MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº26/27 – junho/dezembro 1999 – pp. 29-47

Frações Contínuas e Palindromia

Richard A. Mollin

Resumo

Este é um artigo expositório, que trata da bela relação entre as expansões em frações contínuas de irracionais quadráticos e a palindromia em seus quocientes parciais. [1]

Em um texto introdutório de teoria de números, como [4], aprende-se rapidamente que o algoritmo Euclidiano dá origem a números racionais de maneira natural. O algoritmo Euclidiano consiste da aplicação repetida do algoritmo da divisão, que diz que se $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (os números naturais) e $b \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (os inteiros), então existem e são únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $0 \leq r < a$ e

$$b = aq + r.$$

Pondo $a = r_0$ e $b = r_{-1}$, a aplicação repetida do algoritmo da divisão nos dá

$$r_{j-1} = r_j q_{j+1} + r_{j+1}, \tag{1}$$

para todos os inteiros não negativos $j < n$, onde n é o menor inteiro não negativo tal que $r_{n+1} = 0$. Segue imediatamente que o máximo divisor comum de a e b é r_n, e escrevemos $\mathrm{mdc}(a, b) = r_n$. Por exemplo, se $a = 315$, e $b = 1470$, então

$$r_{-1} = 1470 = 315 \cdot 4 + 210 = r_0 \cdot q_1 + r_1,$$

[1]Um *palíndromo* é uma palavra ou sentença que não muda quando lida da direita para a esquerda. Um exemplo simples é "radar"; um mais longo é "Socorram-me! Subi no ônibus em Marrocos".

$$r_0 = 315 = 210 \cdot 1 + 105 = r_1 \cdot q_2 + r_2,$$

e

$$r_1 = 210 = 105 \cdot 2 + 0 = r_2 \cdot q_3 + r_3.$$

Como $r_{n+1} = r_3 = 0$ temos $r_n = r_2 = 105 = \mathrm{mdc}(a, b)$. Agora vamos mostrar como este processo dá origem a representações de números racionais em frações contínuas.

Seja $\alpha_{j-1} = r_{j-1}/r_j$, da relação de recorrência (1) segue que

$$\alpha_{j-1} = q_{j+1} + 1/\alpha_j \text{ e } \alpha_{n-1} = q_{n+1}.$$

Usando o exemplo acima, temos

$$\alpha_{-1} = b/a = 1470/315 = 4 + 210/315 = 4 + \frac{1}{315/210} = q_1 + 1/\alpha_0\ ,$$

$$\alpha_0 = 315/210 = 1 + \frac{105}{210} = 1 + \frac{1}{2}\ ,$$

donde

$$\frac{1470}{315} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}.$$

Isto sugere que todos os números racionais podem ser expressos desta maneira. Vamos agora formalizar este processo.

Sejam $q_j \in \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, \ldots, \ell$ com $\ell \in \mathbb{Z}$ não negativo e $q_j \in \mathbb{R}^+$ para $j > 0$. Uma expressão da forma

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{\ell-1} + \cfrac{1}{q_\ell}}}}\ ,$$

é dita uma *fração contínua finita* de *comprimento* ℓ e será denotada por $\langle q_0; q_1, \ldots, q_\ell \rangle$. Uma fração contínua finita é *simples* se $q_j \in \mathbb{N}$ para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, \ell$.

Pode-se mostrar que $\alpha \in \mathbb{Q}$ se e somente se α tem uma expansão em fração contínua simples finita (veja [4, Teorema 5.1.1, p. 223]); por exemplo

$$\frac{1470}{315} = \frac{14}{3} = \langle 4; 1, 2 \rangle.$$

Neste caso os números q_j são ditos os *quocientes parciais* e q_0 é a *parte inteira* de α, isto é, o maior inteiro menor que α; escrevemos $q_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.

Vamos agora ver o que acontece quando a expansão em fração continuada simples *não* termina. Como observado em [1], todos sabem que AC (antes das calculadoras) π valia 22/7 e DC (depois das calculadoras)[2] π passou a ser 3.14159265...[3] De fato, $C_1 = 22/7 = \langle 3; 7 \rangle$ é o que chamamos de *primeira convergente* de π e vem da expansão em fração contínua de π; mas estamos colocando o carro na frente dos bois. Vamos primeiro falar sobre a história da noção de fração contínua infinita e fazer alguns comentários relacionados.

Já vimos como o algoritmo de Euclides dá origem a expansões em fração contínua simples de números racionais. Este processo pode ser generalizado como segue. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $q_0 = \lfloor \alpha \rfloor$; então $\alpha = q_0 + r_0$ onde $0 \leq r_0 < 1$. Se $r_0 \neq 0$ temos $1/r_0 = q_1 + r_1$ com $q_1 = \lfloor r_0^{-1} \rfloor$ e $0 \leq r_1 < 1$, donde

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + r_1}.$$

Se $r_1 \neq 0$ obtemos, analogamente, $r_1^{-1} = q_2 + r_2$ com $q_2 = \lfloor r_1^{-1} \rfloor$ e $0 \leq r_2 < 1$. Iterando este processo, obtemos

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}} \ddots}}}}$$

[2]no original: *AD (after decimals)*

[3]Qualquer estudante de Cálculo I sabe que $0 \neq \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} dt = 22/7 - \pi$.

