

# Colisões binárias no problema tetraedral simétrico com rotação

Claudio Vidal

## 1 Introdução

O problema fundamental da mecânica celeste é o problema dos  $n$ -corpos, que consiste em dar informações sobre o movimento de  $n$ -partículas materiais, submetidas unicamente á ação de suas atrações gravitacionais. Se  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  denotam os vetores posição das partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$ , o problema consiste em se resolver o sistema de equações diferenciais

$$m_i \mathbf{r}_i'' = - \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

as unidades sendo tais que a constante de gravitação é 1. Uma colisão é uma posição dos corpos com  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$  para algum  $i, j$ , com  $i \neq j$ . Se a posição inicial no problema dos  $n$ -corpos não é uma colisão, os teoremas clássicos de equações diferenciais ordinárias garantem a existência de uma única solução num intervalo maximal, digamos  $(t_*^-, t_*^+)$ . Se  $t_*^- > -\infty$  (ou  $t_*^+ < +\infty$ ) dizemos que a solução tem uma singularidade em  $t_*^-$  ( $t_*^+$ ).

O problema dos  $n$ -corpos só pode ser resolvido analiticamente para  $n = 2$ , tendo-se alguns resultados parciais para as soluções no caso  $n \geq 3$ . É por isso que para estudar e entender melhor este problema procura-se reduzir os graus de liberdade restringindo-se a atenção, por exemplo, a soluções simétricas. Isto é feito por exemplo nos trabalhos de Devaney [D1], McGehee [Mc], Lacoma [La], Lacoma e E. Percz [LaEp], Simó e R. Martínez [SiRm], onde são escolhidas massas e condições iniciais apropriadas para afirmar que as soluções tem uma configuração

geométrica particular para todo tempo. Estas configurações podem ser de tal forma que os corpos sejam colineares, ocupem os vértices de um triângulo isósceles, um trapézio, um losango ou de alguma outra configuração.

Neste trabalho consideramos quatro massas pontuais iguais,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  e, sem perda de generalidade, podemos assumir que elas são unitárias, movendo-se no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  sob a lei de atração de Newton, onde as quatro partículas formam dois binários, com um binário acima do plano  $x_1x_2$  e o outro abaixo deste plano. Ademais, o centro de massa está fixado na origem do sistema de coordenadas. Escolhemos condições iniciais tais que os corpos  $m_1$  e  $m_2$  estão sempre dispostos simetricamente com respeito ao eixo  $x_3$  e, analogamente, para o binário  $m_3$  e  $m_4$ , mas o momento angular do binário  $m_1 - m_2$  seja o oposto ao do binário  $m_3 - m_4$ , de modo que o momento angular total é nulo. Chamaremos a esta simplificação do problema dos 4-corpos no espaço de *Problema tetraedral simétrico com rotação*.

Assim, no problema tetraedral simétrico com rotação, as simetrias

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (x_1, x_2, x_3) \\ \mathbf{r}_2 &= (-x_1, -x_2, x_3) \\ \mathbf{r}_3 &= (x_1, -x_2, -x_3) \\ \mathbf{r}_4 &= (-x_1, x_2, -x_3), \end{aligned} \tag{2}$$

são preservadas pelo movimento, bem como suas velocidades. Na figura 1 apresentamos o problema.

Em virtude das simetrias do problema, o sistema tem três graus de liberdade e está unicamente determinado pela dinâmica do corpo  $r_1$ . Das equações do movimento do problema dos  $n$ -corpos, para o corpo  $r_1$  temos

$$\mathbf{r}_1'' = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_{21}^3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{r_{31}^3} + \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1}{r_{41}^3},$$

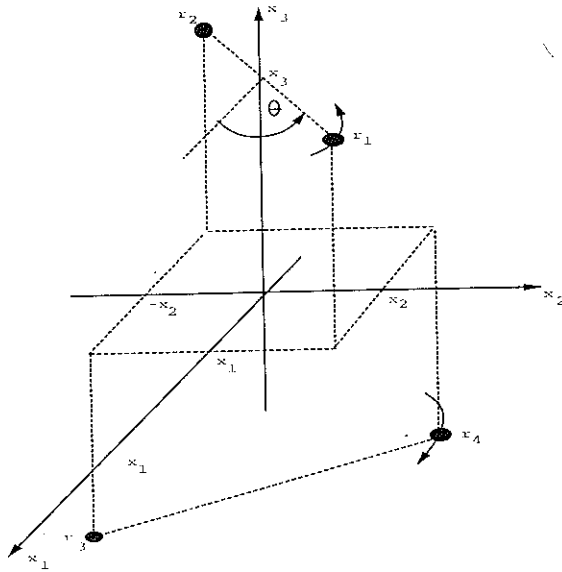


Figura 1: O problema em coordenadas cartesianas

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\frac{1}{4} x_1 \left( \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) \\ x_2'' &= -\frac{1}{4} x_2 \left( \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) \\ x_3'' &= -\frac{1}{4} x_3 \left( \frac{1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

As equações do movimento (3) podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em forma Hamiltoniana, com função Hamiltoniana

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{q}) \quad (4)$$

onde  $\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3)$  é a posição.  $\mathbf{p} = (y_1, y_2, y_3) = \mathbf{q}'$  é a velocidade de  $\mathbf{r}_1$  e

$$V(\mathbf{q}) = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \right). \quad (5)$$

Note que  $V(\mathbf{q}) < 0$  e que  $V$  é homogênea de grau  $-1$ . O sistema (3) pode ser escrito da seguinte forma :

$$\mathbf{q}' = H_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}' = -H_{\mathbf{q}} \quad (6)$$

onde  $H_{\mathbf{q}}$  (respectivamente,  $H_{\mathbf{p}}$ ) é a derivada parcial de  $H$  com respeito a  $\mathbf{q}$  (respectivamente,  $\mathbf{p}$ ). A função potencial  $V$  está definida e é analítica sobre o conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ , onde

$$\Delta = \Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}, \quad \text{com} \quad \Delta_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 / x_i = x_j = 0\},$$

ou seja,  $\Delta$  representa o conjunto das singularidades e é a união das subvariedades  $\Delta_{ij}$  de dimensão 1 em  $\mathbb{R}^3$ , que correspondem aos eixos coordenados. Logo, as equações (6) determinam um campo vetorial analítico sobre  $(\mathbb{R}^3 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^3$ .

