

Ferraduras parcialmente hiperbólicas

Lorenzo J. Díaz¹

1 Introdução

Na teoria de sistemas dinâmicos, dada uma transformação f tentamos descrever o comportamento assintótico das órbitas de f , isto é, para cada ponto X do espaço ambiente consideramos os pontos $X, f(X), \dots, f^i(X), \dots$ (e quando f é inversível também consideramos os iterados por f^{-1}) e tentamos descrever o conjunto onde se acumulam estes iterados, o chamado *conjunto limite de f* . Uma transformação f diz-se *estável* quando o conjunto limite não se altera quando a transformação varia um pouco. Podemos dizer que por uma mudança de coordenadas vamos do conjunto limite de f ao do novo sistema, e vice-versa. Também podemos pensar que pequenos erros nos cálculos das órbitas (iterados) não afetam o resultado final.

A teoria de sistemas dinâmicos (difeomorfismos ou fluxos) *estáveis* teve início nos anos sessenta e atualmente sabemos que estes sistemas admitem uma boa descrição tanto do ponto de vista topológico (em termos de hiperbolicidade uniforme e transversalidade de variedades invariantes, falaremos disto mais adiante) como do ponto de vista estatístico. Por outro lado, desde o fim dos anos sessenta, sabemos que os sistemas estáveis só formam uma pequena parte do universo de todos os sistemas e que há muitos sistemas instáveis que são interessantes. Assim, recentemente a atenção das pesquisas em sistemas dinâmicos tem se voltado para os sistemas não estáveis, que a partir de agora chamaremos não uniformemente hiperbólicos.

A idéia é tentar reproduzir, na medida do possível, a teoria dos sistemas estáveis no caso não hiperbólico. Portanto, a teoria iniciou-se estudando aqueles sistemas instáveis que são *parecidos* com os hiperbólicos/estáveis. Neste contexto há duas classes especialmente importantes:

as transformações tipo Hénon e os sistemas parcialmente hiperbólicos. A mensagem otimista final seria a seguinte, os sistemas não estáveis, porém com alguma hiperbolicidade, verificam algum tipo de estabilidade ou de persistência (isto é, há propriedades dinâmicas importantes que são compartilhadas por sistemas próximos, explicaremos algumas destas propriedades mais tarde).

Todos podemos imaginar que para o desenvolvimento de uma teoria são fundamentais modelos e exemplos. No desenvolvimento da teoria de sistemas estáveis uma peça chave foi a *ferradura de Smale*, um exemplo de sistema uniformemente hiperbólico não trivial (infinitude de órbitas periódicas e densas, recorrências não triviais, etc). De fato, a ferradura de Smale é o modelo de peça elementar de dinâmica hiperbólica (a grosso modo, a dinâmica do difeomorfismo é decomposta em dinâmicas independentes, sendo cada uma destas uma espécie de ferradura).

Na teoria não uniformemente hiperbólica temos diversos modelos que, de certa forma, sempre correspondem a generalizações de ferraduras. Aqui nos concentraremos no caso parcialmente hiperbólico, apresentaremos um modelo de ferradura parcialmente hiperbólica que contém muitos dos ingredientes fundamentais dos sistemas parcialmente hiperbólicos que tentamos entender.

Talvez um dos problemas básicos da teoria dos sistemas parcialmente hiperbólicos é que todos os modelos conhecidos são essencialmente obtidos a partir de sistemas hiperbólicos. Sem tentar ser muito preciso, e para aqueles já familiarizados com os sistemas dinâmicos, diremos que conhecemos basicamente quatro classes de exemplos: via bifurcações elementares de pontos periódicos, como perturbação de produtos de sistemas hiperbólicos pela identidade, aplicações *tempo um* de campos de vetores Anosov, e via ciclos.

Pelo motivo dado, e também como motivação, iniciaremos esta nota introduzindo sistemas bastante simples: rotações e a família sela-nó. Mais tarde falaremos da ferradura de Smale, enfatizando as noções de hiperbolicidade e dinâmica simbólica - que usaremos para obter órbitas periódicas e densas. Finalmente, apresentaremos nosso modelo, que é um *produto* de uma ferradura de Smale por uma dinâmica unidimensional dada por um *sistema iterado de funções*.