Esta expressão é dita uma *fração contínua simples infinita* e será denotada por $\langle q_0; q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots\rangle$. Mostra-se facilmente que $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$ se e somente se α tem uma expansão em fração contínua simples infinita.

Se $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots\rangle$ é uma expressão em fração contínua simples infinita, dizemos que

$$C_k = \langle q_0; q_1, \ldots, q_k\rangle$$

é a *k-ésima convergente* de α. Como vimos, $C_k = A_k/B_k$ é um número racional. Além disso, temos

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} C_k.$$

Em 1883 J.S. Smith (1826–1883) mostrou que $|\alpha - C_{k+1}| < |\alpha - C_k|$, donde segue que A_k/B_k é a melhor aproximação de α entre os números racionais com denominador menor ou igual a B_k. Por exemplo,

$$\pi = \\ \langle 3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, \ldots\rangle$$

e $C_1 = \langle 3; 7\rangle = 3 + 1/7 = 22/7$ é a primeira convergente de π, como mencionamos acima. Esta é a melhor aproximação racional de π entre os números racionais com denominador menor ou igual a 7.

Em 1895 K. T. Vahlen (1869–1945) mostrou que se α é um número irracional, $r, s \in \mathbb{Z}$ com $\gcd(r, s) = 1$ e $s > 0$ e $|\alpha - r/s| < 1/(2s^2)$, então r/s é uma convergente da expansão em fração contínua simples de α. Este resultado foi melhorado por E. Borel (1871–1956), que em 1903 mostrou que o coeficiente 2 no denominador pode ser substituído por $\sqrt{5}$. Para o conhecido irracional e, L. Euler (1701–1783) mostrou em 1737 que

$$e = \langle 2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots, 1, 1, 2k, \ldots\rangle,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$.

Entretanto, para estes tipos de irracionais (como π e e), não há um padrão "periódico" na seqüência de quocientes parciais. Nosso interesse neste artigo são os números reais cujas expansões em fração contínua simples infinita *têm* algum padrão periódico; mais precisamente, padrões periódicos de uma forma especial. Vamos nos concentrar agora nestes irracionais especiais.

Uma fração contínua simples infinita $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots\rangle$ é dita *periódica* (ou, às vezes, *eventualmente periódica*) se existe um inteiro $k \geq 0$ e $\ell \in \mathbb{N}$ tais que $q_n = q_{n+\ell}$ para todo inteiro $n \geq k$. Vamos usar a notação

$$\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{k-1}, \overline{q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{\ell+k-1}}\rangle,$$

como uma abreviação conveniente para denotar este fato. O menor número natural $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $q_n = q_{n+\ell}$ para todo inteiro $n \geq k$ será denotado por $\ell(\alpha)$ e dito o *comprimento do período de* α e $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ é o *pré-período de* α. Se k é o *menor* inteiro não negativo tal que $q_n = q_{n+\ell}$ para todo $n \geq k$ dizemos que $q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+\ell-1}$ é o *período fundamental* de α. Se $k = 0$ é o menor destes valores dizemos que α é *puramente periódico*, ou seja,

$$\alpha = \langle\overline{q_0; q_1, \ldots, q_{\ell-1}}\rangle.$$

Por exemplo

$$\frac{1+\sqrt{7}}{2} = \langle\overline{1, 1, 4, 1}\rangle.$$

Este último exemplo motiva a definição dos objetos que queremos discutir.

Definição 1 (Irracionais Quadráticos)
Seja D um número natural que não é um quadrado perfeito. Um irracional quadrático *é um número da forma*

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}, \quad (P, Q \in \mathbb{Z})$$

onde $Q \neq 0$ e $Q|(P^2 - D)$[4]*. O número $\alpha' = (P - \sqrt{D})/Q$ é dito o* conjugado algébrico *de α.*

Lagrange foi o primeiro a mostrar que os irracionais quadráticos formam realmente uma classe especial de números. Para chegar ao resultado de Lagrange, vamos primeiro estabelecer notação e provar um lema.

Seja $\alpha = (P + \sqrt{D})/Q$ um irracional quadrático. Colocamos $P_0 = P$ e $Q_0 = Q$, e para $j \geq 0$ definimos

$$P_{j+1} = q_j Q_j - P_j, \tag{2}$$

[4] N.T: O(a) leitor(a) mostrará facilmente que α é um irracional quadrático se e somente se α é raiz de um polinômio de grau 2 em $\mathbb{Z}[x]$ irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

$$D = P_{j+1}^2 + Q_j Q_{j+1}, \tag{3}$$

$$\alpha_j = \frac{P_j + \sqrt{D}}{Q_j}, \tag{4}$$

e

$$q_j = \lfloor \alpha_j \rfloor . \tag{5}$$

Lema 2 (**Representação de convergentes**)
Seja $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_n \rangle$ *uma expansão em fração contínua finita. Para* $k \in \mathbb{Z}$ *não negativo definimos as seqüências*

$$A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, A_k = q_k A_{k-1} + A_{k-2},$$

e

$$B_{-2} = 1, B_{-1} = 0, B_k = q_k B_{k-1} + B_{k-2} .$$

Então

$$C_k = A_k/B_k = \frac{q_k A_{k-1} + A_{k-2}}{q_k B_{k-1} + B_{k-2}},$$

é a k*-ésima convergente de* α *para qualquer* $k \leq n$.

