

## Equações diferenciais reversíveis

Marco Antônio Teixeira<sup>1</sup> e Jiazhong Yang<sup>2</sup>

### 1 Introdução

O objetivo do presente trabalho é colocar em foco uma área emergente situada na física-matemática conhecida como “Sistemas Reversíveis” (“time-reversible systems”) e que tem sido alvo de estudo, nas últimas décadas, por inúmeros matemáticos e físicos.

Primeiramente observemos que simetrias surgem naturalmente em muitos fenômenos que evoluem em função do tempo. Em particular sistemas dinâmicos reversíveis possuem propriedades simétricas reversas, isto é, quando se percorre um arco de uma trajetória durante um tempo  $t_0$ , o arco correspondente da trajetória simétrica é percorrido no tempo  $-t_0$ . Encontramos uma lista enorme de exemplos envolvendo simetrias reversas em vários ramos da ciência tais como, mecânica clássica, termodinâmica, mecânica celeste, cristalografia etc... Uma característica interessante de um Sistema Reversível é seu aspecto híbrido, eis que ele pode apresentar um comportamento local conservativo ou dissipativo dependendo da proximidade com seu eixo de simetria. Poincaré usou conceitos fundamentados em simetrias reversas em sua obra clássica [PO] e também Birkoff em [BIK1] e [BIK2] usou reversibilidade em seu estudo sobre o problema restrito dos 3 corpos. Mais recentemente, Moser [MO1-3], Bibikov and Pliss [BIP] e Devaney [DE1] realizaram estudos sistemáticos sobre a matéria em questão. Sugerimos ao leitor interessado a leitura de [CH1, LA1-2, RQU, SE1-2] que oferecem apresentações

<sup>1</sup>Apoio Fapesp 97/10735-3 e PRONEX 76.97.1080/00.

<sup>2</sup>Apoio Fapesp 97/00695-4.

compreensíveis e elegantes, além de uma enorme bibliografia. No final desta exposição apresentamos também uma lista de referências que estão diretamente ligadas ao assunto em pauta neste artigo.

O nosso interesse é apresentar uma exposição breve e elementar sobre Sistemas Dinâmicos Reversíveis Lineares, evitando tecnicidades e demonstrações. Assim pretendemos discutir o comportamento qualitativo de certos campos vetoriais reversíveis em torno de um ponto de equilíbrio. Restringir-nos-emos aos sistemas definidos por equações diferenciais autônomas no  $\mathbb{R}^4$ . Vale a pena dizer que sistemas que apresentam termos não lineares podem ser mais precisos na representação de certos modelos. Os artigos [RQU] e [LA2] apresentam uma vasta discussão sobre o assunto, além de uma extensa bibliografia.

O conceito de reversibilidade de um campo de vetores está intrinsecamente ligado a uma dada involução. Lembramos que uma involução sobre  $\mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo  $\varphi$  satisfazendo  $\varphi \circ \varphi = Id$  e um campo de vetores  $X$  sobre  $\mathbb{R}^n$  é reversível (relativo a  $\varphi$ ) se a seguinte identidade for satisfeita:

$$D\varphi(p).X(p) = -X(\varphi(p)) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^n.$$

A partir desta definição podemos deduzir que se  $\gamma(t)$  é uma órbita de  $X$  então  $\varphi(\gamma(t))$  também o é mas ambas tendo direções reversas com relação ao tempo. O conjunto  $S$  dos pontos fixos de  $\varphi$  (o eixo de simetria de  $X$ ) ocupa uma posição de destaque diante do estudo do espaço de fase do campo vetorial. Assim por exemplo se uma órbita de  $X$  encontrar  $S$  em dois pontos distintos então necessariamente ela é uma órbita periódica. Procedimentos semelhantes podem ser usados para detectar dentro do mundo reversível órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

A título de ilustração da definição acima observamos que os campos vetoriais: (i)  $X(x, y) = (ay, bx)$  sobre o  $\mathbb{R}^2$  é reversível relativo à involução  $\varphi(x, y) = (x, -y)$  e (ii)  $X(x, y, z, w) = (a_1y + a_2w, b_1x + b_2z, c_1y + c_2w, d_1x + d_2z)$  sobre o  $\mathbb{R}^4$  é reversível relativo à involução  $\varphi(x, y, z, w) = (x, -y, z, -w)$ .