Como propositalmente não pretendemos ser exaustivos nas referências, recomendamos alguns textos. O livro [2] para aqueles interessados, porém não especialistas. Como textos mais avançados, recomendamos [6] e [4], e sobre dinâmica não uniformemente hiperbólica sugerimos [5] e [7]. Finalmente, [8] apresenta uma excelente discussão sobre resultados recentes e problemas nesta teoria.

2 Exemplos

2.1 Rotações do círculo

O círculo S^1 é o conjunto dos pontos do plano complexo \mathbb{C} da forma, $e^{ix2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$. Observamos que se k é um número inteiro, então $e^{ix2\pi}$ e $e^{i(x+k)2\pi}$ representam o mesmo ponto do círculo. Isto significa que o círculo pode ser pensado como o intervalo $[0, 1]$ onde os extremos estão identificados (ou analogamente como \mathbb{R}/\mathbb{Z}).

Uma *rotação de ângulo* $2\pi\sigma$ é a aplicação $R_\sigma: S^1 \rightarrow S^1$ definida por

$$R_\sigma(e^{ix2\pi}) = e^{i(x+\sigma)2\pi}.$$

Diremos que $R_\sigma(e^{ix2\pi})$ é o *primeiro iterado* de $e^{ix2\pi}$. O *segundo iterado* é $R_\sigma^2(e^{ix2\pi}) = R_\sigma(R_\sigma(e^{ix2\pi})) = e^{i(x+2\sigma)2\pi}$. Sucessivamente, o *m-ésimo iterado* é

$$R_\sigma^m(e^{ix2\pi}) = R_\sigma(R_\sigma^{m-1}(e^{ix2\pi})) = e^{i(x+m\sigma)2\pi}.$$

A *órbita* de $e^{ix2\pi}$, denotada $\mathcal{O}(e^{ix2\pi})$, é o conjunto de todos os seus iterados, tanto por R_σ como pela sua inversa $R_\sigma^{-1} = R_{-\sigma}$, isto é

$$\mathcal{O}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} R_\sigma^k(e^{ix2\pi}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} e^{i(x+k\sigma)2\pi}.$$

As órbitas de R_σ têm comportamento completamente diferente quando σ é racional ou irracional. Dizemos que a órbita $\mathcal{O}(e^{ix2\pi})$ é *periódica*, ou que $e^{ix2\pi}$ é um *ponto periódico* de R_σ , se ela é finita, isto é se $R_\sigma^m(e^{ix2\pi}) = e^{ix2\pi}$ para algum $m > 0$, ou seja

$$R_\sigma^m(e^{ix2\pi}) = e^{i(x+m\sigma)2\pi} = e^{ix2\pi} \iff m\sigma = k \in \mathbb{Z} \iff \sigma \in \mathbb{Q}.$$

O *período* de $e^{ix2\pi}$ é o menor $m \in \mathbb{N}$ com a propriedade anterior. Observamos que se $\sigma = p/q$, p e q primos entre si, então todos os pontos

de \mathbb{S}^1 são periódicos e seu período é q . Em primeiro lugar temos que

$$R_{\frac{p}{q}}^q(e^{ix2\pi}) = e^{i(x+\frac{p}{q})2\pi} = e^{i(x+p)2\pi} = e^{ix2\pi}.$$

Isto implica que o período m de $e^{ix2\pi}$ é menor ou igual a q . Do fato de $e^{ix2\pi}$ ter período m obtemos $m\sigma = k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $p/q = \sigma = k/m$. Esta igualdade e o fato de p e q serem primos entre si implicam que q divide m , $qr = m$. Como $m \leq q$ temos $r = 1$ e $m = q$.

Deixamos ao leitor verificar que se uma rotação R_σ tem um ponto periódico então σ é racional.

Quando σ é irracional, pelo comentário anterior, não há órbitas periódicas. Porém, neste caso, a órbita de qualquer ponto é densa em \mathbb{S}^1 . Para provar isto é suficiente ver que fixado um intervalo aberto J e um ponto $X = e^{ix2\pi}$ existe n tal que $R_\sigma^n(e^{i2\pi x}) = R_{\sigma n}(e^{i2\pi x}) \in J$. Necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.1. *Considere um número irracional $\sigma \in (0, 1)$ e um intervalo I de \mathbb{S}^1 . Então existe $m \geq 0$ tal que*

$$\mathbb{S}^1 \subset I \cup R_\sigma(I) \cup \dots \cup R_\sigma^m(I).$$

Aplicando o lema ao intervalo J temos que X pertence a algum $R_\sigma^k(J)$, ou seja, como R_σ é inversível, $R_\sigma^{-k}(X) \in J$, isto termina a demonstração. A seguir provamos o lema.

