MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$28 – junho 2000 – pp. 19-31

Análise Complexa em Várias Variáveis

Paulo Sad

O objetivo deste artigo é expor algumas definições e resultados da teoria de funções holomorfas de modo a ressaltar seu caráter especial dentro do ambiente formado pelas funções infinitamente diferenciáveis. A ênfase recairá na utilização do operador $\overline{\partial}$. As apresentações do assunto em uma variável podem prescindir de seu uso; porém, ele torna-se bastante presente a partir da dimensão 2. Ele permite selecionar domínios onde se podem resolver problemas interessantes de Análise Complexa.

1 Funções Holomorfas em Abertos de $\mathbb{C}$

Nesta seção, após breve revisão do conceito de função holomorfa, introduzimos a derivação $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Consideremos um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e uma função deste aberto tomando valores em $\mathbb{R}^2$; tal função pode ser vista também como tendo domínio no aberto de $\mathbb{C}$ correspondente a U e tomando valores em $\mathbb{C}$ (mediante a bijeção $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z = x + iy \in \mathbb{C}$). Vamos designar indistintamente os abertos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$, bem como as funções neles definidas, pelas mesmas notações.

A função $u\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $p = (x_0, y_0) \in U$ quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\lim_{(\xi,\eta)\to 0} \frac{u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0,y_0) - (a\xi + b\eta)}{|(\xi,\eta)|} = 0 \tag{1.1}$$

onde $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ e $|(\xi,\eta)| = (\xi^2+\eta^2)^{1/2}$.

Os números $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ são as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}(p)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(p)$.

Consideremos uma função $f\colon U \to \mathbb{R}^2$, $f = (u, v)$; ela é $\mathbb{R}$-*diferenciável* em $p \in U$ quando u e v o forem neste mesmo ponto. Dito de modo equivalente: quando existe uma transformação linear $df(p)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de modo que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - df(p) \cdot h}{|h|} = 0$$

onde $h \in \mathbb{R}^2$. Quando f é $\mathbb{R}$-diferenciável em p, a transformação $df(p)$ tem como matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p) & \frac{\partial u}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p) & \frac{\partial v}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

(na base canônica de $\mathbb{R}^2$).

Por outro lado, $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{C}$-*diferenciável* em $p = x_0 + iy_0 \in U$ quando existe um número $f'(p) \in \mathbb{C}$ de modo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - f'(p) \cdot h}{h} = 0 \tag{1.2}$$

onde $h \in \mathbb{C}$; f é *holomorfa* em U quando for $\mathbb{C}$-diferenciável em todos os seus pontos. Na expressão em (1.2) subentendemos que os cálculos se fazem segundo as regras em $\mathbb{C}$, ao passo que em (1.1) utilizamos $\mathbb{R}^2$; esperamos na sequência omitir tais referências explícitas.

Como é bem conhecido (ver [E], pg. 130), *f é $\mathbb{C}$-diferenciável em p sss f é $\mathbb{R}$-diferenciável e as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}(p), \frac{\partial u}{\partial y}(p), \frac{\partial v}{\partial x}(p), \frac{\partial v}{\partial y}(p)$ estão relacionadas pelas igualdades $\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p)$* (denominadas condições de Cauchy-Riemann). Neste caso, $f'(p) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

Definamos também $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial u}{\partial x}(p) + i\frac{\partial v}{\partial x}(p)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial u}{\partial y}(p) + i\frac{\partial v}{\partial y}(p)$.

Procedamos de forma heurística por um momento; escrevendo $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$, imaginemos que $f = u + iv$ seja função das variáveis z e $\overline{z}$ (o que é realmente estranho, pois z e $\overline{z}$ não são independentes!). Apliquemos a regra da cadeia à sequência

$$(z, \overline{z}) \mapsto (x, y) \mapsto u(x, y) + iv(x, y).$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}.$$

Como $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $y = \frac{z+\overline{z}}{2i}$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1.3}$$

Ora, esperamos que uma função holomorfa só dependa da variável z; por exemplo a função $(x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 2ixy$ se escreve como $z \mapsto z^2$, a qual é holomorfa;

porém, $(x,y) \mapsto x^2+y^2+2ixy$ se escreve como $\xi \mapsto \frac{1}{2}(z^2-\overline{z}^2+2z\overline{z})$, a qual evidentemente não é holomorfa. De modo que f será holomorfa quando $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (o que traduz a "ausência" da variável $\overline{z}$ em sua definição). Observemos finalmente que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, que são as condições de Cauchy-Riemann. Encerremos então as considerações heurísticas, e adotemos (1.3) como definição. Podemos reenunciar o resultado acima do modo seguinte.