No caso de  $L$  ser uma involução linear sobre o  $\mathbb{R}^n$  e o sistema  $X$  estar representado pela equação linear  $\dot{x} = Ax$ , um cálculo elementar mostra que:  $X$  é  $L$ -reversível se e somente se  $AL = -LA$ .

A restrição à dimensão 4 pode parecer a primeira vista uma simplificação; entretanto os fatos que se seguem podem conduzir a uma conclusão diferente: (1) certas técnicas matemáticas permitem em muitos

casos reduzir o problema em dimensões superiores para este caso; (2) muitos problemas provenientes da Mecânica são descritos por sistemas no  $\mathbb{R}^4$ ; (3) frequentemente encontramos fenômenos onde a Dimensão 4 é a menor possível capaz de descrevê-los.

Ressaltamos ainda que difeomorfismos (aplicações primeiro retôrno), provenientes de órbitas periódicas de campos de vetores reversíveis possuem dinâmicas interessantes e merecem uma atenção especial (veja por exemplo [DEV] e [JT1-3]).

Este artigo está organizado na seguinte maneira. No Capítulo 2 apresentamos definições, exemplos e algumas propriedades básicas de sistemas reversíveis. Neste capítulo também apresentamos um comentário sobre o avanço da teoria nas últimas três décadas. O Capítulo 3 é dedicado à classificação das equações lineares reversíveis e em cada caso é feita uma análise do comportamento das soluções em torno de um ponto de equilíbrio. Ressaltamos que tal classificação é ilustrada por exemplos e uma breve discussão acompanha cada caso.

## 2 Conceitos básicos

Considere  $X$  um campo de vetores reversível (relativo a uma involução  $\varphi$ ) sobre o  $\mathbb{R}^n$  representado pela seguinte equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $f(x)$  é uma função sem termos constantes ou parte linear.

Vamos supor que o conjunto  $S = \{p \in \mathbb{R}^n : \varphi(p) = p\}$  é uma superfície de dimensão  $k$ . Uma órbita  $\gamma$  de  $X$  é *simétrica* se  $\varphi(\gamma) = \gamma$ ; um ponto de equilíbrio  $p$  é *simétrico* se  $\varphi(p) = p$ .

**Exemplo 2.1** Consideremos o seguinte modelo proveniente da Mecânica Clássica (um par de osciladores harmônicos tendo frequências iguais) expressado por:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_3, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_4, \quad \dot{x}_3 = -\alpha x_1, \quad \dot{x}_4 = -\alpha x_2,$$

onde  $\alpha > 0$ . Podemos perceber que este sistema possui dois pares de autovalores complexos  $\pm i\alpha$ . Mais ainda, êle é reversível com relação à involução  $R(x_2, x_1, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_3, -x_4)$ .  $\square$

**Exemplo 2.2** Um campo de vetores  $X = (f, g)$  no plano é reversível relativo a involução  $\varphi(x, y) = (x, -y)$  se e somente se  $f$  é uma função par e  $g$  uma função ímpar em relação a variável  $y$ . Observemos que neste caso o eixo de simetria de  $X$  é dado por  $S = \{y = 0\}$ .  $\square$

**Exemplo 2.3** Um campo de vetores sobre o  $\mathbb{R}^2$  expressado por  $X(x, y) = (f(x, y), -f(y, x))$  é reversível relativo a involução  $\varphi(x, y) = (y, x)$ . Observe que neste caso,  $S = \{y = x\}$ .  $\square$

