polo norte  $N$ . Como  $P^3$  contém a origem, a origem é o centro da 2-esfera  $S^2$ . O plano  $T^2$  intercepta  $S^2$  em um só ponto, o polo norte  $N$ . Portanto,  $T^2$  é tangente a  $S^2$  em  $N$ . Nos pontos do hiperplano  $P^3$ , a projeção estereográfica age como projeção estereográfica de  $S^2$  para  $\mathbb{R}^2$ . A diferença entre as projeções estereográficas obtida e a "usual" reside somente na troca da "tela" por uma outra paralela, o plano  $\mathbb{R}^2$ . Assim, para provar que a imagem em  $\mathbb{R}^3$  de qualquer fibra é uma circunferência plana, é suficiente provar que a projeção estereográfica "usual" leva uma geodésica de  $S^2$  numa circunferência plana de  $\mathbb{R}^2$ .

Qualquer geodésica de  $S^2$  é uma secção plana da esfera, logo é definida pelas equações

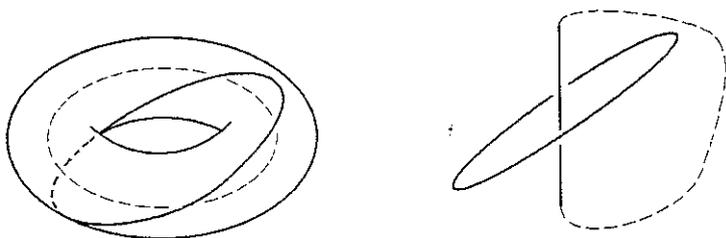
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

onde  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ . O ponto da esfera com coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$

projeta-se no ponto do plano (tangente a  $\mathbb{S}^2$  no polo sul  $S$ ) com coordenadas  $\frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2) = (u_1, u_2)$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são as coordenadas do plano tangente a  $\mathbb{S}^2$  no polo sul  $S$ .

Também se pode verificar, que a projeção da geodésica em  $\mathbb{R}^3$  completa exatamente uma volta em cada circunferência coordenada do toro.<sup>4</sup>

Assim, todas fibras em  $\mathbb{R}^3$  são as circunferências planas diagonais dos toros. Todas estas circunferências em  $\mathbb{R}^3$  são interrelacionadas<sup>5</sup>: e, realmente, se elas estiverem em toros diferentes, então podemos realizar uma isotopia da circunferência do toro menor no toro degenerado, mantendo o mesmo interrelacionamento entre si. Neste caso, temos o interrelacionamento simples. Caso as circunferências estejam num mesmo toro, é fácil ver o mesmo interrelacionamento. Enfim, observemos que o eixo  $r$ , como circunferência degenerada, está interrelacionada com outras da mesma maneira:

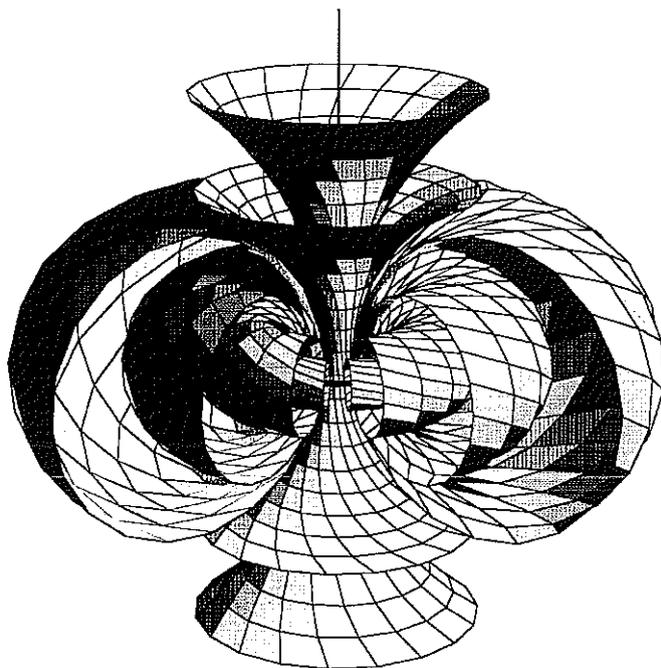


<sup>4</sup>Consideremos a fibra  $\mathbb{S}^1 q = \{\varepsilon q \mid \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\}$ . Ponhamos  $q = (z, w)$  e  $\varepsilon = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Podemos supor que  $1 \neq w \in \mathbb{R}^+$ . Como  $q \in \mathbb{S}^3$ , assim  $|z|^2 + w^2 = 1$ . A imagem de  $\varepsilon q = (\varepsilon z, w \cos \varphi, w \sin \varphi)$  é igual a  $\frac{1}{1-w \sin \varphi}(\varepsilon z, w \cos \varphi) = (u, r)$ .