TEOREMA 1.1. *f é $\mathbb{C}$-diferenciável em $p \Leftrightarrow f$ é $\mathbb{R}$-diferenciável em p e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) =$ 0.*

Vamos penetrar rapidamente no terreno escorregadio das relações entre diferenciabilidade e existência de derivadas parciais.

TEOREMA 1.2. *Se f é de classe C^1 em U e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) = 0$ em todos os pontos de U, então f é holomorfa em U.*

Lembramos que $f = (u,v)$ é de classe C^1 quando as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem e são contínuas em U (ver [E], pg. 252); isto garante a $\mathbb{R}$-diferenciabilidade em cada ponto de U.

A recíproca deste teorema é não trivial, pois em princípio uma função holomorfa (isto é, $\mathbb{C}$-diferenciável em todos os pontos de U) é apenas $\mathbb{R}$-diferenciável em U.

TEOREMA 1.3. *Se f é holomorfa em U, então f é de classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ em todos os pontos.*

Como sabemos, as funções holomorfas acabam por ser de classe C^∞.

Não nos preocuparemos com tantas sutilezas na sequência; vamos reter apenas o enunciado: *Seja $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞. Então f é holomorfa $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ em U.*

Para efeito de notação, escrevemos $\overline{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$; o operador $\overline{\partial}$ se aplica aos elementos de $C^\infty(U,\mathbb{C})$.

Pretendemos agora ilustrar o papel que ele desempenha numa situação clássica, o Teorema de Mittag-Leffler.

A idéia em geral de seu uso é a seguinte: suponhamos que em certo problema procuramos uma solução holomorfa; então, numa primeira etapa conseguimos uma solução de classe C^∞, e posteriormente tentamos corrigi-la usando o operador de forma adequada.

Antes, porém, vejamos uma propriedade básica.

TEOREMA 1.4. *Seja $g \in C^\infty(U,\mathbb{C})$; existe $f \in C^\infty(U,\mathbb{C})$ de modo que $\overline{\partial} f = g d\overline{z}$ (ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$).*

Para a demonstração, veja [G], pg. 45. Quando g possui suporte compacto, tomamos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}. \tag{1.4}$$

Observe que se $w = x+iy$, então $dw \wedge d\overline{w} = -2idx \wedge dy$; a integral que aparece na fórmula é a integral de área usual. Para derivar em (1.4) sob o sinal de integração, inicialmente tornamos o integrando não singular em z. Para isto, mudamos variáveis: $t = w - z$; segue-se

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{g(t+z)}{t} dt \wedge d\bar{t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{(g(t+z))}{t} dt \wedge d\bar{t} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \frac{dw \wedge d\overline{w}}{w-z},
\end{aligned}
$$

e neste ponto aplicamos a fórmula integral de Cauchy

$$
g(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\iint_{\mathbb{D}_r} \frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \frac{dw \wedge d\overline{w}}{w-z} + \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{g(w)dw}{w-z}\right]
$$

a um disco $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| \leq r\}$ de raio suficientemente grande.

Deve-se observar que a equação $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ corresponde ao sistema de equações a derivadas parciais

$$
\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2Re(g) \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = Im(g) \end{cases}
$$

onde u, v são as incógnitas.

Consideremos agora o seguinte problema: no aberto U escolhemos um conjunto D discreto de pontos p_j, $j \in \mathbb{N}$. Associamos a cada ponto p_j a expressão $S_j(z) = \sum_{m=1}^{m^{(j)}} \frac{a_m^{(j)}}{(z-p_j)^m}$, onde $m_j \in \mathbb{N}$, $a_m^{(j)} \in \mathbb{C}$. Existe então uma função S meromorfa em U, tal que:

(i) $S|_{U \setminus D}$ é holomorfa;

(ii) $S(z) - S_j(z)$ é holomorfa numa vizinhança de cada ponto p_j ?

Em outras palavras, existe S meromorfa em U com partes polares prefixadas nos pontos p_j, $j \in \mathbb{N}$?