Demonstração. Vamos usar indução em k. Se $k = 0$ então

$$C_0 = q_0 = A_0/B_0 = \frac{q_0 A_{-1} + A_{-2}}{q_0 B_{-1} + B_{-2}}.$$

Suponhamos agora que

$$C_k = A_k/B_k = \frac{q_k A_{k-1} + A_{k-2}}{q_k B_{k-1} + B_{k-2}}$$

e vamos provar o resultado para $k+1$. Temos

$$C_{k+1} = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{k+1} \rangle = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k + 1/q_{k+1} \rangle,$$

e podemos usar a hipótese de indução em C_{k+1}, de vez que seu comprimento é k na representação à direita acima. Logo

$$C_{k+1} = \frac{(q_k + 1/q_{k+1})A_{k-1} + A_{k-2}}{(q_k + 1/q_{k+1})B_{k-1} + B_{k-2}} = \frac{(q_k q_{k+1} + 1)A_{k-1} + q_{k+1} A_{k-2}}{(q_k q_{k+1} + 1)B_{k-1} + q_{k+1} B_{k-2}}$$

$$= \frac{A_{k-1} + q_{k+1}(q_k A_{k-1} + A_{k-2})}{B_{k-1} + q_{k+1}(q_k B_{k-1} + B_{k-2})} = \frac{A_{k-1} + q_{k+1} A_k}{B_{k-1} + q_{k+1} B_k} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}},$$

e o resultado segue por indução. $\square$

Corolário 3 *Seja* $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots \rangle$. *Então*

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} = \langle q_k; q_{k+1}, \ldots \rangle$$

e

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, \alpha_k \rangle = \frac{\alpha_k A_{k-1} + A_{k-2}}{\alpha_k B_{k-1} + B_{k-2}}.$$

Demonstração. A primeira igualdade é um exercício simples de indução e a segunda segue imediatamente do Corolário anterior. □

Agora estamos prontos para o Teorema de Lagrange.

Teorema 4 *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então* α *tem uma expansão periódica em fração contínua simples infinita se e somente se* α *é um irracional quadrático.*

Demonstração. Se

$$\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{k-1}, \overline{q_k, \ldots, q_{k+\ell-1}} \rangle \text{ e } \beta = \langle \overline{q_k; q_{k+1}, \ldots, q_{k+\ell-1}} \rangle,$$

então $\beta = \langle q_k; q_{k+1}, \ldots, q_{k+\ell-1}, \beta \rangle$. Segue do Corolário 3 que

$$\beta = \frac{A_{\ell-1}\beta + A_{\ell-2}}{B_{\ell-1}\beta + B_{\ell-2}}, \tag{6}$$

onde A_j/B_j $(j = \ell - 1, \ell - 2)$ são convergentes de β. Pela equação (6) segue que $B_{\ell-1}\beta^2 + (B_{\ell-2} - A_{\ell-1})\beta - A_{\ell-2} = 0$, e da fórmula usual para a resolução da equação de segundo grau segue que β é um irracional quadrático. Usando o Corolário 3 outra vez, temos

$$\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{k-1}, \beta \rangle = \frac{A_{k-1}\beta + A_{k-2}}{B_{k-1}\beta + B_{k-2}},$$

onde A_j/B_j para $j = k - 1, k - 2$ são convergentes de α. Como β é um irracional quadrático, podemos escrever $\beta = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$; por conveniência, colocamos $a = A_{k-1}$, $b = A_{k-2}$, $c = B_{k-1}$, e $d = B_{k-2}$. Temos então

$$\alpha = \frac{a(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}) + b}{c(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}) + d} = \frac{(Pa + Qb) + a\sqrt{D}}{(Pc + Qd) + c\sqrt{D}}$$

$$= \frac{[(Pa+Qb)+a\sqrt{D}][(Pc+Qd)-c\sqrt{D}]}{[(Pc+Qd)+c\sqrt{D}][(Pc+Qd)-c\sqrt{D}]}$$

$$= \frac{(Pa+Qb)(Pc+Qd)-acD+[(Pc+Qd)a-c(Pa+Qb)]\sqrt{D}}{(Pc+Qd)^2-c^2D},$$

que é um irracional quadrático de vez que $\beta \notin \mathbb{Q}$.