Como  $\frac{1}{1-w \sin \varphi} > 0$ , assim  $\arg u = \varphi + \arg z$ . Já sabemos que o ponto  $(v(\varphi), r(\varphi)) = \left( |u| - \frac{1}{|z|}, r \right) = \left( \frac{|z|^2 - 1 + w \sin \varphi}{(1-w \sin \varphi)|z|}, \frac{w \cos \varphi}{1-w \sin \varphi} \right)$  pertence à circunferência  $C$  dada pela equação  $v^2 + r^2 = \frac{1}{|z|^2} - 1$ . Como  $\frac{dv}{d\varphi} = \frac{|z|^2 w \cos \varphi}{(1-w \sin \varphi)^2}$  e  $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{w(\sin \varphi - w)}{(1-w \sin \varphi)^2}$ , é fácil ver que o ponto  $(v(\varphi), r(\varphi))$  passa por  $C$  exatamente uma vez, quando  $\varphi$  vai de 0 a  $2\pi$ .

<sup>5</sup>Recordemos aqui que duas circunferências espaciais são ditas *interrelacionadas* caso não se interseptem e quaisquer discos, que as tenham como fronteira, o fazem

A figura abaixo mostra a estrutura resultante:



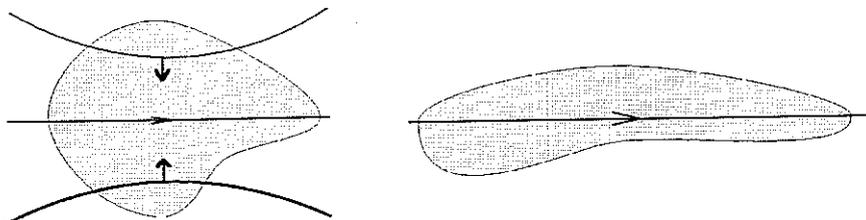
Na verdade, usamos toros somente para entender a situação: o fibrado de Hopf  $\chi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é o fibrado apenas de circunferências, cujo “número” é igual ao “número” de pontos na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Em outras palavras, a esfera de Riemann é uma lista de fibras.

Finalmente, tentamos imaginar a vida nas esferas.

Da física sabemos que um corpo que não sofre a ação de nenhuma força externa, se move em movimento retilíneo uniforme ou, pelo menos, isso ocorre com seu centro de massa. Qualquer ponto do corpo também tende a se deslocar uniformemente ao longo de uma reta. No caso de uma esfera, a reta é uma geodésica. Assim, quando um corpo unidimensional de uma 1-esfera (circunferência)  $\mathbb{S}^1$  se move ao longo da sua única geodésica, todos os pontos do corpo se deslocam em uma “reta”, a distância entre os pontos está preservada e... a vida na 1-esfera é bem trivial.

Agora, quando um corpo bidimensional se desloca na esfera  $\mathbb{S}^2$ , seu

centro de massa descreve uma geodésica  $G$ . Todo ponto fora de  $G$  descreve um círculo menor da esfera, logo sofre a ação de uma força centrípeta:



Se o movimento for bastante rápido e o corpo não for muito rígido, ele tende a se comprimir ao movimentar-se ao longo de  $G$ .

Agora vamos tratar do caso da esfera  $\mathbb{S}^3$ .

**Lema.** Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  dois quatérnios com  $|q_1| = |q_2| = 1$ . Então existem  $q', q'' \in \mathbb{H}$  tais que  $|q'| = |q''| = 1$ ,  $q'q_1q'' \in \mathbb{C}$  e  $q'q_2q'' = 1$