TEOREMA 1.5. *(Mittag-Leffler). O problema proposto sempre possui solução.*

DEMONSTRAÇÃO. 1- Vamos procurar inicialmente uma solução do nosso problema em classe C^∞: encontraremos $h \in C^\infty(U \setminus D, \mathbb{C})$ de tal modo que $h - S_j$ seja de classe C^∞ numa vizinhança de p_j, $\forall j = 1, 2, \ldots$. Poderíamos talvez dizer que a parte polar de h em p_j é S_j.

Selecionemos então abertos $U_j \subset U$, $p_j \in U_j$, de modo que $p_k \notin U_j$ se $j \neq k$. Adicionemos à esta coleção uma vizinhança U_0 de $U \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ disjunta de D; seja $S_0(z) \equiv 1$. Podemos supor tal cobertura localmente finita.

Definamos $S_{jk}(z) = S_k(z) - S_j(z)$ se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Esta coleção de funções holomorfas, denominada "dados de Cousin", satisfaz:

(a) $S_{jk} = -S_{kj}$ se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$;

(b) $S_{jk} + S_{k\ell} + S_{\ell k} = 0$ se $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$.

Consideremos uma partição da unidade $\{\theta_j\}$ subordinada à nossa cobertura, veja [E], pg. 438, e definamos

$$h_j(z) = \sum_k S_{jk}(z)\theta_k(z), \quad z \in U_j.$$

A soma se faz utilizando-se para cada ponto um número finito de parcelas, pois a cobertura é localmente finita; além disso; imaginamos $z \mapsto S_{jk}(z)\theta_k(z)$ estendida a $U_j \setminus U_k$ como a função nula, já que θ_k tem seu suporte em U_k. Vemos que $h_j \in C^\infty(U_j, \mathbb{C})$.

Segue-se que se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então $h_k - h_j = S_{jk}$ (basta usar (a) e (b), e o fato que $\{\theta_j\}$ constitui uma partição da unidade).

O motivo desta construção é que ela nos fornece a função $h \in C^\infty(U \setminus D, \mathbb{C})$, definida em cada $U_j \setminus \{p_j\}$ como $h := S_j - h_j$ (está bem definida, pois $h_j - S_j = h_k - S_k$ caso $U_j \cap U_k \neq \emptyset$); sendo $h - S_j \in C^\infty(U_j, \mathbb{C})$, esta função tem as propriedades inicialmente requeridas. Tratemos então de "consertá-la" para torná-la holomorfa em $U \setminus D$.

2- Com este objetivo, observemos que as propriedades já obtidas com a função h não se perdem se ela for substituida por $h + f$, onde $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$; talvez possamos escolher f de modo que $S = h + \psi$ seja holomorfa em $U \setminus D$. Para isto, devemos ter $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$ em $U_j \setminus \{p_j\}$, e portanto em U_j.

Observemos que, sendo $h_j - h_k$ holomorfa se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então $\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}$ na interseção destes conjuntos. Temos então bem definida a função $g(z) := \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}(z)$ se $z \in U_j$, e pelo Teorema 1.4 encontramos $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

Revertemos agora os passos: definimos $S := h + f$. Então

(i) $\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} + g = -\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} = 0$ em $U_j \setminus \{p_j\}$, de modo que S é holomorfa em $U \setminus D$.

(ii) em cada U_j, $S - S_j = h + f - S_j = S_j - h_j + f - S_j = f - h_j$; ora, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f - h_j) = 0$ em U_j, de modo que $S - S_j$ é holomorfa em U_j. $\square$

Este uso do operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ reaparece em várias variáveis. Nós o retomaremos em breve.

2 Funções Holomorfas em Abertos de $\mathbb{C}^n$

Existe uma mudança notável em relação ao caso de uma variável: o Teorema 1.4 não é mais válido em todos os domínios, o que implica um enriquecimento extraordinário da teoria. Antes porém de examinarmos o operador $\overline{\partial}$, algumas palavras sobre o conceito de função holomorfa.

Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto ($(z_1, \ldots, z_n) \in U$ designa um ponto qualquer) e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^∞. Dizemos que f é *holomorfa* em $U \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0$ em U $\forall\, j = 1, \ldots, n$; as derivadas parciais são as mesmas definidas em (1.4). O leitor observará que estamos evitando a discussão feita na seção anterior; pelo menos enunciaremos o seguinte resultado surpreendente, devido a Hartogs (para demonstração, ver [G], pg. 15).