Se $\alpha_k = (P_k+\sqrt{D})/Q_k$ então $\alpha_k - q_k = \frac{P_k+\sqrt{D}}{Q_k} - q_k = \frac{P_k - q_k Q_k + \sqrt{D}}{Q_k}$ que, pela equação (2), é igual a

$$\frac{\sqrt{D}-P_{k+1}}{Q_k} = \frac{D-P_{k+1}^2}{Q_k(\sqrt{D}+P_{k+1})},$$

onde a última igualdade é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador por $\sqrt{D}+P_{k+1}$. Pela equação (3), isto é igual a

$$\frac{Q_{k+1}}{\sqrt{D}+P_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}\ .$$

Como $\alpha_k = \langle q_k; q_{k+1}, \ldots\rangle = q_k + 1/\langle q_{k+1}; q_{k+2}, \ldots\rangle$, segue que

$$\alpha_{k+1} = 1/(\alpha_k - q_k) = \langle q_{k+1}; q_{k+2}, \ldots\rangle$$

e $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_k, \alpha_{k+1}\rangle$. Além disso $\alpha_k > q_k$, e como $\alpha_{k+1} > 1$ para $k \geq 0$ segue que $q_k + 1 > \alpha_k$. Logo $\lfloor \alpha_k \rfloor = q_k$.

Falta mostrar que α é periódico. Pelo Corolário 3 temos

$$\alpha' = \frac{\alpha'_k A_{k-1} + A_{k-2}}{\alpha'_k B_{k-1} + B_{k-2}},$$

donde

$$\alpha'_k = \frac{A_{k-2} - \alpha' B_{k-2}}{\alpha' B_{k-1} - A_{k-1}} = \frac{-B_{k-2}}{B_{k-1}} \left(\frac{\alpha' - C_{k-2}}{\alpha' - C_{k-1}} \right).$$

Por outro lado $\lim_{k\to\infty} C_{k-2} = \lim_{k\to\infty} C_{k-1} = \alpha$, donde $\lim_{k\to\infty} \frac{B_{k-2}}{B_{k-1}} = -1$. Vemos assim que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha'_k < 0$ para todo $k \geq n$.

Como $\alpha'_k = \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} < 0$, segue que $2\sqrt{D}/Q_k = \alpha_k - \alpha'_k > 1$, donde $2\sqrt{D} > Q_k > 0$ e $P_k < \sqrt{D}$. Além disso, como $\alpha_k > 0$ temos que $P_k > -\sqrt{D}$. Como estas igualdades valem para *todo* $k \geq n$, segue que existe $i \neq j \in \mathbb{N}$ tal que $P_i = P_j$ e $Q_i = Q_j$; logo $\alpha_i = \alpha_j$ e $q_i = q_j$. Concluímos então que α é (eventualmente) periódico. $\square$

Chegamos agora aos irracionais quadráticos que queremos estudar.

Definição 5 *Um irracional quadrático* $\alpha = (P + \sqrt{D})/Q$ *é* reduzido *se* $\alpha > 1$ *e* $-1 < \alpha' < 0$.

Começamos nossa discussão principal com o seguinte resultado.

Teorema 6 *Seja* $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots \rangle$ *uma fração contínua simples infinita com* $\ell(\alpha) = \ell \in \mathbb{N}$. *Então* α *é puramente periódico se e somente se* α *é reduzido.*

Demonstração. Suponhamos que α seja puramente periódico, isto é, $\alpha = \langle \overline{q_0; q_1, \ldots, q_{\ell-1}} \rangle$. Como $q_j > 0$ para todo $j \geq 0$ temos $\alpha > 1$. Por outro lado, temos $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots, q_{\ell-1}, \alpha \rangle$, e segue do Corolário 3 que

$$\alpha = \frac{\alpha A_{\ell-1} + A_{\ell-2}}{\alpha B_{\ell-1} + B_{\ell-2}}.$$

Logo

$$\alpha^2 + \frac{B_{\ell-2} - A_{\ell-1}}{B_{\ell-1}}\alpha - \frac{A_{\ell-2}}{B_{\ell-1}} = 0,$$

donde α é raiz de

$$f_\alpha(x) = B_{\ell-1}x^2 - (A_{\ell-1} - B_{\ell-2})x - A_{\ell-2} = 0 \,.$$

Como

$$f_\alpha(-1) = B_{\ell-1} - B_{\ell-2} + A_{\ell-1} - A_{\ell-2} > 0$$

e

$$f_\alpha(0) = -A_{\ell-2} < 0$$

segue do Teorema do Valor Intermediário que α', a outra raiz de f_α, está entre 0 e -1.