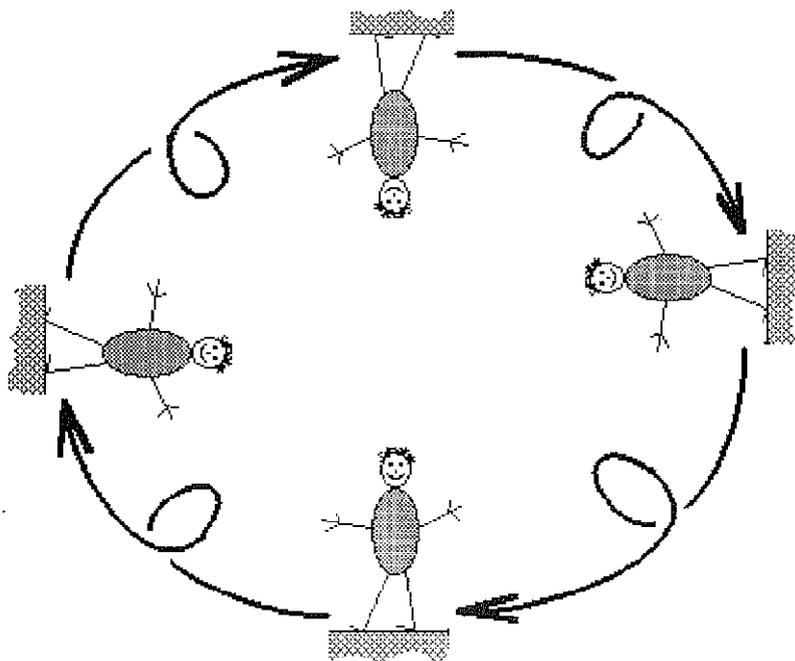
**Demonstração.** Multiplicando  $q_1$  e  $q_2$  a esquerda por  $q_2^{-1}$ , podemos supor que  $q_2 = 1$ . Procuramos  $q \in \mathbb{H}$  tal que  $|q| = 1$  e  $qq_1q^{-1} \in \mathbb{C}$ . Ponhamos  $q = x + y \cdot j$  e  $q_1 = a + b \cdot j$ , onde  $x, y, a, b \in \mathbb{C}$ . Usando as igualdades  $j \cdot x = \bar{x} \cdot j$  (ou  $j \cdot \bar{x} = x \cdot j$ ),  $j \cdot y = \bar{y} \cdot j$ ,  $j^2 = -1$  e  $\bar{x}x + y\bar{y} = 1$ , é fácil ver que  $q^{-1} = \bar{x} - y \cdot j$ . Temos  $qq_1q^{-1} = (x + y \cdot j)(a + b \cdot j)(\bar{x} - y \cdot j) = (xa + y\bar{a} \cdot j + xb \cdot j - y\bar{b})(\bar{x} - y \cdot j) = xa\bar{x} + y\bar{a}x \cdot j + xbx \cdot j - y\bar{b}\bar{x} - xay \cdot j + y\bar{a}\bar{y} + x\bar{b}\bar{y} + y\bar{b}y \cdot j = ax\bar{x} - \bar{b}\bar{x}y + \bar{a}y\bar{y} + bx\bar{y} + (\bar{a}xy + bx^2 - axy + \bar{b}y^2) \cdot j$ . Precisamos da igualdade

$$\bar{a}xy + bx^2 - axy + \bar{b}y^2 = 0.$$

Se  $b = 0$ , não temos nada para fazer (fazemos apenas  $q = 1$ ). Se  $b \neq 0$ , vemos que  $y = 0$  implica  $x = 0$ . Por isto, suponhamos que  $y \neq 0$  e denotemos  $z = x/y$ . Agora nossa equação tem a forma:  $bz^2 + (\bar{a} - a)z + \bar{b} = 0$ . Denotemos por  $z_0$  a solução da equação, que existe em  $\mathbb{C}$ . A condição  $|q| = 1$  é equivalente à igualdade  $(|z_0|^2 + 1)y^2 = 1$ . A partir daí podemos calcular o nosso  $y \in \mathbb{R}^+$ .

Suponhamos que o centro de massa  $c$  de um corpo  $K$  se movimenta ao longo de uma geodésica  $G$ . Sejam  $q_1, q_2 \in G \subset \mathbb{H}$  dois pontos distintos.

Aplicando o Lema demonstrado, podemos supor que  $q_1 \in \mathbb{C}$  e  $q_2 = 1$ , pois a multiplicação por um quaternião unitário preserva propriedades métricas. Em outras palavras,  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $G = \mathbb{S}^1$  e  $c$  está na posição  $\varepsilon(t) = e^{2\pi t}$  no momento  $t$ . Sejam  $c = 1, p_1, p_2, \dots \in K$  (no instante  $t = 0$ ). Então as distâncias entre  $\varepsilon(t), \varepsilon(t)p_1, \varepsilon(t)p_2, \dots$  são as mesmas. Isto significa que todos os pontos de  $K$  se movimentam ao longo das fibras, pois toda fibra é uma geodésica e, em tal movimento,  $K$  não sofre a ação de nenhuma força. Assim, o corpo  $K$  gira em torno do seu centro:



**Agradecimento** Os autores agradecem ao Professor Silvio Pregnotatto pelas correções do estilo, o que lhe daria o direito de ser considerado co-autor do artigo. O único motivo pelo qual isso não ocorre é que os autores não gostariam de responsabilizá-lo pelas demais incorreções.

## Referência

N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, 9th ed., Princeton University Press, New Jersey 1974.

*Andrei Marénitch (aluno de graduação),*

*Alexandre Ananin*

*Yuri Bozhkov*

*Departamento de Matemática*

**IMECC-UNICAMP**

*13083-970 - Campinas - SP*