TEOREMA 2.1. *Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, uma função holomorfa em cada uma das variáveis separadamente. Então f é holomorfa (em particular, de classe C^∞).*

Os exemplos de funções holomorfas são os de sempre: polinômios a várias variáveis, manipulações algébricas com funções holomorfas a uma variável, séries de funções holomorfas que convergem uniformemente em compactos, etc. A propósito, o leitor notará que estamos deixando de lado as séries de potências; a razão é que o nosso objetivo é enfatizar o uso do operador $\overline{\partial}$.

Prosseguindo na linha da Seção 1, definimos para $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$:

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j. \tag{2.1}$$

A escritura em termos de forma diferencial é uma maneira de organizar as várias derivadas parciais; $d\overline{z}_j$ é simplesmente $dx_j - idy_j$ quando $z_j = x_j + iy_j$. Trata-se de uma 1-forma do tipo $(0,1)$. Em geral, uma 1-forma diferencial é uma expressão

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j dx_j + b_j dy_j \tag{2.2}$$

onde $a_j, b_j \in C^\infty(U, \mathbb{C})$. Podemos reescrever (2.2) como

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{dz_j + d\overline{z}_j}{2} + b_j \frac{dz_j - d\overline{z}_j}{2i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j - ib_j}{2} dz_j + \frac{a_j + ib_j}{2} d\overline{z}_j \right).$$

Portanto, toda 1-forma diferencial tem escritura

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} g_j dz_j + h_j d\overline{z}_j \tag{2.3}$$

onde $g_j, h_j \in C^\infty(U,\mathbb{C})$. Aquelas 1-formas de escritura $\sum_{j=1}^n g_j dz_j$ são do tipo $(1,0)$; outras que se apresentam como $\sum_{j=1}^n h_j d\overline{z}_j$ são do tipo $(0,1)$. A 1-forma em (2.1), que é do tipo $(0,1)$, tem uma propriedade extra que descreveremos em breve. Se $\omega = \sum_{j=1}^n h_j d\overline{z}_j$, definimos

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{j=1}^n \overline{\partial} h_j \wedge d\overline{z}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge d\overline{z}_j \right). \tag{2.4}$$

A 2-forma $d\overline{z}_k \wedge d\overline{z}_j$ é simplesmente $(dx_k - idy_k) \wedge (dx_j - idy_j)$ (podemos dizer que $\overline{\partial}\omega$ é 2-forma do tipo $(0,2)$).

É sempre bom ter em mente que todos estes objetos estão ligados à estrutura real de $\mathbb{C}^n$; o fato de estarem os coeficientes tomando valores complexos é inevitável: mesmo que em (2.2) eles sejam reais, a escritura em (2.3) já inclui coeficientes a valores complexos.

Voltando a (2.4), vemos que

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{j<k} \left(\frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}_j} - \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}_k} \right) d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_k.$$

No caso particular $\omega = \overline{\partial} f$, vemos que os coeficientes são

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Ora, na Seção 1 tratávamos z e $\overline{z}$, de forma heurística, como variáveis independentes; fazemos o mesmo com $z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n$, e concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\right) = 0$$

(a prova rigorosa se faz usando a definição dada em (1.3)). Portanto, $\overline{\partial}(\overline{\partial} f) = 0$. Dizemos que uma forma ω do tipo $(0,1)$ é *$\overline{\partial}$-fechada* se $\overline{\partial}\omega = 0$; vimos então que $\overline{\partial} f$ é $\overline{\partial}$-fechada para $f \in C^\infty(U,\mathbb{C})$. Quando a forma ω do tipo $(0,1)$ puder ser escrita como $\omega = \overline{\partial} h$ para alguma função $h \in C^\infty(U,\mathbb{C})$, diremos que ela é $\overline{\partial}$-exata.

Tudo isso se parece aos conceitos correspondentes às diferenciais de $\mathbb{R}^n$. Temos mesmo o que seria o lema de Poincaré, agora devido a Dolbeault. Tomemos o domínio especial $\mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$, denominado polidisco estendido, onde $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C};\quad |z| < r\}$ mas admitimos $r = \infty$ (ou seja, $\mathbb{D}_\infty = \mathbb{C}$).