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha = \langle q_0; q_1, \ldots \rangle$ seja reduzido e $\alpha_k = \langle q_k; q_{k+1}, \ldots \rangle$ para $k \geq 0$ com $\alpha = \alpha_0$. Como $-1 < \alpha'_0 < 0$, uma indução simples, que deixamos para o(a) leitor(a), mostra que $-1 < \alpha'_k < 0$ para qualquer $k \geq 0$. O argumento usado na demonstração do Teorema de Lagrange mostra que se $q_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ então $\alpha_{k+1} = 1/(\alpha_k - q_k)$, donde

$$\lfloor -1/\alpha'_{k+1} \rfloor = \lfloor q_k - \alpha'_k \rfloor.$$

Temos também $0 < -\alpha'_k < 1$, donde $\lfloor q_k - \alpha'_k \rfloor = q_k$. Segue do Teorema de Lagrange que α é periódico, donde $\alpha_k = \alpha_j$ para alguns inteiros não negativos $j < k$. Logo $-1/\alpha'_k = -1/\alpha'_j$; segue que $q_{k-1} = q_{j-1}$, e além disso

$$\alpha_{k-1} = q_{k-1} + 1/\alpha_k = q_{j-1} + 1/\alpha_j = \alpha_{j-1}.$$

Podemos iterar este procedimento até obter $\alpha_{j-i} = \alpha_{k-i}$ para $i = 0, 1, \ldots, j$, ou seja

$$\alpha = \alpha_0 = \langle \overline{q_0; q_1, \ldots, q_{k-j-1}} \rangle,$$

e nosso resultado está provado. □

Um caso especial do Teorema 6 é o resultado abaixo.

Corolário 7 *Se $D > 1$ não é um quadrado perfeito então*

$$\sqrt{D} = \langle q_0; \overline{q_1, \ldots, q_{\ell-1}, 2q_0} \rangle,$$

onde $q_j = q_{\ell-j}$ para $j = 1, 2, \ldots, \ell - 1$ e $q_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$.

Demonstração. Se $\alpha = \lfloor \sqrt{D} \rfloor + \sqrt{D}$ então α é reduzido de vez que $\alpha > 1$ e $-1 < \alpha' = \lfloor \sqrt{D} \rfloor - \sqrt{D} < 0$. Pelo Teorema 6, α é puramente periódico, donde

$$\alpha = \langle \overline{2\lfloor \sqrt{D} \rfloor; q_1, q_2, \ldots, q_{\ell-1}} \rangle$$

e segue que

$$\sqrt{D} = \alpha - \lfloor \sqrt{D} \rfloor = \left\langle q_0; \overline{q_1, q_2, \ldots, q_{\ell-1}, 2\lfloor \sqrt{D} \rfloor} \right\rangle. \tag{7}$$

Seja agora

$$\gamma = \left\langle \overline{q_{\ell-1}; q_{\ell-2}, \ldots, q_1, 2\lfloor \sqrt{D} \rfloor} \right\rangle.$$

Pelo Teorema 6, α é uma raiz de

$$f_\beta(x) = B_{\ell-1}x^2 + (B_{\ell-2} - A_{\ell-1})x - A_{\ell-2} = 0,$$

onde os $C_k = A_k/B_k$ são convergentes de α.

Afirmação 1 $f_\beta(-1/\gamma) = 0$.

Um argumento simples de indução mostra que

$$A_{\ell-1}/A_{\ell-2} = \langle q_{\ell-1}; q_{\ell-2}, \ldots, q_0\rangle$$

é a $(\ell-1)$-ésima convergente de γ e

$$B_{\ell-1}/B_{\ell-2} = \langle q_{\ell-1}; q_{\ell-2}, \ldots, q_1\rangle$$

é a $(\ell-2)$-ésima convergente de γ. Do Corolário 3 segue que

$$\gamma = \frac{\gamma A_{\ell-1} + B_{\ell-1}}{\gamma A_{\ell-2} + B_{\ell-2}}\,.$$

Logo

$$A_{\ell-2}\gamma^2 + (B_{\ell-2} - A_{\ell-1})\gamma - B_{\ell-1} = 0,$$

e reescrevendo esta expressão obtemos

$$B_{\ell-1}(-1/\gamma)^2 + (B_{\ell-2} - A_{\ell-1})(-1/\gamma) - A_{\ell-2} = 0$$

que é a afirmação 1.

Como as únicas raízes de $f_\beta(x)$ são α e α', temos

$$-\alpha' = 1/\gamma = 1/\langle\overline{q_{\ell-1}; q_{\ell-2}, \ldots, 2\lfloor\sqrt{D}\rfloor}\rangle = \langle 0; \overline{q_{\ell-1}, q_{\ell-2}, \ldots, 2\lfloor\sqrt{D}\rfloor}\rangle.$$

Por outro lado, segue da Equação (7) que

$$-\alpha' = \sqrt{D} - \lfloor\sqrt{D}\rfloor = \langle 0; \overline{q_1, q_2, \ldots, q_{\ell-1}, 2\lfloor\sqrt{D}\rfloor}\rangle,$$

e assim $q_{\ell-j} = q_j$ for $j = 0, 1, \ldots, \ell-1$. □

No decorrer da demonstração do Corolário 7, provamos também o resultado abaixo.