Prova do Lema: Como o comprimento de \mathbb{S}^1 é finito, usando que os comprimentos de I e $R_\sigma(I)$ são iguais (as rotações são *isometrias*) temos que os intervalos $R^j(I)$ não podem ser todos disjuntos dois a dois. Portanto, há um primeiro k tal que $R_\sigma^k(I) \cap I \neq \emptyset$. Seja $I_1 = R_\sigma^k(I)$. Afirmamos $I_1 \neq I$. Se estes intervalos fossem iguais, então R_σ teria um ponto periódico, o que contradiz a irracionalidade de σ . Para ver isto, denote por d e e os extremos de I e observe que R_σ^k é um homeomorfismo, portanto leva os extremos de I neles próprios. Se $R_\sigma^k(d) = d$ já temos o ponto periódico, contradizendo a irracionalidade de σ . Caso contrário, $R_\sigma^k(d) = e$ e $R_\sigma^k(e) = d$, ou seja, $R_\sigma^{2k}(d) = d$, tendo novamente uma contradição.

Escreva $H_1 = I_1 \cup I$ e $J_1 = (I_1 \setminus I)$, $\ell(J_1) > 0$, onde ℓ denota o comprimento do intervalo. Se $H_1 = \mathbb{S}^1$ não há mais nada a fazer,

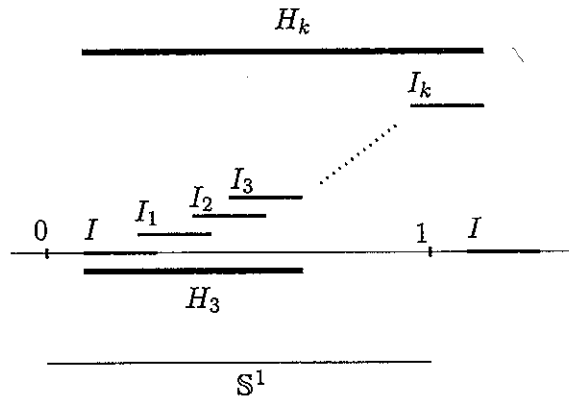


Figura 1: Rotação do círculo: I e suas imagens

caso contrário temos $\ell(H_1) = \ell(I) + \ell(J_1)$. Temos que $I_2 = R^k(I_1)$ intersecta I_1 , que está à direita de I_1 (isto decorre de que as rotações preservam a orientação) e que $J_2 = (I_2 \setminus I_1) = R_\sigma^k(J_1)$. Em particular, $\ell(J_2) = \ell(J_1)$. Portanto ou $H_2 = \mathbb{S}^1$ (e não há mais nada a fazer) ou $H_2 = I \cup I_1 \cup I_2 = I \cup J_1 \cup J_2$ tem comprimento $\ell(I) + 2\ell(J_1)$. De forma indutiva definimos os conjuntos H_j (na figura temos representado os intervalos I_j , J_j e H_j no intervalo $[0, 1]$). Temos duas possibilidades, ou $H_j = \mathbb{S}^1$ (terminando o processo indutivo) ou H_j tem comprimento $\ell(I) + j\ell(J_1)$. Como o comprimento de \mathbb{S}^1 é finito, há um primeiro k tal que $H_k = \mathbb{S}^1$, terminando a prova. \square

Como todo número irracional pode ser aproximado por números racionais e vice-versa, temos rotações de ângulos arbitrariamente próximos cuja natureza das órbitas é totalmente diferente: em um caso toda órbita é finita, em outro as órbitas são infinitas e densas em \mathbb{S}^1 . Dinamicamente isto significa que as rotações são dinamicamente *instáveis*.

2.2 Conjuntos invariantes. Os conjuntos ω e α -limite

Dado um difeomorfismo $f: M \rightarrow M$, M é uma variedade compacta, dizemos que Λ é um conjunto f -invariante se é fechado e $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Exemplos triviais, e não muito interessantes, de conjuntos invariantes são as órbitas periódicas e a própria variedade M .