Da análise das equações em (3) e dos conjuntos  $\Delta_{ij}$  vemos que só podem existir dois tipos de colisões: a *colisão total* e as *colisões binárias simultâneas*. A primeira ocorre na origem e foi estudada pelo autor em [Cl], trabalho no qual se faz um estudo qualitativo, por métodos analíticos, do fluxo numa vizinhança da colisão total; para tal se faz uma "explosão" ou "blow up" da singularidade, usando coordenadas tipo McGehee como em [Mc] ou [D2]. Outro importante resultado apresentado nesse artigo diz respeito à caracterização das singularidades do sistema (3) no problema tetraedral simétrico com rotação. Primeiro precisamos das seguintes definições: suponha que  $\mathbf{r}(t)$  tem uma singularidade em  $t_*$ ; esta singularidade é chamada uma *singularidade de colisão* se existe  $\mathbf{r}^* \in \Delta$  tal que  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}^*$ , quando  $t \rightarrow t_*$ . Caso contrário, a singularidade é chamada singularidade sem colisão ou uma pseudocolisão.

A questão da existência de singularidades sem colisão proposto por Poincaré e Painlevé tem sido um problema aberto por mais de um século. Para o problema de três corpos Painlevé (1897) (ver por exemplo [Di]) mostrou que todas as singularidades são devidas a colisão. Xia na sua tese de doutorado em [X] provou a existência de singularidades sem colisão num problema de 5-corpos; modificações de seu argumento permitem mostrar que tal comportamento existe no problema de  $n$ -corpos para  $n > 5$ . Esta questão ainda permanece aberta para o caso  $n = 4$ . O seguinte resultado pode ser encontrado em [Cl].

**Proposição 1** *No problema tetraedral simétrico com rotação todas as singularidades são devidas a colisão.*

Nosso principal objetivo neste artigo é analisar, por métodos analíticos, o outro tipo de singularidade, isto é, o comportamento dos corpos próximos da colisão binária simultânea. No problema em análise é possível dar bastante informação da dinâmica do fluxo numa vizinhança da colisão binária devido à simetria do problema, a qual deve-se essencialmente ao fato que as colisões binárias simultâneas são "forçadas", ou seja, se por exemplo os corpos  $m_1$  e  $m_4$  colidem então  $m_2$  e  $m_3$  colidem e esta singularidade aparece num único termo do potencial  $V$  dado em (5) associado ao problema, ou que não acontece por exemplo no problema trapezoidal estudado em [La].

O estudo das colisões binárias simultâneas será dividido em duas partes. Na primeira parte (seção 2) definindo o vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4$ , conseguimos provar o importante resultado.

**Teorema 1**  $\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} = \mathbf{e}$  para um certo vetor  $\mathbf{e}$ ; este vetor é ortogonal a  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ .

Daí concluímos que o movimento próximo da colisão binária se dá ao longo de uma direção bem definida, ou seja, os corpos numa vizinhança da colisão não se comportam de forma aleatória. Isto é conseguido observando que perto da colisão binária simultânea o problema comporta-se como dois problemas de Kepler perturbados. A segunda parte (seções 3 e 4) consiste em fazer uma explosão da colisão binária simultânea e em seu lugar introduzimos a variedade de colisão binária, que permite caracterizar o conjunto de condições iniciais que leva à colisão binária simultânea. Isto é enunciado na seguinte proposição :

**Proposição 2** *O conjunto das órbitas que terminam (começam) em colisão binária simultânea ao longo do eixo  $x_2$  é uma subvariedade diferenciável de dimensão 4.*

Finalmente, a seção 5 está dedicada às conclusões deste trabalho.

## 2 O fluxo numa vizinhança da colisão binária

Analisaremos uma solução do problema tetraedral simétrico com rotação que experimenta uma colisão binária simultânea no instante  $t_*$ . Sem perda de generalidade, assumiremos que a solução termina em colisão binária, ou seja,  $t$  tende a  $t_*$  de forma crescente. Devido às simetrias do problema, basta analisar a colisão binária simultânea que ocorre ao longo do eixo  $x_2$ , ou seja, quando colidem simultaneamente os corpos  $r_1$  e  $r_4$ ,  $r_2$  e  $r_3$  (mas que não é colisão total, assim  $x_2 \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ). Em coordenadas cartesianas isto é equivalente a ter  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow x_2^*$  e  $x_3 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_*$ , com  $x_2^* \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . A análise a seguir será feita só numa vizinhança da colisão binária, ou seja, no ponto  $(0, 0, x_2^*)$ ; portanto, podemos assumir que  $|x_2 - x_2^*| < \epsilon$ ,  $x_1^2 + x_2^2 > k$  e  $x_2^2 + x_3^2 > k$ , para certos valores de  $\epsilon$  e  $k$  constantes positivas.

Lembrando as equações (1) do problema dos  $n$ -corpos devemos ter

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1'' &= \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_{21}^3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{r_{31}^3} + \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1}{r_{41}^3} \right) \\ \mathbf{r}_4'' &= \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4}{r_{14}^3} + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4}{r_{24}^3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{r_{34}^3} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $r_{jk} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|$ .