**Exemplo 2.4** Considere o seguinte campo de vetores no  $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x} = y + ay\mathbb{R}^2, \quad \dot{y} = -x - ax\mathbb{R}^2, \quad \dot{z} = \lambda w + bw\rho^2, \quad \dot{w} = -\lambda z - bz\rho^2,$$

onde  $\mathbb{R}^2 = x^2 + y^2$  e  $\rho^2 = z^2 + w^2$ , que é reversível relativo a involução  $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, z, -w)$ . O eixo de simetria do sistema é o plano  $S = \{x = 0, w = 0\}$ . Este sistema possui em torno da origem toros bi-dimensionais invariantes com respeito ao fluxo do  $X$ .  $\square$

Gostaríamos de lembrar que localmente qualquer involução pode ser linearizada através de uma mudança de coordenadas. A prova deste fato não é difícil e ela pode ser encontrada em [MZ].

A seguir listaremos algumas propriedades conhecidas de um campo vetorial reversível  $X$ .

- O espaço de fase de  $X$  é simétrico em relação a  $S$ .
- Uma órbita periódica  $\gamma$  é simétrica se e somente se  $S \cap \gamma \neq \emptyset$ . Se  $\gamma(t)$  é uma solução de  $X$  então  $\varphi(\gamma(-t))$  também o é.
- Pontos de equilíbrio assimétricos ou órbitas periódicas assimétricas ocorrem aos pares. Além disso a involução associada intercambia as variedades estáveis e instáveis contidas no espaço de fase.
- Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  (em (1)) também o são  $-\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ . Em particular, no  $\mathbb{R}^4$ , se soubermos que  $\lambda = \alpha + i\beta$ , com  $\alpha\beta \neq 0$  então podemos deduzir facilmente que  $\pm\alpha \pm i\beta$  são todos os autovalores da matriz.

## 2.1 Um pouco de história

A famosa teoria KAM, estabelecida por Komolgorov [KOL], Moser [MO3] e Arnol'd [AR2,3], trata principalmente da persistência de toros invariantes quando se perturba sistemas integráveis. Nos anos 60 Moser

[MO1], e Bibikov/Pliss [BIP] afirmaram que a Teoria KAM poderia ser aplicada aos sistemas reversíveis. Mais tarde Sevryuk [SE1] e Broer/Huitema/Sevryuk [BHS], entre outros, estudaram este problema.

Em 1976 Devaney [DE1] ofereceu uma importante contribuição ao estudo de Sistemas Reversíveis. Um dos resultados obtidos por ele, foi o equivalente, dentro do ambiente reversível, do clássico Teorema do Centro de Lyapunov envolvendo a existência de famílias de órbitas periódicas. Outras extensões deste teorema podem ser encontrados, por exemplo, no trabalho de Golubistky et al em [GOL].

Desde então um grande número de matemáticos e físicos tem se interessados em Sistemas Reversíveis. Uma das motivações seria a grande similaridade existente entre Sistemas que Preservam Volume, Sistemas Solenoidais, Sistemas Hamiltonianos e Sistemas Reversíveis. Veja por exemplo os livros de Mackay [MAC] e Broer/Huitema/Sevryuk [BHS]. Deveremos enfatizar também que as propriedades simétricas que os sistemas reversíveis possuem também as encontramos na maioria dos sistemas mecânicos. Em outras palavras, um estudo sistemático envolvendo reversibilidade seria muito bem vindo para o desenvolvimento da Mecânica Clássica.

### 3 Campos lineares em 4D

Consideremos o campo de vetores  $X$  no  $\mathbb{R}^4$  definido por

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (2)$$

onde,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $A$  é uma matriz  $4 \times 4$ , reversível em relação a involução

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4).$$

Vale a pena observar que esta última hipótese não chega ser uma forte restrição. Observemos que o eixo de simetria de  $X$  é  $S = \{x_2 = x_4 = 0\}$ .