Se R_σ é uma rotação de ângulo irracional, seus únicos conjuntos invariantes são S^1 e o conjunto vazio. Observe que se Λ é R_σ -invariante e $X \in \Lambda$ então a órbita de X está contida em Λ . Como Λ é fechado, o fecho da órbita está contido em Λ . Mas a órbita de X é densa em S^1 , portanto $S^1 \subset \Lambda$ e $\Lambda = S^1$.

Quando o ângulo de rotação é racional, digamos p/q , os conjuntos invariantes são da forma $\cup_{i=1}^q R_\sigma^i(F)$, onde F é fechado. Portanto, os conjuntos R_σ -invariantes são totalmente diferentes segundo σ seja racional ou irracional.

Um dos motivos do nosso interesse pelos conjuntos f -invariantes provém do fato de que pretendemos entender a dinâmica assintótica das órbitas. Assim, dado um ponto X , queremos entender onde estão (ou para onde vão) os pontos $f^i(X)$ quando i é grande. Isto nos leva a considerar o *conjunto limite positivo*, ou ω -*limite*, denotado $\omega(X, f)$, definido como o conjunto dos pontos de acumulação dos iterados de X por f . É fácil ver que este conjunto é fechado: suponha que há uma seqüência $W_n \in \omega(X, f)$ se acumulando em W , então, por definição para cada n há um iterado k_n de X , $f^{k_n}(X)$ a distância menor do que $1/n$ de W_n . Portanto, $f^{k_n}(X)$ converge a W e assim $W \in \omega(X, f)$. Também é simples ver que, pela própria definição, este conjunto é invariante.

O *conjunto limite negativo*, ou α -*limite*, $\alpha(X, f)$, se define de forma análoga considerando iterados negativos (ou seja, $\alpha(X, f) = \omega(X, f^{-1})$).

Por exemplo, no caso das rotações, $\omega(X, R_\sigma) = \alpha(X, R_\sigma) = S^1$ se σ é irracional e $\mathcal{O}(X)$ se σ é racional.

2.3 A família sela-nó

Para cada $\mu \in (-1, 1)$ consideramos a função

$$f_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\mu(x) = x + x^2 + \mu.$$

Estas funções formam a chamada *família sela-nó*. Observamos que as funções f_μ não são difeomorfismos (pois não são injetivas), mas por enquanto este fato é irrelevante para nossos propósitos.

Para determinar os pontos fixos de f_μ , resolvemos a equação

$$f_\mu(x) = x + x^2 + \mu = x \iff x^2 = -\mu.$$

Portanto, para $\mu > 0$ não existem pontos fixos. Afirmamos que neste caso, também não existem pontos periódicos. Como $f_\mu(x) > x$ para todo x , indutivamente temos

$$f_\mu^i(x) > f_\mu^{i-1}(x) > \dots > f_\mu^2(x) > f_\mu(x) > x.$$

Assim, $f_\mu^n(x) \neq x$ para todo n , e não há pontos periódicos. Vejamos que $f_\mu^i(x) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Caso contrário, a seqüência monótona $f_\mu^i(x)$ seria limitada, portanto convergeria para algum z . Afirmamos que o ponto limite é um ponto fixo, o que é absurdo. Como f_μ é contínua, $f_\mu(f_\mu^i(x)) \rightarrow f_\mu(z)$. Mas

$$f_\mu(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_\mu(f_\mu^i(x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_\mu^{i+1}(x) = z.$$

Isto é, $z = f_\mu(z)$ o que é absurdo. De fato, repetiremos este tipo de raciocínio para estudar a dinâmica de f_μ , $\mu \leq 0$.

Se $\mu = 0$, o único ponto fixo é o 0. Afirmamos este é o único ponto periódico. Se $x \neq 0$ então $f_0(x) = x + x^2 > x$. Como no caso anterior temos

$$x < f_0(x) < f_0^2(x) < \dots < f_0^i(x) < f_0^{i+1}(x) \dots$$

e x não é periódico.

Afirmamos que se $x > 0$ então $f_0^i(x) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Caso contrário, como $f_0^i(x)$ seria monótona crescente e limitada, existiria $z > 0$ tal que $f_0^i(x) \rightarrow z$. Como f_0 é contínua, teríamos, como acima, $0 \neq z = f_0(z)$ o que é um absurdo. Se $x < -1$ temos que $f_0(x) > 0$ e o resultado segue como no caso anterior. Se $x = -1$ então $f_0(-1) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Finalmente, se $x \in (-1, 0)$ afirmamos que $f_0^i(x) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Dado qualquer $x \in (-1, 0)$ a seqüência de iterados positivos de x é monótona crescente e, de $f_0((-1, 0)) \subset (-1, 0)$ obtemos a limitação superior (0 é uma cota). Portanto, a seqüência $f_0^i(x)$ converge a algum ponto $z \in [-1, 0]$. Como antes, temos que $f_0(z) = z$. Como $f(-1) = 0$ e $f(z) > z$ se $z \neq 0$, temos que $z = 0$.