Para analisar a colisão binária simultânea faremos a seguinte substituição:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4 = 2(x_1, 0, x_3),$$

ou seja, o vetor  $\mathbf{r}$  mantém-se no plano  $x_1 x_3$ ; segue de (7) que

$$\mathbf{r}'' = -2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{R} \quad (8)$$

onde  $r = \|\mathbf{r}\|$  e

$$\mathbf{R} = \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_{21}^3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{r_{31}^3} + \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2}{r_{24}^3} + \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3}{r_{34}^3} \right).$$

Assim,  $\mathbf{R}$  é a força exercida pela atração dos outros corpos, que em coordenadas cartesianas corresponde a

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, 0, \frac{x_3}{(x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right).$$

É importante observar que na expressão da função  $\mathbf{R}$  não aparecem termos que envolvem a colisão dos corpos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ . Logo, numa vizinhança da colisão binária temos a estimativa

**Lema 1**  $\|\mathbf{R}\| < \frac{1}{4k^{3/2}} r.$

Quando ocorre uma colisão entre os corpos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$  devemos ter que  $r \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_*$ . Assim, do lema anterior, segue que a função  $\mathbf{R}$  tem norma pequena num certo intervalo próximo da colisão. Portanto, podemos considerar a equação (8) como uma perturbação de um problema de dois corpos. Isto nos diz que a influência dos corpos  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ , quando comparada com a dos corpos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$ , não afeta o movimento do vetor definido por  $\mathbf{r}$ , próximo da colisão binária. Logo, podemos esperar que a posição do vetor  $\mathbf{r}$  comporte-se, no instante da colisão binária, da mesma forma que se a colisão entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$  fosse ter lugar num problema de dois corpos. Mas, no problema de dois corpos, uma colisão é possível só no caso de movimento retilíneo. Mostraremos que no problema tetraédral simétrico com rotação a colisão binária em análise acontece de forma semelhante.

O seguinte lema será importante para nossa análise.

**Lema 2** *Seja  $g = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}'\|^2 - \frac{2}{r}$ ; então*

1.  $g' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'$  e

2.  $\left(\frac{1}{2}r^2\right)'' - \|\mathbf{r}'\|^2 + \frac{2}{r} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r},$

onde  $\cdot$  denota o produto escalar canônico de  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração** Para (1) basta fazer o produto interno entre a expressão (8) e  $\mathbf{r}'$ . Para (2) faça o produto escalar de (8) com  $\mathbf{r}$ , e use as identidades  $(\frac{1}{2}r^2)' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ ,  $(\frac{1}{2}r^2)'' = \|\mathbf{r}'\|^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}''$  e  $(\frac{1}{2}\|\mathbf{r}'\|^2)' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$ . ■

**Lema 3** *Os seguintes limites são equivalentes:*

1.  $\lim_{t \rightarrow t_*} r \left(\frac{1}{2}r^2\right)'' = 2$

2.  $\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{1}{2} r \|\mathbf{r}'\|^2 = 2.$

**Demonstração** Multiplicando a identidade em (2) do lema 2 por  $r$  temos:

$$r \left( \frac{r^2}{2} \right)'' - r \|\mathbf{r}'\|^2 + 2 = r \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}.$$

Tomando o limite quando  $t \rightarrow t_*$  e lembrando o lema 1, obtemos a seguinte condição:

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \left\{ r \left( \frac{r^2}{2} \right)'' - r \|\mathbf{r}'\|^2 + 2 \right\} = 0, \quad (9)$$

de onde seguem-se as equivalências do lema. ■

Suponhamos que verifica-se (2) no lema 3, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{1}{2} r \|\mathbf{r}'\|^2 = 2$ .  
Segue que

$$\|\mathbf{r}'\| \rightarrow +\infty \quad \text{e logo} \quad r \|\mathbf{r}'\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow t_*,$$

de modo que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' \rightarrow 0 \quad \text{quando,} \quad t \rightarrow t_*,$$

pois  $\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\| \leq \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{r}'\|$ . Portanto, conseguimos o seguinte resultado:

**Proposição 3** *Se (2) do lema 3 se verifica, então*

$$\lim_{t \rightarrow t_*} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = 0. \quad (10)$$

Este resultado nos diz que numa vizinhança da colisão binária em estudo o momento angular é quase nulo. Observe que em coordenadas cartesianas ele é dado por

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = 4(0, 0, x_3 x_1' - x_1 x_3').$$

Da relação de energia dada por (4), temos

$$\|\mathbf{r}'\|^2 r = \frac{1}{2} + \left( 2h - x_2'^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} \right) r,$$

onde  $h$  é um valor fixo da energia total e além disso, das equações do movimento dadas em (2) e pelas condições das soluções que estamos analisando temos que  $x_2''(t)$  deve ser limitada, logo  $x_2'(t)$  é limitada numa vizinhança de  $t_*$ . Além disso, sabemos que  $\|\mathbf{r}'\| \rightarrow \infty$  e  $\|\mathbf{r}_1'\| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow t_*$  e lembrando que estamos estudando o caso onde só ocorre colisão entre os corpos  $r_1$  e  $r_4$ , obtemos a seguinte desigualdade numa vizinhança do choque binário:



**Lema 4**  $\|\mathbf{r}'\| < \frac{C}{r^{1/2}}$ , para alguma constante positiva  $C$  que depende da energia  $h$  e da vizinhança da colisão binária simultânea em análise.