Sabemos que os autovalores da matriz  $A$  são obtidos através do seu polinômio característico

$$p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = 0.$$

Das relações  $R \circ R = Id$ , e  $AR = -RA$  extraímos

$$p(\lambda) = \text{Det}((AR - \lambda R)R) = \text{Det}(AR - \lambda R)\text{Det}R = \\ \text{Det}(-RA - \lambda R)\text{Det}R = (\text{Det}R)^2 \text{Det}(-A - \lambda I) = \text{Det}(A + \lambda I) = p(-\lambda).$$

Dai o polinômio característico toma a seguinte forma:

$$\lambda^4 - b\lambda^2 + a = 0, \quad (3)$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros reais. A classificação de tais campos de vetores vai depender exclusivamente da variação de tais parâmetros. Assim temos as seguintes possibilidades:

- A equação (3) possui quatro autovalores distintos. Este é um caso genérico e contém os seguintes subcasos:

(i) dois pares de autovalores complexos  $\pm(\alpha \pm i\beta)$ ;

(ii) quatro raízes reais  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ ;

(iii) dois autovalores reais  $\pm\alpha$  e um par de autovalores complexos puros  $\pm i\beta$ ;

(iv) dois pares de autovalores complexos puros  $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$ . Todos estes casos, são ditos de codimensão 0 e correspondem a sistemas topologicamente distintos. Sobre o plano  $\pi$  de coordenadas  $(a, b)$  (veja Figura 1) eles ocupam quatro regiões abertas distintas  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$ . As fronteiras destas regiões são curvas em  $\pi$  cuja classificação será descrita a seguir.

- A equação (3) possui raízes iguais (o caso  $a = b = 0$  está excluído). Este caso ocorre quando  $a$  e  $b$  satisfazem certas equações algébricas. Extraímos da nossa análise as seguintes curvas (veja Figura 1):

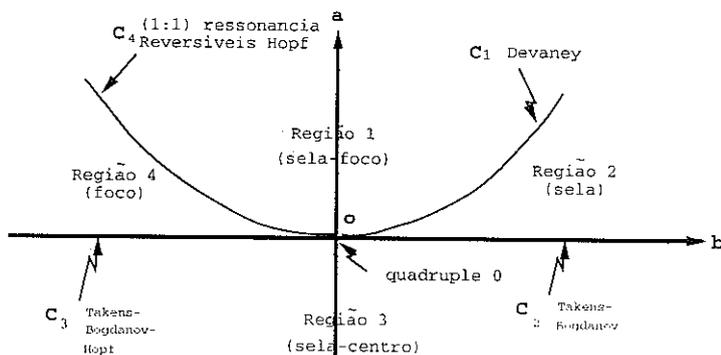
(i)  $C_1$  : onde temos dois pares de raízes reais iguais  $\pm\alpha, \pm\alpha$ ;

(ii)  $C_2$  : um par de raízes reais e  $\lambda = 0$  como raiz dupla;

(iii)  $C_3$  : um par de raízes imaginárias puras e  $\lambda = 0$  como raiz dupla;

(iv)  $C_4$  : dois pares de raízes imaginárias puras  $\pm i\beta, \pm i\beta$ .

Qualquer sistema satisfazendo qualquer um destes casos poderá ser citado como sendo uma singularidade de codimensão um.



**Figura 1:** Classificação das Sistemas Reversíveis Lineares

- A equação (3) possui quatro raízes identicamente nulas o que corresponde ao caso  $a = b = 0$ . Este é o caso de codimensão 2.

Na Figura 2 esquematizamos as regiões acima descritas em função dos autovalores. Através dele podemos facilmente diferenciar os tipos topológicos de cada caso enunciado acima.

### 3.1 Região $R_1$

Os campos de vetores nesta região são do tipo *sela - foco* e a sua forma normal é dada por

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2, \quad \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + \beta x_4, \quad \dot{x}_4 = -\beta x_3 - \alpha x_4.$$

As órbitas do campo vetorial espiralam em torno da origem. Os campos de vetores cujas partes lineares são do tipo  $R_1$  podem ser facilmente encontrados entre os Sistemas KdV (veja por exemplo em [CH2, DE2-3, HAR]).