Quando $\mu < 0$, os pontos fixos de f_μ são $A_\mu = -\sqrt{|\mu|}$ e $B_\mu = \sqrt{|\mu|}$. Temos $f'_\mu(A_\mu) = 1 - 2\sqrt{|\mu|} < 1$ e $f'_\mu(B_\mu) = 1 + 2\sqrt{|\mu|} > 1$. Raciocinando como no caso $\mu = 0$, temos que se $x > B_\mu$ então $f_\mu^i(x) \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$. Seja C_μ o único ponto diferente de B_μ tal que $f_\mu(C_\mu) = B_\mu$.

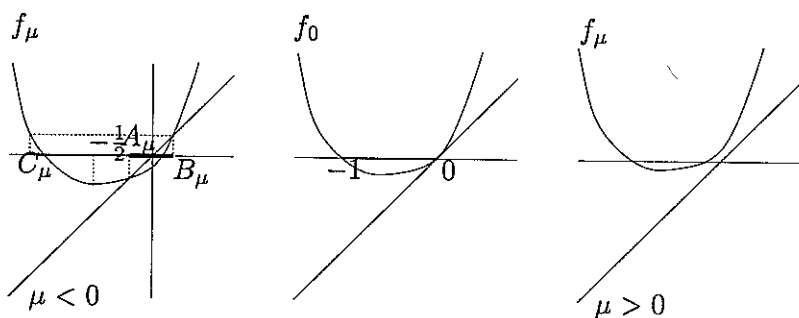


Figura 2: A família sela-nó

Então temos que $f_\mu^i(x) \rightarrow \infty$ para todo $x < C_\mu$ (basta observar que $f_\mu(x) > B_\mu$).

Observemos que $f_\mu(C_\mu, B_\mu) \subset [f_\mu(-1/2), B_\mu]$, pois $-1/2$ é o ponto de mínimo de f_μ . Portanto, para entender a órbita positiva de um ponto $x \in (C_\mu, B_\mu)$ é suficiente considerar pontos em $[f_\mu(-1/2), B_\mu]$. Temos que se $x \in (A_\mu, B_\mu)$, então $f_\mu(x) < x$ e que $f_\mu(A_\mu, B_\mu) = (A_\mu, B_\mu)$. Ou seja, a seqüência $f_\mu^i(x)$ é monótona decrescente (pois está abaixo da diagonal, a reta $y = x$) e limitada, portanto converge a um ponto fixo de $[A_\mu, B_\mu]$, usando que a seqüência é decrescente temos que a única possibilidade é que este ponto seja A_μ . Analogamente, $f_\mu(x) > x$ se $x \in (f_\mu(-1/2), A_\mu)$ e $f_\mu(f_\mu(-1/2), A_\mu) = (f_\mu(-1/2), A_\mu)$. Ou seja, a seqüência $f_\mu^i(x)$ é monótona, decrescente e limitada, portanto converge a um ponto fixo de $[f_\mu(-1/2), A_\mu]$, como antes a única possibilidade é que este ponto seja A_μ .

As diferentes possibilidades de dinâmica estão representadas na figura. Em resumo, temos o seguinte,

- $\mu < 0$: os conjuntos invariantes são da forma $[a, \infty)$. Além disso $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(x) = \infty$, em tal caso dizemos que ∞ é um atrator.
- $\mu = 0$: os conjuntos \emptyset , $\{0\}$, $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$ e \mathbb{R} são invariantes. Por exemplo, os conjuntos da forma $[m, 0]$, $m < 0$ e $[k, \infty)$, $k \in \mathbb{R}$, são invariantes. Além disso, o ponto 0 atrai os pontos de $(-\infty, 0]$ e o infinito os pontos de $(0, \infty)$. Observe que o ponto 0 atrai os pontos a sua esquerda (isto é, os iterados por f_0 destes se aproximam a 0)

e repele os pontos a sua direita (isto é, os iterados destes pontos por f_0 se afastam de 0).