Agora mostraremos que a identidade em (2) do lema 3 é válida. Dos lemas 1 e 5 segue que, numa vizinhança da colisão binária,

$$\|\mathbf{R}\|\|\mathbf{r}'\| < C r^{1/2},$$

donde

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}' \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_*,$$

Portanto, da equação (1) do lema 2 temos

$$g' \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_*$$

donde existe  $\lim_{t \rightarrow t_*} g(t)$ . Lembrando a expressão de  $g$  e como  $r \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_*$ , obtemos a informação (2) do lema 3.

A seguir, mostraremos o importante resultado, o qual afirma que a colisão binária entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$  deve ter lugar segundo um ângulo bem definido. Mais precisamente, o vetor unitário  $\frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}$  tende a uma posição limite.

**Teorema 2**  $\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)} = \mathbf{e}$  para um certo vetor unitário  $\mathbf{e}$ , o qual é ortogonal a  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ .

Deste teorema segue que nenhum dos "clusters" (agrupamentos 1-4, 2-3) entram em "spin" infinito quando os corpos colidem (problema de Painlevé-Wintner, ver por exemplo [W]).

Antes de provar este teorema precisamos dos seguintes lemas:

**Lema 5**  $\left\| \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)' \right\| \leq \frac{\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\|}{r^2}$ .

**Demonstração** Basta derivar a expressão  $\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$  e usar a identidade

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v},$$

com  $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{r}'$ . ■

**Lema 6**  $\frac{\|(\mathbf{r} \times \mathbf{r}')\|}{r^2} < \frac{1}{4k^{3/2}}$ .

**Demonstração** Basta fazer o produto vetorial da relação em (8) com  $\mathbf{r}$  e usar o lema 2.1. ■

**Demonstração do teorema 2** Do limite dado no lema (3-i) segue que  $(r^2)'' \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow t_*$ ; podemos então escolher um intervalo suficientemente pequeno em torno de  $t_*$  tal que  $(r^2)'' > 0$ , e então neste intervalo  $(r^2)'$  é uma função crescente neste intervalo. Como  $0 < r^2 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t_*$ , diminuindo o intervalo em torno de  $t_*$ , se necessário, temos que  $r^2$  é uma função monótona decrescente. Agora, integrando  $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}')'$  entre  $t$  e  $\tilde{t}$  ( $t < t_*$ ), mantendo  $t$  fixo mas próximo de  $t_*$  e fazendo  $\tilde{t} \rightarrow t_*$ , temos da proposição 3 que

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \int_{t_*}^t (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')' ds.$$

Logo, pelo lema 4, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\| &\leq \int_{t_*}^t \|(\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s))'\| |ds| \\ &\leq \int_{t_*}^t C r^2(s) |ds| \\ &\leq C \int_{t_*}^t r^2(t) |ds| \\ &\leq C r^2(t) |t - t_*|. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima segue que

$$\frac{\|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\|}{r^2(t)} < C |t - t_*|.$$

Usando o lema 5 obtemos

$$\left\| \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)' \right\| < C |t - t_*|. \quad (11)$$

e então

$$\left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)' \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_*.$$

Portanto, existe o limite de  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  quando  $t$  tende a  $t_*$ . ■

**Corolário 1**  $\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right)' \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow t_*$ .

**Demonstração** Segue do teorema 2 e da desigualdade (11). ■

**Corolário 2**  $\frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow t_*$ .

**Demonstração** Temos

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)' = \frac{\mathbf{r}'}{r} + \frac{\|\mathbf{r}\|'}{r^2} \mathbf{r}.$$

Substituindo a relação acima no limite do corolário 1, temos

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\mathbf{r}'}{r} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_*,$$

e como  $r \rightarrow 0$  segue que

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r}' \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_*.$$

Além disso, já foi mostrado anteriormente que  $\|\mathbf{r}'\| \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow t_*$ , e o resultado segue. ■

O corolário acima nos diz que a trajetória de  $\mathbf{r}(t)$  é praticamente uma linha reta para  $t$  próximo de  $t_*$ , e logo

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{e} \quad \text{ou} \quad -\mathbf{e}.$$

A seguir, analisaremos o comportamento da trajetória do corpo  $\mathbf{r}_1$  para  $t$  próximo de  $t_*$ ; mais especificamente, analisaremos a trajetória do corpo  $\mathbf{r}_1$  pouco antes e pouco depois da colisão binária. Para isto observemos que

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{r} + x_2 \mathbf{j}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r}'_1\|} &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'_1\|} + \frac{x'_2}{\|\mathbf{r}'_1\|} \mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\| \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{x'_2}{\|\mathbf{r}'\|}\right)^2}} + \frac{x'_2}{\|\mathbf{r}'_1\|} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Como já verificamos que numa vizinhança da colisão binária em estudo  $x'_2(t)$  é limitada e, por outro lado, sabemos que  $\|\mathbf{r}'\| \rightarrow \infty$  e  $\|\mathbf{r}'_1\| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow t_*$ , decorre da equação (12) o seguinte resultado.

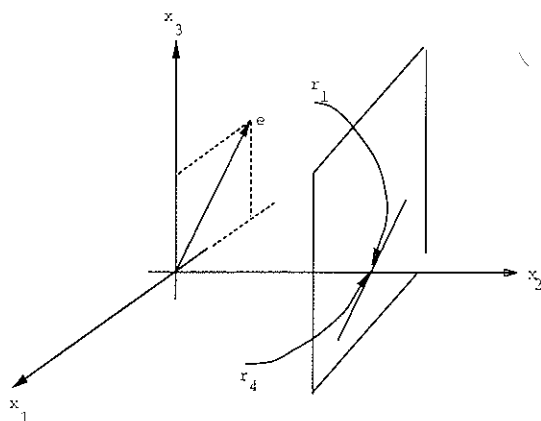


Figura 2: *Comportamento das órbitas próximo da colisão binária*

**Proposição 4**  $\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}'_1(t)}{\|\mathbf{r}'_1(t)\|} = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ .