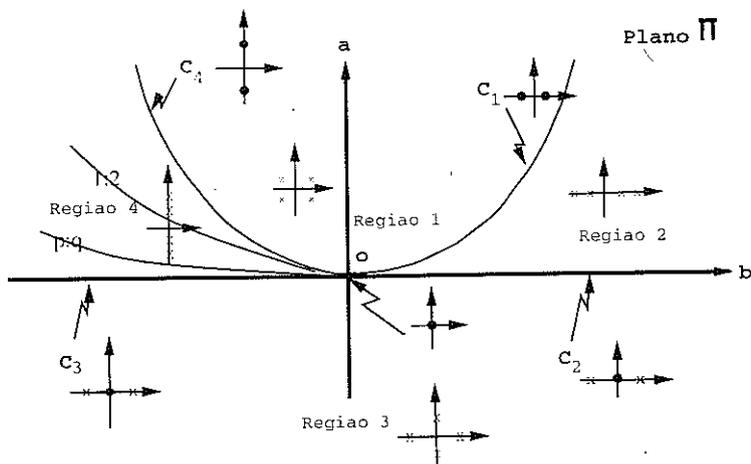


Figura 2: Característica dos Autovalores

### 3.2 Região $R_2$

O espaço de fase de um campo vetorial nesta região possui uma descrição simples devido a sua hiperbolicidade (i.e. os autovalores possuem parte reais não nulas).

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -\alpha_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = \alpha_2 x_3, \quad \dot{x}_4 = -\alpha_2 x_4.$$

Tais campos de vetores podem ser encontrados em Sistemas KdV, Sistemas Hamiltonianos, Fibras Óticas, etc.... Veja referências em [ABL, CHM].

### 3.3 Região $R_3$

Nesta região o campo vetorial é do tipo sela-centro. Sua forma normal é

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2, \quad \dot{x}_3 = \beta x_4, \quad \dot{x}_4 = -\beta x_3.$$

Observe que os planos  $x_1 x_2$  e  $y_1 y_2$  são invariantes e poderemos encontrar aplicações deste tipo de campos de vetores no estudo do Pêndulo

Duplo, no Problema dos 3 Corpos e outros. Veja [LMS,MHR] para mais detalhes.

### 3.4 Região $R_4$

Neste caso todos os autovalores possuem partes reais nulas e a dinâmica do campo vetorial em torno da origem é do tipo foco. A sua forma normal é

$$\dot{x}_1 = \beta_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta_1 x_1, \quad \dot{x}_3 = \beta_2 x_4, \quad \dot{x}_4 = -\beta_2 x_3.$$

A dinâmica de  $X$  restrito aos planos  $x_1x_2$  e  $x_3x_4$  é do tipo centro. Suas trajetórias estão contidas nas curvas  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$  e  $x_3^2 + x_4^2 = b^2$ .

#### Observação:

Para um sistema  $X$  dado por (1), se o ponto de equilíbrio é hiperbólico (casos  $R_1$  e  $R_2$ ) então pelo Teorema de Hartman (em [HAT]), a descrição qualitativa de seu espaço de fase pode ser feita a partir de sua parte linear. De certa forma o sistema é equivalente a sua aproximação linear em 0. Sobre a região  $R_3$ , devido ao Teorema da Variedade Central (veja em [AP]) a análise da dinâmica de  $X$  em torno de 0 pode ser de certa forma levada ao estudo do campo restrito ao plano  $x_3x_4$ . De uma maneira geral, devido a não-hiperbolicidade do campo (em 0), sobre as Regiões  $R_3$  e  $R_4$  o sistema (1) está longe de ser descrito pela sua parte linear. Em outras palavras, ao contrário das duas primeiras regiões, a parte linear não reflete a dinâmica do sistema.