TEOREMA 2.2. *Se ω é do tipo $(0,1)$, $\overline{\partial}$-fechada e definida num polidisco estendido, então ω é $\overline{\partial}$-exata.*

Observe-se que o Teorema 1.4 foi enunciado para qualquer tipo de domínio em $\mathbb{C}$, portanto não estamos lidando com o correspondente à situação "em abertos simplesmente conexos de $\mathbb{R}^n$, toda 1-forma fechada é exata". Grosseiramente falando, o Teorema 2.2 se aplica em geral a domínios sem "buracos holomorfos" (como por exemplo os polidiscos); mas ressalvemos que os domínios de $\mathbb{C}$, mesmo quando topologicamente complicados, não possuem os tais "buracos". Se o leitor estiver inquieto é bom sinal; estamos diante de um ponto fundamental que faz diferir as teorias de uma e de mais variáveis. Para maiores informações, podem ser consultados [G], pg. 147 e [S], pg. 239.

De qualquer modo, fica o convite para tentar demonstrar o Teorema 2.2 do mesmo modo como se faz a demonstração em $\mathbb{R}^n$ de que as formas fechadas são exatas.

Retornemos ao Teorema 2.2 e aos polidiscos, e apresentemos duas aplicações no mesmo espírito do Teorema 1.5. A primeira se deve também a Hartogs.

TEOREMA 2.3. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^2$ aberto conexo limitado, e $K \subset U$ compacto que não separa U. Toda função holomorfa definida em $U \setminus K$ se estende a todo o aberto U.*

DEMONSTRAÇÃO. 1- A condição $U \setminus K$ conexo não merece tanta atenção; queremos apenas evitar situações embaraçosas como: $U = \mathbb{C}^2$, $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ (a esfera unitária de dimensão real 3), $f \equiv 1$ em $|z| > 1$ e $f \equiv 0$ em $|z| < 1$.

2- O caminho sugerido na prova do Teorema 1.5 nos leva a estender a função dada, digamos $f \in C^\infty(U \setminus K, \mathbb{C})$, de modo C^∞ a todo U, e depois tentar o conserto. Antes porém vamos demonstrar o nosso teorema numa situação geometricamente muito simples: $U = \mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R$, $K = \overline{\mathbb{D}}_{\widetilde{R}} \times \overline{\mathbb{D}}_{\widetilde{R}}$ e $0 < \widetilde{R} < R$; vamos considerar uma função ψ holomorfa numa vizinhança de $U \setminus K$; em particular, ψ está definida em $\partial(\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R)$. Consideremos (z_1, z_2) de modo que $\widetilde{R} < |z_1| < R$ e $|z_2| < R$. Cada vez que fixamos o valor de z_1, todo o disco $|z_2| \leq R$ está contido no domínio de definição de ψ, de modo que podemos escrever

$$\psi(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=R} \frac{\psi(z_1, \eta)}{\eta - z_2} d\eta; \tag{2.5}$$

Trata-se da fórmula integral de Cauchy. Agora fixemos η de modo que $|\xi| = R$ e consideremos o disco $|z_1| \leq R$; novamente ele está contido no domínio de definição de ψ. Segue-se que

$$\psi(z_1, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\xi - z_1}\, d\xi. \tag{2.6}$$

Combinando (2.5) e (2.6):

$$\psi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|\xi|=R \\ |\eta|=R}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{(\xi - z_1)(\eta - z_2)} d\xi d\eta. \tag{2.7}$$

(estamos usando o teorema de Fubini).

Ocorre porém que o 2º membro em (2.7) é uma fórmula integral bem definida sempre que $|z_1| < R$ e $|z_2| < R$. Definamos

$$\Psi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|\xi|=R \\ |\eta|=R}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{(\xi - z_1)(\eta - z_2)} d\xi d\eta. \tag{2.8}$$

De novo os argumentos heurísticos: temos uma fórmula para Ψ onde não aparecem as variáveis $\overline{z}_1$ e $\overline{z}_2$, de modo que Ψ define uma função holomorfa em $\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R$! Comparando (2.7) e (2.8), vemos que se trata de uma extensão de ψ.