- $\mu > 0$: temos que $\emptyset, \mathbb{R}, \{A_\mu\}, \{B_\mu\}, [A_\mu, B_\mu]$, e $[B_\mu, +\infty)$ são alguns dos conjuntos f_μ -invariantes. O leitor pode ver que $[f_\mu(-1/2), A_\mu]$ também é invariante e encontrar muitos outros conjuntos invariantes. Além disso, o ponto A_μ atrai os pontos de (C_μ, B_μ) , e o infinito o conjunto $(-\infty, C_\mu) \cup (B_\mu, \infty)$. Observamos que B_μ é um ponto repulsor.

Portanto, novamente temos uma mudança da natureza dos conjuntos invariantes e dos pontos periódicos quando se passa de $\mu < 0$ a $\mu > 0$. Para $\mu < 0$ temos dois pontos periódicos A_μ e B_μ , atrator e repulsor. Quando μ se aproxima de zero estes pontos também se aproximam, colapsando em $\mu = 0$, para mais tarde desaparecer. Este processo é chamado *bifurcação sela-nó*. A razão desta mudança dinâmica deve-se à *falta de hiperbolicidade* do ponto fixo 0 de f_0 , a derivada de f_0 em 0 é um. De fato, a falta de hiperbolicidade de pontos periódicos sempre é motivo de mudanças na dinâmica. Lembremos que a derivada de R_σ também é sempre um. Isto implica que as rotações não expandem nem contraem segmentos (isto não é exatamente o que ocorre com f_0 em 0, pois f_0 contrai os segmentos à esquerda (e perto) de 0, e expande os segmentos à direita (e perto) de 0). Mais tarde definiremos *hiperbolicidade* rigorosamente.

2.4 Objetivos e problemas

Na teoria dos sistemas dinâmicos se estudam problemas do seguinte tipo: Considere uma função f , um conjunto f -invariante Λ_f e uma aplicação g próxima de f (por próxima entenderemos que para todo x tanto $f(x)$ e $g(x)$ assim como suas derivadas $D_x f$ e $D_x g$ estão próximos). Existe um conjunto g -invariante Λ_g parecido com Λ_f ? Isto é, o conjunto Λ_f tem alguma forma de *persistência* quando varia f ? Este tipo de problema se chama de *estabilidade*. Vimos nos exemplos anteriores que a resposta a esta questão é, em geral, negativa.

Assim o próximo passo é ver que condições devem verificar a função f e o conjunto Λ_f para que Λ_f tenha alguma forma de persistência ou estabilidade. E, certamente, devemos dizer o que entendemos por *parecido*. Uma primeira aproximação a este termo *parecido* é exigir que

algumas das propriedades dinâmicas interessantes de Λ_f sejam válidas para Λ_g . A seguir explicaremos quais são as propriedades que consideramos interessantes e o porquê.

Invariante Maximal:

Queremos que exista uma vizinhança U de Λ_f onde este conjunto seja *invariante maximal*: $\Lambda_f = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U)$. Isto é, se a órbita de x está contida em U então $x \in \Lambda_f$. De certa forma, isto corresponde a localizar o problema e o estudo. Um tanto ingenuamente isto significa que entendendo a dinâmica de f localmente aspiramos a entendê-la globalmente, de fato isto acontece no contexto da teoria hiperbólica.

Por exemplo, uma órbita de uma rotação nunca é o maximal invariante numa vizinhança. Isto é obvio se o ângulo é irracional. Quando o ângulo é racional e as órbitas tem período m , o maximal invariante em U é $\bigcap_{i=1}^m R_\sigma^i(U)$, este conjunto ou bem é vazio, ou infinito não enumerável, sendo assim diferente de uma órbita, que é enumerável. O leitor deve tentar descobrir os conjuntos localmente maximais da família sela-nó.

Quando Λ_f é o maximal invariante numa vizinhança U e a função g está próxima de f temos um candidato natural a Λ_g : $\Lambda_g = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} g^i(U)$. Mas Λ_g pode não ter nada a ver com Λ_f , e até pode ser vazio. Por exemplo, se tomamos $f = f_0$ na família sela-nó e $U = (-\delta, \delta)$ (δ pequeno) então $\Lambda_{f_0} = \{0\}$. Fazendo $g = f_\mu$, se $\mu > 0$ temos $\Lambda_g = \emptyset$, e se $\mu < 0$ temos $\Lambda_g = [A_\mu, B_\mu]$.