Analogamente, para o corpo  $\mathbf{r}_4 = -\frac{1}{2}\mathbf{r} + x_2\mathbf{j}$  obtemos

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}'_4(t)}{\|\mathbf{r}'_4(t)\|} = - \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Estes fatos mostram que os corpos que estão „, ou seja,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_4$  (respectivamente  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ ) em tempo próximo da colisão binária, são assintóticos a uma mesma linha reta determinada pelo vetor  $\mathbf{e}$ , ou seja, o movimento destes corpos é praticamente retilíneo em tempo próximo da colisão binária (veja figura 2).

### 3 Variedade de colisão binária simultânea

Nesta seção continuaremos o estudo das órbitas próximas da colisão binária simultânea (que não é colisão total). Portanto, consideraremos órbitas como na seção anterior, isto é, órbitas tais que

$$x_1 \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow x_2^* \quad \text{e} \quad x_3 \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \rightarrow t_*.$$

onde  $x_2^* \neq 0$ . Um primeiro fato a observar é o seguinte: a energia do binário 1-4 é dada por

$$h_{14} = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_3^2) - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}. \quad (13)$$

Logo, da relação de energia total com valor fixo  $h$  do sistema (4), segue que

$$h_{14} = h - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + x_2^2}} \right);$$

e portanto, quando  $t \rightarrow t_*$ , temos que a energia do binário 1-4 é limitada. De fato tal afirmação é verdadeira pois, como já foi dito na seção anterior, no instante da colisão binária existe o limite de  $y_2(t)$ .

Agora, introduziremos coordenadas apropriadas do tipo McGehee (veja [Mc] ou [D2]) para estudar a colisão binária. Sejam  $\mathbf{Q} = (x_1, x_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$  e  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}'$ . Note que o centro de massa dos corpos  $m_1 = m$  e  $m_4 = m$  é dado por  $(0, x_2, 0)$ . Agora, considere as coordenadas

$$\begin{aligned} \rho &= \|\mathbf{Q}\| = \sqrt{x_1^2 + x_3^2} \\ \mathbf{S} &= \rho^{-1}\mathbf{Q} \\ v &= \rho^{1/2}\langle \mathbf{P}, \mathbf{S} \rangle \\ \mathbf{W} &= \rho^{1/2}(\mathbf{P} - \langle \mathbf{P}, \mathbf{S} \rangle \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (14)$$

A figura 3 mostra a geometria das variáveis  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{S}$ . Note que nestas coordenadas  $\|\mathbf{S}\| = 1$ ,  $\langle \mathbf{S}, \mathbf{W} \rangle = 0$ , isto é, podemos pensar que  $(\mathbf{S}, \mathbf{W}) \in TS^1$ . Assim, nestas coordenadas a função potencial é dada por

$$V(\mathbf{Q}, x_2) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\|\mathbf{Q}\|} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + x_2^2}} \right),$$

e as singularidades de  $V$  correspondem a  $\mathbf{Q} = 0$ , já que estamos supondo que  $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Façamos o re-escalamento no tempo  $\frac{dt}{d\lambda} = \rho^{3/2}$ . Das equações (3) e

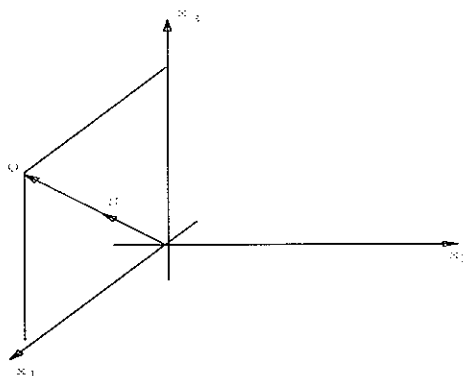


Figura 3: Coordenadas sobre a colisão binária.

usando as novas variáveis obtemos o seguinte campo vetorial

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= \rho v \\
 \dot{v} &= -\frac{1}{4} + \|\mathbf{W}\|^2 + \frac{1}{2} v^2 + \rho^3 f(\rho, \mathbf{S}, x_2) \\
 \dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{W} \\
 \dot{\mathbf{W}} &= -\frac{1}{2} v \mathbf{W} - \|\mathbf{W}\|^2 \mathbf{S} - \rho^3 \{f(\rho, \mathbf{S}, x_2)\mathbf{S} + g(\rho, \mathbf{S}, x_2)\} \\
 \dot{x}_2 &= \rho^{3/2} f_2 \\
 \dot{y}_2 &= -\frac{1}{4} \rho^{3/2} x_2 \left( \frac{1}{(\rho^2 S_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\rho^2 S_3^2 + x_2^2)^{3/2}} \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

onde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{d\lambda}$ .

$$f(\rho, \mathbf{S}, x_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{S_1^2}{(\rho^2 S_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + \frac{S_3^2}{(\rho^2 S_3^2 + x_2^2)^{3/2}} \right)$$

e

$$g(\rho, \mathbf{S}, x_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{S_1}{(\rho^2 S_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \cdot \frac{S_3}{(\rho^2 S_3^2 + x_2^2)^{3/2}} \right)$$

são funções analíticas numa vizinhança da colisão binária. Portanto, conseguimos estender o fluxo analiticamente ao conjunto  $\rho = 0$ , que corresponde à colisão binária. Nestas coordenadas a relação de energia

é

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{W}\|^2 + v^2) - \frac{1}{4} = \rho \left\{ h - \frac{1}{2}y_2^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 S_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 S_3^2 + x_2^2}} \right) \right\}. \quad (16)$$

Nas novas variáveis temos que

$$\rho h_{14}(\mathbf{W}, v) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{W}\|^2 + v^2) - \frac{1}{4}.$$

Definindo  $k_{14} = \rho h_{14}$ , segue do comentário feito no início desta seção que  $k_{14} \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow t_*$ .