3- Retornemos ao caso geral proposto no enunciado do Teorema 2.3. A geometria pode ser complicada, impedindo-nos de aplicar diretamente a argumentação anterior. Começamos então restringindo f a uma vizinhança $W \subset U$ de ∂U, e tomamos uma extensão $\tilde{f} \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ qualquer. Definamos a forma $\omega = \overline{\partial}\tilde{f}$, de tipo $(0,1)$. Como $\tilde{f} = f$ em W, vemos que $\omega \equiv 0$ em W, de modo que podemos estender ω a $\mathbb{C}^2$ como sendo identicamente nula fora de U; claramente $\overline{\partial}\omega = 0$ numa vizinhança de $\complement U$. Dentro de U, temos que $\overline{\partial}\omega = \overline{\partial}(\overline{\partial}\tilde{f})$, e um cálculo que já fizemos antes mostra que $\overline{\partial}\omega = 0$. Estamos em condições de aplicar o Teorema 2.2: existe $h \in C^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ de modo que $\overline{\partial}h = \omega$. Caso soubéssemos que $h \equiv 0$ em W, bastaria tomar $F := \tilde{f} - h$ como a extensão desejada, pois $F|_W = f$ e $\overline{\partial}F = 0$ (atenção: não podemos nos esquecer de utilizar neste ponto que $U \setminus K$ é conexo. Deixamos este encargo ao leitor).

Não sabemos de fato se $h \equiv 0$ em W. Mas h é apenas uma solução de $\overline{\partial}h = \omega$, e podemos alterá-lo à vontade somando-lhe funções holomorfas. Fixemos um bidisco $\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R$ que contém U; segue-se que h é holomorfo numa vizinhança de $\partial(\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_r)$. Pela argumentação anteriormente desenvolvida, h possui extensão holomorfa H a $\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R$. Finalmente, escolhemos $F := \tilde{f} - (h - H)$; trata-se de uma função holomorfa em U, e $(h - H)|_W \equiv 0$, portanto $F|_W = f$. □

A demonstração acima se fez em abertos de $\mathbb{C}^2$ por simplicidade. Ela vale em abertos de $\mathbb{C}^n$, com $n \geq 2$.

A situação geométrica do item 2 da demonstração do Teorema 2.3 é emblemática: quando foi apresentada por Hartogs, houve a imediata percepção que $n \geq 2$ deveria ser especial para o estudo de várias variáveis complexas. Em $\mathbb{C}$, qualquer domínio conexo tem nele definida uma função de modo que o bordo funciona como uma barreira intransponível para sua extensão. O domínio em

$\mathbb{C}^2$, $V = (\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R) \backslash (\mathbb{D}_{\widetilde{R}} \times \mathbb{D}_{\widetilde{R}})$, para $\widetilde{R} < R$, tem o seu bordo interior completamente ignorado por todas as funções holomorfas inicialmente definidas somente em V: elas são de fato definidas em $\mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R$. Portanto, em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, existem "falsos" domínios. Os verdadeiros domínios (aqueles onde podemos encontrar alguma função que não "extravase" em nenhum ponto do bordo) são chamados *domínios de holomorfia*. Os exemplos mais simples são os polidiscos. Um dos teoremas mais importantes da teoria, devido a Hormander em sua forma mais geral, garante que o Teorema 2.2 (e bem mais!) vale nos domínios de holomorfia (veja [G], pg. 147).

Passemos à segunda aplicação do Teorema 2.2. Faremos a exposição em dimensão 2, sem que isto signifique restrição alguma. Consideremos em um polidisco estendido Δ uma curva holomorfa lisa mergulhada C; diremos simplificadamente "subvariedade lisa". Isto significa para nós a existência de $\Psi\colon \Delta \to \mathbb{C}$ holomorfa de modo que $0 \in \mathbb{C}$ seja valor regular e $C = \Psi^{-1}(0)$. Certamente o leitor prefere uma definição mais local, do tipo: C é fechada como subconjunto de Δ, e cada ponto $p \in C$ pertence a uma vizinhança V_p especial, pois associada a um difeomorfismo holomorfo $\psi_p\colon V_p \to \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ tal que $\psi_p(0,0) = p$ e $\psi_p(C \cap V_p) = \mathbb{D} \times \{0\}$. A nossa definição implica a segunda, e deixamos a demonstração da recíproca como um desafio.

Diremos que uma $f\colon C \to \mathbb{C}$ é *holomorfa* se $f \circ (\psi_p^{-1})|_{\mathbb{D}\times\{0\}})$ for holomorfa $\forall\, p \in C$. O teorema seguinte é reconfortante: não precisamos nos esforçar demasiadamente para encontrar as funções holomorfas de C.

TEOREMA 2.4. *Sejam $C \subset \Delta$ subvariedade lisa e $f\colon C \to \mathbb{C}$ holomorfa. Existe $F\colon \Delta \to \mathbb{C}$ holomorfa de modo que $F|_C = f$.*

DEMONSTRAÇÃO. 1- O leitor provavelmente já se deparou com tal tipo de enunciado em um ambiente real (em classe C^∞, mais precisamente). Vamos reviver esta experiência, e aplicar o nosso operador $\overline{\partial}$ de modo conveniente.