Corolário 8 *Seja* $\alpha = \langle\overline{q_0; q_1, \ldots q_{\ell-1}}\rangle$. *Então*

$$-1/\alpha' = \langle\overline{q_{\ell-1}; q_{\ell-2}, \ldots, q_0}\rangle.$$

Demonstração. A afirmação 1 no Corolário 7 depende apenas de periodicidade pura. □

O significado do Corolário 7 é que existe uma determinada palindromia na expansão em fração contínua simples de $\sqrt{D}$; mais precisamente, a parte "do meio"é um palíndromo:

$$q_1 q_2 \cdots q_{\ell/2-1} q_{\ell/2} q_{\ell/2-1} \cdots q_2 q_1.$$

Entretanto, $\sqrt{D}$ não é reduzido. Um exemplo de um irracional quadrático reduzido com este tipo de simetria é $(5+\sqrt{145})/10 = \langle\overline{1; 1, 2, 2, 1}\rangle$. Há um nome para este tipo de comportamento palindrômico.

Definição 9 *Um irracional quadrático reduzido α tem período* puramente anti-simétrico *se*

$$\alpha = \langle\overline{q_0; q_1, \ldots, q_{\ell-1}}\rangle,$$

onde

$$q_j = q_{\ell-j} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, \ell - 1.$$

Em outras palavras,

$$q_1 q_2 \cdots q_{\ell-1}$$

é um palíndromo.

Os irracionais quadráticos na Definição 9 podem ser caracterizados através de (2)–(5). O resultado a seguir se encontra em [7], onde se fazem também comparações com a teoria de ideais.

Teorema 10 *Seja $\alpha = (P+\sqrt{D})/Q$ um irracional quadrático reduzido. Então são equivalentes:*

1. *α tem período puramente anti-simétrico.*

2. *$\alpha_{\ell-j+1}\alpha'_j = -1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \leq \ell - 1$.*

3. *$\alpha\alpha'_1 = -1$.*

4. *Se $P = P_0$ e $Q = Q_0$ na expansão em fração contínua simples de α então $D = P_0^2 + Q_0 Q_1$.*

Demonstração. Se α tem período puramente anti-simétrico então para todo número natural $j \leq \ell - 1$ temos $q_j = q_{\ell-j}$. Logo, para estes j,

$$\alpha_j = \langle\overline{q_j, q_{j+1} \cdots, q_{\ell-1}, q_0, q_1 \cdots, q_{j-1}}\rangle =$$

$$\langle \overline{q_{\ell-j}, q_{\ell-j-1}, \ldots, q_1, q_0, q_{\ell-1}, \ldots q_{\ell-j+2}, , q_{\ell-j+1}} \rangle .$$

Além disso, pelo Corolário 8,

$$-\frac{1}{\alpha'_j} = \langle \overline{q_{\ell-j+1}; q_{\ell-j+2}, \ldots, q_0, q_1, \ldots, q_{\ell-j}} \rangle = \alpha_{\ell-j+1},$$

e segue que para estes j

$$\alpha_{\ell-j+1}\alpha'_j = -1 \ ,$$

donde *(1)* implica *(2)*.

Suponhamos agora que *(2)* seja verdadeira; então pondo $j = 1$ temos *(3)*, pois $\alpha_\ell = \alpha_0 = \alpha$.

Se *(3)* vale então

$$-1 = \alpha_0 \alpha'_1 = \left(\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \right) \left(\frac{P_1 - \sqrt{D}}{Q_1} \right) .$$

Multiplicando numerador e denominador por $P_1 - \sqrt{D}$ e usando a Equação (3) obtemos

$$-1 = \left(\frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0 Q_1} \right) \left(\frac{P_1^2 - D}{P_1 + \sqrt{D}} \right) = -\left(\frac{P_0 + \sqrt{D}}{P_1 + \sqrt{D}} \right) .$$

Logo $P_0 = P_1$ e *(4)* segue pela Equação (3).

Finalmente, suponhamos que *(4)* seja verdadeira. Então segue da Equação (3) que $D = P_0^2 + Q_0 Q_1 = P_1^2 + Q_0 Q_1$, donde $P_0 = P_1$. Isto nos permite proceder por indução, e *(1)* segue por periodicidade, fechando assim nosso ciclo de equivalências. $\square$

Tomando $\alpha = (5 + \sqrt{145})/10$ como um exemplo e tabulando os valores dados em (2)–(5), obtemos

j	0	1	2	3	4
P_j	5	5	7	9	7
Q_j	10	12	8	8	12
q_j	1	1	2	2	1

Aqui $\ell = 5$ e

$$\alpha_0\alpha_1' = \left(\frac{5+\sqrt{145}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{145}}{12}\right) = -1\,.$$

Analogamente, $\alpha_{\ell-j+1}\alpha_j' = \alpha_{6-j}\alpha_j' = -1$ para $1 \leq j \leq 4$ (observando que $\alpha_5 = \alpha_0$ por periodicidade). Por exemplo

$$\alpha_4\alpha_2' = \left(\frac{7+\sqrt{145}}{12}\right)\left(\frac{7-\sqrt{145}}{8}\right) = -1\,.$$

Observamos também que

$$D = 145 = 5^2 + 10 \cdot 12 = P_0^2 + Q_0Q_1\,.$$

A Definição 9 está intimamente relacionada com a Definição a seguir.