**Proposição 5** *O conjunto definido por  $\rho = 0$  e  $k_{14} = 0$  é invariante pelo fluxo associado ao campo dado por (15).*

**Demonstração** Quando  $\rho = 0$  segue que  $\dot{\rho} = 0$ . Por outro lado, derivando  $k_{14}$  com respeito a  $\lambda$  e usando as equações dadas pelo campo (15), temos

$$\frac{dk_{14}}{d\lambda} = -\frac{1}{4}v + \frac{1}{2}(v\|\mathbf{W}\|^2 + v^3) + \rho^3 \{vf(\mathbf{S}, x_2) - \langle \mathbf{W}, g(\mathbf{S}, x_2) \rangle\}.$$

Considerando  $\rho = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{dk_{14}}{d\lambda} &= -\frac{1}{4}v + \frac{1}{2}(v\|\mathbf{W}\|^2 + v^3) \\ &= v k_{14}(\mathbf{W}, v), \end{aligned}$$

e segue o resultado. ■

**Definição 1** *Definimos a variedade de colisão binária simultânea ou, simplesmente, a variedade de colisão binária, ao binário  $\mathbf{r}_1$ - $\mathbf{r}_4$  como o conjunto*

$$\Omega = \{(\rho, v, \mathbf{S}, \mathbf{W}, x_2, y_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times TS^1 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} / \rho = 0, k_{14}(\mathbf{W}, v) = 0\}.$$

Observe que  $\Omega$  independe de  $h$  e conseqüentemente, para a superfície de energia estendida  $\bar{\Sigma}_h$  definida por  $\rho \geq 0$  e tal que a relação (16) é válida, temos

$$\bar{\Sigma}_h = \Sigma_h \cup \Omega.$$

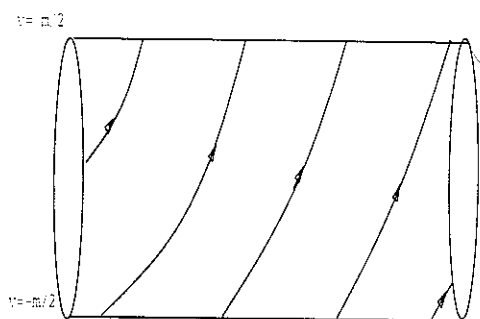


Figura 4: *Varietade de colisão no problema de dois corpos*

onde a superfície de energia é definida como o conjunto invariante pelo fluxo.  $\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^3 / H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}$ . Assim,  $\Omega$  pode ser considerada como a fronteira de cada superfície de energia.

Da proposição 5 segue que a variedade de colisão definida acima é uma subvariedade invariante pelo campo vetorial (15) de codimensão 1. Assim, órbitas de colisão binária aproximam-se da variedade de colisão binária  $\Omega$  em tempo finito. O fluxo sobre a variedade de colisão binária é dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= -\frac{1}{4} + \|\mathbf{W}\|^2 + \frac{1}{2} v^2 \\
 \dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{W} \\
 \dot{\mathbf{W}} &= -\frac{1}{2} v \mathbf{W} - \|\mathbf{W}\|^2 \mathbf{S} \\
 \dot{r}_2 &= 0 \\
 \dot{r}_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

O campo dado em (17) corresponde exatamente ao fluxo sobre a variedade de colisão associada ao problema de dois corpos ( $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_1$ ): lembre que a variedade de colisão no problema de dois corpos corresponde a um toro  $T^2$  (como na figura 4) e portanto, a variedade de colisão  $\Omega$  pode ser identificada com  $T^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  (veja [D3]). O fluxo sobre a variedade de colisão é o produto do fluxo dado por (17) sobre  $T^2$  e o fluxo identidade sobre  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ . Desta forma, quando nos aproximamos da colisão binária entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_1$  (logo  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ ) o efeito das partículas  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$  sobre elas desaparece no limite, como já tínhamos mostrado analiticamente na seção anterior.



## 4 Estudo do fluxo sobre a variedade de colisão binária

Como  $\|S\| = 1$  e  $\langle S, W \rangle = 0$  introduziremos coordenadas polares. Seja  $S = (\cos\theta, \sin\theta)$  e  $W = \omega(-\sin\theta, \cos\theta)$ , onde  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $\omega \in \mathbb{R}$ . Nestas coordenadas temos que o campo (15) é

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= \rho v \\
 \dot{v} &= -\frac{1}{4} + \omega^2 + \frac{1}{2} v^2 + \rho^3 f(\rho, \theta, x_2) \\
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= -\frac{1}{2} v \omega - \rho^3 \langle g(\rho, \theta, x_2), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle \\
 \dot{x}_2 &= \rho^{3/2} y_2 \\
 \dot{y}_2 &= -\frac{1}{4} \rho^{3/2} x_2 \left( \frac{1}{(\rho^2 \cos^2 \theta + x_2^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\rho^2 \sin^2 \theta + x_2^2)^{3/2}} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Nestas variáveis  $k_{14} = \frac{1}{2}(\omega^2 + v^2) - \frac{1}{4}$  e portanto, nas coordenadas  $(\rho = 0, v, \theta, \omega)$  o fluxo está sobre o toro  $T^2$ . Logo, a topologia de  $\Omega$  corresponde ao produto de um toro com  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ . Outra observação importante é que o campo definido em (18) só tem singularidades quando  $\rho = 0$  e  $x_2 = 0$ , ou seja, quando ocorre colisão total. Portanto, numa vizinhança da colisão binária, não total, temos um campo analítico. O campo sobre a variedade de colisão binária nestas coordenadas fica