Consideremos então a cobertura de Δ formada pelos abertos V_p (veja definição antes do enunciado do Teorema), mais o aberto $\Delta \backslash C$. Podemos selecionar os abertos de modo a ter uma cobertura locamente finita, digamos $V_0 = \Delta \setminus C$, $V_1, V_2, \ldots$, com partição da unidade $\{\theta_k\}$ associada. Em cada aberto V_k (que vem acompanhada da carta local ψ_k de C), definimos a extensão mais simples possível que podemos imaginar para f:

$$f_k(q) = f\Big(\psi_k^{-1}\big(\pi(\psi_k(q))\big)\Big), \tag{2.9}$$

onde $\pi(z_1, z_2) = z_1$. Parece estranho, mas uma simples figura explica a fórmula: $\psi_k^{-1} \circ \pi \circ \psi_k$ é uma maneira de "projetar" holomorficamente os pontos de V_k em $V_k \cap C$. Quanto a V_0, colocamos $f_0 \equiv 1$ (que é um método curioso de estender uma função que não está definida em nenhum ponto V_0!). Introduzimos dados de Cousin (compare com o Teorema 1.5): se $V_j \cap V_k \neq \emptyset$, colocamos $f_{jk} = \frac{f_k - f_j}{\Psi}$.

Podemos verificar facilmente que f_{jk} é uma função holomorfa em $V_j \cap V_k$. Observemos que: $f_{jk} = -f_{kj}$ se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, e $f_{jk}+f_{k\ell}+f_{\ell j} = 0$ se $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$.

Suponhamos por um instante que conseguimos escrever $f_{jk} = h_k - h_j$, onde h_* é holomorfo em V_*. Segue-se que $f_k - \psi h_k = f_j - \psi h_j$, e a função $F := f_j - \psi h_j$ fica bem definida independentemente do aberto escolhido. Ora, F é homomorfa e $F = f$ em $U_j \cap C$.

Portanto, este é nosso objetivo (como foi também na prova do Teorema 5): escrever f_{jk} como diferença de função holomorfas. Inicialmente nos contentamos com menos: colocando

$$\tilde{h}_j = \sum_k f_{jk}\theta_k, \tag{2.10}$$

obtemos que $\tilde{h}_j \in C^\infty(V_j, \mathbb{C})$, $\forall_j$, e que $f_{jk} = \tilde{h}_k - \tilde{h}_j$. A função $F := f_j - \psi\tilde{h}_j$ é de classe C^∞ e estende f.

2- Observemos que se $g \in C^\infty(\Delta, \mathbb{C})$ é qualquer, então $\tilde{h}_j + g$ também satisfaz $f_{jk} = (\tilde{h}_k + g) - (\tilde{h}_j + g)$.

A idéia agora é encontrar $g \in C^\infty(\Delta, \mathbb{C})$ de modo a tornar $\tilde{h}_j + g$ holomorfa $\forall\, j$. Para isso, deveríamos ter $\overline{\partial} g = -\overline{\partial}\tilde{h}_j$. Ora, $\omega = -\overline{\partial}\tilde{h}_j$ está bem definida, independentemente de j, pois $\tilde{h}_j - \tilde{h}_k$ é holomorfa e portanto $\overline{\partial}\tilde{h}_j = \overline{\partial}\tilde{h}_k$. Pelo Teorema 2.2, existe $g \in C^\infty(\Delta, \mathbb{C})$ tal que $\omega = \overline{\partial} g$, e isto conclui a prova. $\square$

Observe-se a estrutura idêntica das duas demonstração (Teorema 1.5 e Teorema 2.4). É coincidência demais; há de fato uma co-homologia de Čech por trás ..., consulte [S], pf. 234.

Outra observação: a demonstração vale em qualquer domínio onde o Teorema 2.2 possa ser aplicado, por exemplo os domínios de holomorfia...