Definição 11 *Um irracional quadrático reduzido* $\alpha = \langle\overline{q_0; q_1, \ldots, q_\ell}\rangle$ *tem* período puramente simétrico *se*

$$q_j = q_{\ell-j-1} \text{ para todo inteiro } j \text{ com } 0 \leq j \leq \ell - 1;$$

em outras palavras

$$q_0q_1 \cdots q_{\ell-1}$$

é um palíndromo.

Esta última definição está relacionada com idéias fundamentais sobre somas de quadrados.

Teorema 12 *Seja* $\alpha = (P + \sqrt{D})/Q = \langle\overline{q_0; q_1, \cdots q_{\ell-1}}\rangle$ *um irracional quadrático reduzido. Então são equivalentes*

1. α *tem período puramente simétrico.*

2. *Para qualquer* $j \in \mathbb{Z}$ *com* $0 \leq j \leq \ell - 1$ *temos* $\alpha_j'\alpha_{\ell-j} = -1$.

3. $\alpha\alpha' = -1$.

4. $D = P^2 + Q^2$.

Demonstração. Que *(1)* implica *(2)* e *(2)* implica *(3)* segue por argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 10; os detalhes serão deixados para o(a) leitor(a). Para mostrar que *(3)* implica *(4)*, suponhamos que $\alpha\alpha' = -1$. Então

$$(P + \sqrt{D})/Q)(P - \sqrt{D})/Q = (P^2 - D)/Q^2 = -1,$$

e *(4)* segue imediatamente. Para mostrar que *(4)* implica *(1)*, suponhamos que $D = P^2 + Q^2 = P_0^2 + Q_0^2 = P_\ell^2 + Q_\ell^2$. Pela Equação (3) temos $D = P_\ell^2 + Q_\ell Q_{\ell-1}$, donde $Q_{\ell-1} = Q_\ell = Q_0$. Além disso, da equação (2) segue que

$$\left\lfloor \frac{P_\ell + \sqrt{D}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q_{\ell-1}Q_{\ell-1} - P_{\ell-1} + \sqrt{D}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor = \left\lfloor q_{\ell-1} + \frac{\sqrt{D} - P_{\ell-1}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{P_{\ell-1} + \sqrt{D}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor = q_{\ell-1}\,.$$

Logo

$$q_0 = \left\lfloor \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{P_\ell + \sqrt{D}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{P_{\ell-1} + \sqrt{D}}{Q_{\ell-1}} \right\rfloor = q_{\ell-1}\,.$$

Isto nos dá a primeira etapa de uma prova por indução de *(1)*, e o círculo lógico está completo. □

Exemplo 13 *Seja* $D = 221$ *e* $\alpha = (11 + \sqrt{221})/10 = \langle\overline{2; 1, 1, 2}\rangle$. *Então* α *tem período puramente simétrico de comprimento* 4, $\alpha\alpha' = -1$ *e* $D = 221 = 11^2 + 10^2 = P^2 + Q^2$.

Outra pergunta natural é: Quais são os irracionais quadráticos (caso existam) que possuem *simultaneamente* período puramente simétrico e puramente anti-simétrico? A resposta é que estes números existem, mas são bastante especiais; não é difícil mostrar que eles são os irracionais quadráticos reduzidos α tais que $\ell(\alpha) = 1$. Por exemplo, se $D = 65$ então $\alpha = 8 + \sqrt{65}$ é reduzido e $\alpha = \langle\overline{16}\rangle$ tem (trivialmente) período puramente simétrico e puramente anti-simétrico.

Nossa discusão caracterizou os irracionais quadráticos que exibem palindromia dos quocientes parciais em sua expansão em fração contínua simples. Vamos terminar com um resultado que, apesar de não ser diretamente relacionado com palindromia, decorre deste conceito e é interessante por si mesmo. Apesar de $\sqrt{D}$ não ser reduzido, o Corolário 7 mostra que os coeficientes parciais de $\sqrt{D}$ possuem uma certa simetria, que motivou a Definição 9. Através da fatoração de D, pode-se fazer uma afirmação bastante interessante sobre determinadas equações Diofantinas quadráticas.

Teorema 14 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ ímpares com $a < b$ tais que $D = ab$ não seja um quadrado perfeito e D tenha um fator ímpar congruente com 3 módulo 4. Então $\ell = \ell(\sqrt{D})$ é par. Se*

$$ax^2 - by^2 = \pm 4 \tag{8}$$

tem uma solução $x, y \in \mathbb{Z}$ com $\gcd(x, y) = 1$ então

$$aX^2 - bY^2 = \pm 1 \tag{9}$$

tem uma solução $X, Y \in \mathbb{Z}$ com $\gcd(X, Y) = 1$. Se a equação (9) tem solução e $a < b$, então $Q_{\ell/2} = a$ e $Q_f = 4a$ para algum número natural $f < \ell/2$. Se a equação (8) tem solução e $4a < b$, então $Q_f = 4a$ para algum número natural f que é aproximadamente (às vezes exatamente) $\ell/6$