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= -\frac{1}{4} + \omega^2 + \frac{1}{2} v^2 \\
 \dot{\theta} &= \omega \\
 \dot{\omega} &= -\frac{1}{2} v \omega \\
 \dot{x}_2 &= 0 \\
 \dot{y}_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

**Proposição 6** *As soluções de equilíbrio de (18) correspondem a,*

$$v^2 = \frac{1}{4}, \theta \text{ arbitrário}, \omega = 0, x_2 = x_2^*, y_2 = y_2^*$$

*e todas elas estão sobre a variedade de colisão binária.*

**Corolário 3** *O de equilíbrio de (18) para um valor fixo de  $(x_2, y_2) = (x_2^*, y_2^*)$  é compacto.*

**Demonstração** Pela proposição 6 o conjunto das soluções de equilíbrio é dado por  $N^+ \cup N^-$  onde,  $N^\pm = \{\pm \frac{1}{2}\} \times S^1 \times \{0\} \times \{x_2^*\} \times \{y_2^*\}$ . ■

Seja agora

$$N = \{(\rho, v, \theta, \omega, x_2, y_2) \in \Omega / v^2 = \frac{1}{4}, \omega = 0, \theta, x_2, \text{ e } y_2 \text{ arbitrários}\}.$$

Note que  $N$  é uma subvariedade tridimensional da variedade de colisão binária e é formada inteiramente por soluções de equilíbrio do sistema (18), donde  $N$  é invariante pelo fluxo associado ao campo (18). Topologicamente,  $N$  pode ser vista como duas cópias de  $S^1 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ .

#### 4.1 Linearização do fluxo

A linearização do fluxo num ponto de equilíbrio  $(\rho = 0, v_0, \theta_0, 0, x_2^*, y_2^*)$  é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos valores próprios são:  $v_0, v_0, -\frac{1}{2}v_0, 0, 0, 0$ .

**Comentário 1.** Consideremos a solução de equilíbrio  $\xi^+ = (0, v_0^+, \theta_0, 0, x_2^*, y_2^*)$ . O ponto  $(x_2^*, y_2^*)$  descreve a posição limite da colisão binária simultânea. Analogamente a como é feito em forma bem mais geral no trabalho de Elbaly [Elb], podemos estudar as propriedades locais do fluxo dado por (18) próximo de  $\xi^+$ .

**Comentário 2.** No problema de dois corpos ou problema de Kepler, sabe-se (ver por exemplo Devaney [D3]) que as variedades estável e instável do conjunto das soluções de equilíbrio são bi-dimensionais.

A superfície de energia estendida, nas coordenadas  $(\rho, v, \theta, \omega, x_2, y_2)$ , é definida por

$$\bar{\Sigma}_h = \{(\rho, v, \theta, \omega, x_2, y_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times TS^1 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} / \frac{1}{2}(\omega^2 + v^2) - \frac{1}{4} = \rho \left( h + V_0(\rho, \theta, x_2) - \frac{1}{2}y_2^2 \right)\}, \quad (20)$$

onde

$$V_0(\rho, \theta, x_2) = \frac{1}{4} - V(\rho, \theta, x_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta + x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{cos}^2 \theta + x_2^2}} \right).$$

Verifica-se que o espaço tangente a  $\bar{\Sigma}_h$  num ponto  $\mathbf{p} = (0, v_0, \theta_0, 0, x_2^*, y_2^*)$  é dado por

$$T_{\mathbf{p}}\bar{\Sigma}_h = \{\xi \in \mathbb{R}^6 / \xi_2 = \frac{a}{v_0}\xi_1\},$$

onde  $a = h - V_0(0, \theta_0, x_2^*) - \frac{1}{2}y_2^{*2}$ , e é gerado pelos vetores do conjunto  $\mathcal{C} = \{(1, \frac{a}{v_0}, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$ .

Lembremos que a parte linear do fluxo determinado por (18) é dada pela matriz  $A$ , calculada anteriormente, que tem a forma

$$B = [A]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

na base do espaço tangente determinada acima. Assim, sobre a superfície de energia estendida (para um nível fixo da energia  $h$ ), os valores próprios da parte linear correspondem a  $v_0, 0, -\frac{1}{2}v_0, 0, 0$ . Os vetores próprios nas coordenadas  $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$  associados a estes valores próprios correspondem a

- 1) Para o valor próprio  $v_0$  o vetor próprio é  $(1, 0, 0, 0, 0)$  [ou  $(1, \frac{a}{v_0}, 0, 0, 0, 0)$ ]
- 2) Para o valor próprio  $-\frac{1}{2}v_0$  o vetor próprio é  $(0, 1, -\frac{1}{2}v_0, 0, 0)$  [ou  $(0, 0, 1, -\frac{1}{2}v_0, 0, 0)$ ]
- 3) Para o valor próprio 0 os vetores próprios são  $(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$  [ou  $(0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ],

onde os vetores no interior dos colchetes são os vetores próprios nas coordenadas  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$  sobre  $T_p\Sigma_h$ . Portanto, concluímos que

$$T_p\overline{\Sigma}_h = E^s \oplus E^u \oplus T_pN,$$

onde  $E^s$  ( $E^u$ ) é o espaço gerado pelo vetor próprio associado ao valor próprio negativo (resp. positivo) e  $T_pN$  é o espaço gerado pelos vetores próprios associados aos valores próprios nulos, que é exatamente o espaço tangente associado à subvariedade definida pelos pontos de equilíbrio associados ao campo (18) sobre a variedade de colisão binária.