### 3.5 Curva $C_1$

Sobre esta curva o sistema possui autovalores  $\pm\alpha, \pm\alpha$  ambos com multiplicidade 2. Estamos supondo genericamente que a matriz  $A$  é não diagonalizável e na forma de Jordan ela é expressada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

O nosso sistema possui a seguinte forma normal:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + y_1, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + y_2, \quad \dot{x}_3 = \alpha x_3, \quad \dot{x}_4 = -\alpha x_4.$$

Os sistemas contidos na curva  $C_1$ , assim como famílias a um parâmetro de campos transversais a ela tem sido estudadas em diversos contextos, mesmo no caso não reversível. Quando atravessamos a curva  $C_1$ , passando da região  $R_1$  para a região  $R_2$ , os tipos de ponto de equilíbrio mudam de *sela - foco* para *sela*. Tal fenômeno é chamado de bifurcação de Belyakov-Devaney (veja em [BEL,DE2]).

### 3.6 Curva $C_2$

Os sistemas contidos nesta curva são chamados de Bifurcação do tipo Takens-Bogdanov Reversível. Uma maneira usual de estudar sistemas possuindo tal parte linear é usando o Teorema da Variedade Central (em [AP]). Uma forma normal genérica para os elementos de  $C_2$  é:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = \alpha x_3, \quad \dot{x}_4 = -\alpha x_4.$$

Quando cruzamos tal curva os pontos de equilíbrio mudam de *sela* para *sela - centro*. Um estudo mais aprofundado deste caso pode ser encontrado em [IK1,KI].

### 3.7 Curva $C_3$

Este caso corresponde a um par de autovalores imaginários puros  $\pm i\beta$  e 0 como um autovalor duplo. Tal caso intitula-se Bifurcação do tipo Takens-Bogdanov-Hopf Reversível. Genericamente, ao longo desta curva  $X$  possui a seguinte forma normal:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = \beta x_4, \quad \dot{x}_4 = -\beta x_3.$$

Ao cruzarmos esta curva o sistema passa de um *foco* para uma *sela - centro*. Em [IK1,AMI], encontra-se um estudo mais aprofundado deste caso.

### 3.8 Curva $C_4$

Este caso é sem dúvida o caso mais interessante. Ele envolve dois pares iguais de autovalores imaginários puros e convencionalmente é chamado de ressonância do tipo  $(1 : 1)$ . Para aplicações deste caso recomendamos o trabalho de Iooss e Peroueme em [IP1]. A sua forma normal genérica é

$$\dot{x}_1 = \beta x_2 + y_1, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_1 + y_2, \quad \dot{y}_1 = \beta y_2, \quad \dot{y}_2 = -\beta y_1.$$

É importante mencionar que no interior da região  $R_4$  existem curvas que expressam as chamadas  $(p : q)$ -ressonâncias ( $p$  e  $q$  são inteiros) que é motivo de pesquisas de diversos autores. Uma ressonância do tipo  $(p : q)$  aparece quando o sistema possui dois pares de autovalores imaginários puros  $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$  tais que a razão entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$  é  $\frac{p}{q}$ . As ressonâncias mais interessantes além do caso  $(1 : 1)$  são aquelas do tipo  $(1 : N)$  com  $N = 2, 3, 4$ . Um cálculo direto permite caracterizar cada ressonância acima no plano  $\pi$  (veja Figura 2); elas são expressadas por

$$a = \frac{p^2 q^2}{(p^2 + q^2)^2} b^2, \quad b < 0.$$

### 3.9 Caso $a = b = 0$

Finalmente chegamos ao ponto  $(0, 0) \in \pi$ . Neste caso os campos de vetores possuem todos os autovalores nulos. Em [10] existe um estudo envolvendo este caso, e genericamente a sua forma normal é:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = 0.$$

## 4 Comentários finais

Para concluir, gostaríamos de fazer algumas observações, agora de caráter mais geral envolvendo campos de vetores  $X$  no  $\mathbb{R}^4$ , não necessariamente lineares.