Vamos aproveitar o ponto em que chegamos para deixar nossa consciência tranqüila: há domínios em que o Teorema 2.2 não é válido. Por exemplo, tomemos $V = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}$, e a curva $C \subset V$ como o conjunto $z_2 = 0$. Se o Teorema 2.2 fosse válido em V, o Teorema 2.4 também seria, e $f\colon C \to \mathbb{C}$, $f(z_1, 0) = \frac{1}{z_1}$ se estenderia a V como função holomorfa, e *a fortiori* a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, pelo Teorema 2.3. Portanto, $z_1 \mapsto \frac{1}{z_1}$ se estenderia como função holomorfa a $0 \in \mathbb{C}$, absurdo. A escolha do domínio V no exemplo não é casual; em dimensão 2, os domínios de holomorfia são exatamente aqueles onde vale o Teorema 2.2. Isto faz parte do já mencionado Teorema de Hormander.

Esperamos ter dado ao leitor uma breve idéia de como é interessante a teoria das funções de variáveis complexas "a várias variáveis". Ela nada fica devendo em beleza e profundidade ao caso de uma variável.

3 Um Pouco de História

Gostaríamos de acrescentar alguns comentários de ordem histórica. Nós nos deparamos com dados de Cousin durante as provas do Teorema 1.5 e Teorema 2.4. Poderíamos ter acrescentado: se $\{f_{jk}\}$ são dados de Cousin associados a uma cobertura $\{V_j\}$, o *problema de Cousin* consiste em encontrar funções holomorfas $\{f_j\}$ definidas nos abertos de modo que $f_{jk} = f_k - f_j$ sempre que $V_j \cap V_k \neq \emptyset$. Este tipo de problema aparece naturalmente (em qualquer número de variáveis) como vimos no Teorema 1.5; o primeiro a estudá-los foi P. Cousin, em um artigo aparecido na Acta Mathematica, 1895 (*Sur les Fonctions de n-Variables Complexes*). Ele se interessava em construir funções meromorfas que tivessem "polos dados a priori" numa certa região (de fato, ele utilizou produtos de domínios em uma variável). Posteriormente, K. Oka generalizou este resultado para domínios de holomorfia de $\mathbb{C}^n$ (*Domaines d'Holomorphie*, J. of Science of the Hiroshima University 7, 1937). A propósito, Cartan se refere a este tipo de problema como o 1º problema de Cousin, e àquele problema sugerido antes do Teorema 2.4 (prezado leitor: não desanime!) como o 2º problema de Cousin. O nosso Teorema 2.4 foi estudado também por Oka em *Domaines Convexes par rapport aux Functions Rationelles* (mesma referência anterior, porém vol. 6, 1936). Não satisfeito, tratou o 2º problema de Cousin (*Deuxième Problème de Cousin*, ainda mesma referência, vol. 9, 1939), e mostrou que nem sempre seria solúvel em domínios de holomorfia; pela primeira vez, aparece a idéia da solubilidade C^∞ de certos problemas de Análise Complexa como pré-condição à solubilidade holomorfa.

O método $\overline{\partial}$ começou a ser utilizado por P. Dolbeault e A. Grothendieck, que provaram o Teorema 2.2 em polidiscos. Posteriormente, Dolbeault provou-o para domínios de holomorfia (*Formes Différentielles et Cohomologie sur une Variété Analytique Complexe*, I e II, Annals of Math., 1956 e 1957).

A solubilidade do problema $\overline{\partial}$ em abertos pseudoconvexos de $\mathbb{C}^n$ (que terminam por ser domínios de holomorfia) e em variedades de Stein deve-se a L. Hörmander (*L^2 Estimates and Existence Theorems for the $\overline{\partial}$-Operator*, Acta Math., 1965), J.J. Kohn (*Harmonic Integrals on Strongly Pseudoconvex Manifolds*, I e II, Annals of Math. 1963 e 1964) e C.B. Morrey (*The Analytic Embedding of Abstract Real Analytic Manifolds*, Annals of Math., 1958).

Livros para Consulta

Para a teoria de funções holomorfas a uma variável, o leitor pode consultar [LN], [C] e [Con]. Em [LN], pg. 397, existe uma demonstração do Teorema de Mittag-Leffler sem o uso do operador $\overline{\partial}$.

Quanto à teoria em várias variáveis, [G] e [S] são excelentes.

Referências

[1] H. Cartan, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables*, Hermann, 1967.

[2] J.B. Conway, *Functions of one Complex Variable*, Springer-Verlag, 1973.

[3] E.Lima, *Curso de Análise*, vol. **2**. Projeto Euclides, IMPA, 1999.

[4] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[5] A. Lins Neto, *Funções de uma Variável Complexa*. Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[6] B.V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis*, Part **II**, AMS, 1992.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro
22460-320 - RJ, Brasil
e-mail: sad@impa.br