Demonstração. Suponhamos que a equação (8) tenha uma solução em inteiros x, y, e sejam

$$X = \frac{(ax^2 \pm 3)x}{2} \text{ e } Y = \frac{(ax^2 \pm 1)y}{2};$$

vamos mostrar que

$$aX^2 - bY^2 = \pm 1.$$

Seja $z = ax$. Então

$$(z^2 - Dy^2)^3 = (z(z^2 + 3Dy^2))^2 - D(y(3z^2 + Dy^2))^2 = \pm 64a^3.$$

Mas,

$$z(z^2 + 3Dy^2) = z(4z^2 - 3(z^2 - Dy^2)) = z(4z^2 \pm 12a) = 8a^2 X,$$

donde

$$y(3z^2 + Dy^2) = y(4z^2 - (z^2 - Dy^2)) = y(4z^2 \pm 4a) = 8aY.$$

Em outras palavras

$$64a^4X^2 - 64a^2DY^2 = \pm 64a^3,$$

donde

$$aX^2 - bY^2 = \pm 1\,.$$

Como $\gcd(x, y) = 1$ segue que $\gcd(X, Y) = 1$ e temos a solução procurada.

A demonstração das outras afirmações envolve técnicas além do escopo do presente artigo; para detalhes, ver [5]. $\square$

Por exemplo, se $D = 805 = 5 \cdot 161 = ab$ então e

$$ax^2 - by^2 = 5x^2 - 161y^2 = -4$$

tem solução $x = 17$, $y = 3$. Destes valores de x, y obtemos

$$X = \frac{(5x^2+3)x}{2} = 12308\,, Y = \frac{(5x^2+1)y}{2} = 2169$$

e temos

$$5X^2 - 161Y^2 = 12308^2 - 161 \cdot 2169^2 = -1\,.$$

O(a) leitor(a) pode verificar que aqui $\ell = 18$ e $Q_{\ell/2} = a = 5$, $Q_f = Q_3 = 4a = 20$ e $f = \ell/6$, como previsto no teorema.

Pode ser interessante para o(a) leitor(a) com algum conhecimento de teoria algébrica de números saber que o Teorema 14 tem aplicações relacionadas a um problema de Eisenstein, que queria um critério para a solubilidade da equação (8) no caso em que unidade fundamental ε_D de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ é -1 e $ab = D \equiv 5 \pmod 8$. Sabe-se que (8) é solúvel se e somente se ε_D *não* está na ordem não maximal $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ do anel de inteiros $\mathbb{Z}[(1+\sqrt{D})/2]$ de K. Maiores detalhes se encontram em [4]–[6] e [8].

Para mais informações sobre frações contínuas simples recomendamos [10], em cujo prefácio encontramos a oportuna e triste frase: "A teoria de fração contínua simples não recebe a atenção que merece." Este foi um dos motivos para escrever este artigo. Esta bela área da Matemática merece mais atenção, em particular tendo em vista suas aplicações recentes à criptografia (veja [4, 254–272], e [6]). Mencionamos também obras clássicas no assunto como Perron [9], Wall [11], Khinchine [3] e [2] na parte histórica.

Agradecimentos : A pesquisa do autor teve o apoio do projeto # A8484 do NSERC, Canadá. O autor aproveita a oportunidade para agradecer aos dois *pareceristas* pelos valiosos comentários, que melhoraram a exposição deste artigo.

Referências

[1] E. Bombieri e A.J. van der Poorten, *Continued Fractions of Algebraic Numbers*, in **Computational Algebra e Number Theory**, W. Bosma e A.J. van der Poorten (eds.), Kluwer, (1995), 137–152.

[2] C. Brezinski, **History of Continued Fractions and Padé Approximations**, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1991).

[3] A. Ya. Khinchine, **Continued Fractions**, Traduzido da terceira edição Russa, (edição original 1935), Noordhoff, Groningen, (1963).

[4] R.A. Mollin, **Fundamental Number Theory with Applications**, CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo (1998).

[5] R.A. Mollin, **Quadratics**, CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo (1996).

[6] R.A. Mollin, **Algebraic Number theory**, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D.C. (1999).

[7] R.A. Mollin e K. Cheng, *Palindromy and Ambiguous Ideals Revisited*, Journal of Number Theory, (1999), 98–110.

[8] R.A. Mollin e A.J. van der Poorten, *Continued Fractions, Jacobi Symbols and Quadratic Diophantine Equations*, (to appear: Canad. Math. Bulletin).

[9] O. Perron, **Die Lehre von den Kettenbřuchen**, Stuttgart (1929), Reprinted Chelsea, New York (1977).

[10] A.M. Rockett e P. Szüsz, **Continued Fractions**, World Scientific, (1992).

[11] H.S. Wall, **Analytic Theory de Continued Fractions**, Van Nostrand (1948), Reprinted Chelsea, New York.

Mathematics Department,
University of Calgary,
Calgary, Alberta,
T2N 1N4, Canada
e-mail address:ramollin@math.ucalgary.ca

Tradução: Michel Spira