Fixemos  $X$  então satisfazendo  $X(0) = 0$  de tal forma que os autovalores da matriz  $DX(0)$  sejam  $\pm\alpha i$  e  $\pm\beta i$ . Um dos problemas atuais importantes neste contexto gira em torno de encontrar uma forma normal local (eficaz) em torno da origem que possibilita detectar a existência de integrais primeiras, variedades invariantes, órbitas periódicas, toros ou cilindros invariantes. No caso de toros bidimensionais invariantes, surgem naturalmente outras questões tais como existência de fluxos irracionais e órbitas periódicas homoclínicas. Nesta direção, a classificação dada no capítulo anterior desempenha um papel importante.

Finalmente seria natural perguntar se existe neste contexto um manancial rico em problemas abertos e factíveis. Sob o nosso ponto de vista recomendaríamos um ataque aos casos ressonantes do tipo  $1 : N$ ,  $N = 1, 2, 3, 4$  e às famílias genéricas a 2-parâmetros de campos de vetores reversíveis  $X_{\alpha,\beta}$  tais que as partes lineares de  $X_{0,0}$  estejam na forma normal dada na subsecção 3.9.

## Referências

- [ABL] M. J. Ablowitz and H. Segur: **Solitons and the inverse scattering transform**. SIAM Philadelphia, 1981.
- [AMI] C.J. Amick and J.F. Toland: *Solitary waves with surface tension I: Trajectories homoclinic to periodic orbits in four dimensions*. Arch. Rat. Mech. Anal. **118** (1992), 27-69.
- [AP] D. K. Arrowsmith and C. M. Place: **An introduction to dynamic systems**. Cambridge Univ. Press, 1990.
- [AR1] V. Arnold: **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations** Springer, Berlin, 1988.
- [AR2] V. Arnold: *Proof of a theorem by A.N. Kolmogorov on the persistence of quasiperiodic motions under small perturbations of the hamiltonian*. Russ. Math. Surv. **18** (5) (1963) 9-36.
- [AR3] V. Arnold: *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*. Russ. Math. Surv. **18** (6) (1963) 85-191.
- [BEL] L. A. Belyakov: *Bifurcation of systems with homoclinic curva of a saddle-focus with saddle quantity zero*. Mat. Zam. **36** (1984), 838-843.
- [BIP] Yu. N. Bibikov and V. A. Pliss: *On the existence of invariant tori in a neighborhood of the zero solution of a system of ordinary differential equations*. Diff. Eqs. **3** (1976) 967-976.
- [BIK1] G. D. Birkhoff: *The restricted problem of three bodies*. Rend. Circ. Mat. Palermo. **39** (1915) 265-334.

- [BIK2] G. D. Birkhoff: **Dynamical systems**. *Am. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. IX, American Mathematical Society, Ann Harbor, MI. 1927.
- [BHS] H. W. Broer, G. B. Huitema and M. B. Sevryuk: Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order amidst chaos. *Lecture Notes in Mathematics*, V.1645, 1996.
- [CH1] A. R. Champneys: Homoclinic orbits in reversible systems and applications in mechanics, fluids and optics. *Physica D*, **112** (1998) 158-186.
- [CH2] A. R. Champneys: Subsidiary homoclinic orbits to a saddle-focus for reversible systems. *Int. J. Bifurc. Chaos* **4** (1994), 1447-1482.
- [CHM] A. R. Champneys and M. D. Groves: A global investigation of solitary wave solutions to a two-parameter model for water waves. *J. Fluid Mech.* **342** (1997), 199-229.
- [DE1] R. L. Devaney: **Reversible diffeomorphisms and flows**. *Transactions of the American Mathematical Society* **218** (1976), 89-113.
- [DE2] R. L. Devaney: Homoclinic orbits in Hamiltonian systems. *J. Diff. Eqs.* **21** (1976), 431-438.
- [DE3] R. L. Devaney: Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 247-263.
- [GOL] M. Golubitsky, M. Krupa and C. Lim: Time-reversibility and particle sedimentation. *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), 49-72.
- [HAR] J. Härterich: Cascades of reversible homoclinic orbits to a saddle-focus equilibrium. *Physica D* **112**, (1998) 187-200.
- [HAT] P. Hartman, **Ordinary Differential Equations**, New York, London: John Wiley & Sons, 1964.
- [IK1] G. Iooss and K. Kirchgassner: Water waves for small surface tension: an approach via normal form. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* **112** (1992), 267-300.