Adaptando as definições de Hirsch, Pugh, Shub [HPS], temos

**Definição 2** *Seja  $\varphi_t$  o fluxo sobre uma variedade  $M$  e suponhamos que  $N$  é uma subvariedade de  $M$  que consiste de pontos de equilíbrio para o fluxo.  $N$  é dita normalmente hiperbólica se o fibrado tangente a  $M$  sobre  $N$  decompõe-se em três sub-fibrados  $TN$ ,  $E^s$  e  $E^u$  invariantes pelo fluxo e satisfazendo*

- 1)  $d\varphi_t$  contraí  $E^s$  exponencialmente.
- 2)  $d\varphi_t$  expande  $E^u$  exponencialmente.
- 3)  $TN$  é o fibrado tangente de  $N$ .

Assim, segue da conclusão anterior que o conjunto  $N$  é normalmente hiperbólico.

Para subvariedades normalmente hiperbólicas temos a usual existência de variedades estáveis e instáveis junto com a persistência destas variedades invariantes sob pequenas perturbações. Mais precisamente, temos o teorema

**Teorema 3** *Seja  $N$  uma subvariedade normalmente hiperbólica formada por soluções de equilíbrio para  $\varphi_t$ , fluxo do campo (18). Então, existem variedades diferenciáveis, estável e instável, tangentes ao longo de  $N$  a  $E^s \oplus TN$  e  $E^u \oplus TN$ , respectivamente. Ainda mais,  $N$  bem como as variedades estável e instável persistem sob pequenas perturbações do fluxo.*

Para uma demonstração ver, por exemplo, [HPS]. O teorema acima não diz que a subvariedade invariante  $N$  persiste sob pequenas perturbações; de fato, todos os zeros podem ser destruídos por pequenas perturbações, mas deve existir alguma variedade invariante próxima.

Seja agora  $CH_2^+$  o conjunto de todas as órbitas que terminam em colisão binária, não total, ao longo do eixo  $x_2$  com uma configuração em  $N$ . A estrutura de variedade de  $CH_2^+$  segue-se do fato que  $N$  é normalmente hiperbólica. De fato,  $CH_2^+$  é exatamente a variedade estável do conjunto invariante  $N$ . Já foi mostrado que  $N$  tem uma direção atratora, portanto,  $CH_2^+$  é de codimensão 1 (4-dimensional). Analogamente, definimos  $CH_2^-$  como o conjunto das órbitas que começam em colisão binária com uma configuração em  $N$ . Este conjunto tem estrutura de variedade e coincide com a variedade instável de  $N$ . Assim, segue

**Proposição 7** *O conjunto das órbitas que terminam (começam) em colisão binária simultânea ao longo do eixo  $x_2$  é uma subvariedade diferenciável de dimensão 4.*

**Comentário** Argumentos análogos ao usado para demonstrar a proposição acima foram usadas por Xia ([X]) como resultado preliminar para a prova da existência de singularidades sem colisão.

## 5 Conclusões

Com este estudo das colisões binárias simultâneas no problema tetraédrico simétrico com rotação, conseguimos provar analiticamente que no instante da colisão binária os corpos não passam por um "spin" infinito, isto é, os corpos não colidem de maneira caótica. Com efeito, a colisão se dá ao longo de uma direção bem definida, resultado que aparece no teorema 2. Além disso, caracterizamos topologicamente, na proposição 7, o conjunto de condições iniciais que começam e terminam em colisão binária simultânea.

## Referências

- [D1] Devaney, R.L.: *Triple collision in the planar isosceles three-body problem*, Invent. Math., 60, 249-267 (1980).
- [D2] Devaney, R.L.: *Singularities in classical mechanical systems*, in Ergodic Theory and Dynamical Systems I, Proceedings Special Year, Maryland, 1979-80. Editor A. Katok, pp. 211-333. Birkhauser (1981).

- [D3] Devaney, R.L.: *Blowing up singularities in classical mechanical systems*, Amer. Math. Monthly, 89 (1982).
- [Di] Diacu, F.: *Singularities of the n-body problem, An Introduction to Celestial Mechanics*, Les Publications CRM. Montréal, (1992).
- [Elb] Elbially, M.: *Collision singularities in celestial mechanics*, Siam, J. Math. Anal., 21, No.6, 191-227 (1974).
- [HPS] Hirsch, M., Pugh, C. and Shub, M.: *Lectures notes in mathematics*, 583, Invariant manifolds. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).
- [La] Lacomba, E.A.: *Mouvements voisins de collision quadruple dans le problème trapezoidal des 4 corps*, Cel. Mech., 31, 23-41 (1983).
- [LaEp] Lacomba, E.A. and Chavela, E.P.: *Motions close to escapes in the rhomboidal 4-body problem*, Cel. Mech. and Dyn. Ast., 57, No3, 411-437 (1993).
- [Mc] McGehee, R.: *Triple collision in the collinear three-body problem*, Invent. Math., 27, 191-227 (1974).
- [SiRm] Simó, C. and Martínez, R.: *Qualitative study of the planar isosceles three-body problem*, Cel. Mech., 41, 179-251 (1988).
- [Cl] Vidal, C.: *The tetrahedral four body problem with rotation*, Cel. Mech. and Dyn. Ast., 1846: 1-16, (1998).
- [W] Wintner, A.: *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1941).
- [X] Xia, Z.: *The existence of noncollision singularities in Newtonian systems*, Annal. of Math., 135. 411-468 (1992).

*Departamento de Matemática*  
*Universidade Federal de Pernambuco*  
*Av. Prof. Luiz Freire s/n*  
*Cidade Universitária*  
*Recife - PE*  
*e-mail: claudio@dmate.ufpe.br*