- [IO] G. Iooss: A codimension 2 bifurcation for reversible vector fields (preprint).
- [IP1] G. Iooss and M.C. Pérouème: *Perturbed homoclinic solutions in reversible (1 : 1) resonance vector fields*. J. Diff. Eq. **102**, No. 1 (1993), 62-88.
- [JT1] A. Jacquemard, M. A, Teixeira: *Effective algebraic geometry and normal forms of reversible mappings* (preprint) Université de Bourgogne **94** (1996).
- [JT2] A. Jacquemard, M. A, Teixeira, Bifurcations of singularities of reversible mappings in  $\mathbb{R}^3$ , preprint, Université de Bourgogne **95** (1997) a aparecer em *Dynamycs of Cont. Disc. and Impulsive Sys.*.
- [JT3] A. Jacquemard, M. A, Teixeira: Reversible normal forms of degenerate cusps for planar diffeomorphisms. (preprint) Université de Bourgogne, **101** (1997) a aparecer em Bull. des Sc. Math..
- [KI] K. Kirchgassner: *Nonlinearly resonant surface waves and bifurcation*. Adv. Appl. Mech. **26** (1988) 135-181.
- [KOL] A. N. Kolmogorov: *On the persistence of conditionally periodic motions under a small change of the Hamilton function*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **98** (1954) 527-530.
- [LA1] J. S. W. Lamb: *Reversible symmetries in dynamical systems*. Thesis, University of Amsterdam, 1994.
- [LA2] J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts: *Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey*. Physica D **112**, (1998) 1-39.
- [LMS] J. Llibre, R. Martinez and C. Simó: *Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near  $L_2$  in the restricted three-body problem*. J. Diff. Eqs. **58** (1985), 104-156.
- [MAC] R. S. MacKay: *enormalisation in area-preserving maps*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics vol. **6**, World Scientific, Singapore, annotated version of Ph.D. Thesis, Princeton University, 1982.

- [MHR] A. Mielke, P. Holmes and O. O'Reilly: *Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near a Hamiltonian saddle-center*. J. Dyn. Diff. Eqs. **4** (1992), 95-126.
- [MO1] J. Moser: *Convergent series expansions for quasiperiodic motions*. Math. Ann. **169**, (1967) 136-176.
- [MO2] J. Moser: *Stable and Random motions in dynamical systems, with special emphasis on celestial mechanics*. Annals Math. Studies **77**, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [MO3] J. Moser: *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II, **1** (1962), 1-20.
- [MZ] D. Montgomery and L. Zippin: **Topological transformations groups**. Interscience, New York, 1995.
- [PO] H. Poincare, **Thesis** (1928), in Oeuvres **1** ILCXXXII, , Gauthier-Villars, 1951.
- [RQU] J. A. G. Roberts and G. R. W. Quispel: *Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems*. P Rep. 216 (1992), 63-177.
- [SE1] M. B. Sevryuk: *Reversible systems*. Lecture Notes in Mathematics 1211, 1986.
- [SE2] M. B. Sevryuk: *The finite-dimensional reversible KAM theory*. Physica D **112**, 132-147(1998).
- [TEI] M. A. Teixeira: *Singularities of reversible vector fields*. Physica D **100**, (1997) 101-118.

Marco Antonio Teixeira, Jiazhong Yang  
Departamento de Matemática  
IMECC-UNICAMP  
Caixa Postal 6065  
13081-970 Campinas, Brasil  
teixeira@ime.unicamp.br,  
yang@ime.unicamp.br