Formado por pontos limite. Densidade dos pontos periódicos:

Estamos interessados em descrever a dinâmica assintótica da função f (se f for um difeomorfismo, tanto no futuro - iterados positivos - como no passado - iterados negativos). Isto nos leva a reconsiderar os conjuntos ω e α -limite dos pontos. O fecho da união destes conjuntos é o *conjunto limite de f* , denotado $L(f)$.

Dizemos que P é um *ponto limite* se existe x tal que $P \in \omega(x, f)$ ou $P \in \alpha(x, f)$. O caso mais simples (e também menos interessante) de ponto limite é um ponto periódico (obviamente $P \in \omega(P, f)$). Nas rotações irracionais, todo ponto é ponto limite de qualquer ponto (dados x e P a órbita de x se acumula em P). Na família sela-nó, se $\mu > 0$ não há pontos limite, se $\mu = 0$ o único ponto limite é a origem, e se $\mu < 0$ os pontos ω -limite são A_μ e B_μ . Nas próximas seções veremos exemplos mais interessantes de conjuntos limites.

Por exemplo, no caso da família sela-nó para $\mu < 0$, o conjunto localmente maximal $\Lambda_{f_\mu} = [A_\mu, B_\mu]$ não é muito interessante, somente contém dois pontos limite. De fato, as órbitas se acumulam no passado em B_μ e no futuro em A_μ . Portanto a dinâmica restrita a este intervalo é pouco interessante.

Queremos que Λ_f esteja formado por pontos limites, pois isto significa que Λ_f contém informações sobre a dinâmica assintótica de f . A melhor situação para que isto aconteça é que Λ_f seja o fecho dos pontos periódicos. Por exemplo, isto não acontece quando $f = R_\sigma$, σ irracional, se fazemos $\Lambda_f = S^1$, nem quando $f = f_\mu$, $\mu < 0$, e $\Lambda_{f_\mu} = [A_\mu, B_\mu]$.

Transitividade:

A transitividade corresponde à forma mais simples de *indivisibilidade* dinâmica. Por exemplo, se consideramos $f = f_\mu$ com $\mu < 0$ na família sela-nó, então os conjuntos $\Sigma = [A_\mu, B_\mu]$ e $\Lambda = \{A_\mu\} \cup \{B_\mu\}$ são conjuntos maximais invariantes. No primeiro caso, os pontos periódicos (e os limite) não são densos em Σ , e no segundo estes são densos, porém Λ consta de duas partes totalmente independentes: A_μ e B_μ . O que acontece perto de A_μ em nada afeta ao comportamento perto de B_μ , e vice-versa. Na verdade, temos dois conjuntos invariantes dinamicamente totalmente independentes: $\Lambda_1 = \{A_\mu\}$ e $\Lambda_2 = \{B_\mu\}$. Pretendemos que este tipo de coisas não aconteçam nos conjuntos que iremos considerar. A forma de evitar isto é exigir que Λ seja *transitivo*. A transitividade implica que o que acontece perto de um ponto de Λ de certa forma se espalha por todo o conjunto.

Um conjunto f -invariante Λ_f é *transitivo* se existe $x \in \Lambda_f$ tal que sua órbita é densa em Λ_f : Λ_f é o fecho de $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(x)$. Por exemplo, nos casos das rotações de ângulo irracional temos que S^1 é transitivo. No caso de $f = f_\mu$, $\mu < 0$, da família sela-nó os únicos conjuntos invariantes transitivos são os casos triviais de conjuntos com somente um ponto. A seguir apresentaremos a exemplos de conjuntos localmente maximais muito mais interessantes (de fato, verificando todas as propriedades boas citadas).

3 Hiperbolicidade. A ferradura de Smale

Até agora, explicamos o que é um conjunto f -invariante Λ_f e enumeramos as propriedades que queremos que este satisfaça: ser invariante

maximal, densidade de pontos limites e de órbitas periódicas, e transitividade. Nos exemplos vistos até agora (rotações e a família sela-nó), os conjuntos invariantes nunca satisfaziam simultaneamente todas estas propriedades (tirando o caso trivial em que Λ_f era um ponto). Finalmente, também gostaríamos que este conjunto verificasse alguma forma de persistência ou estabilidade.

Em seguida apresentaremos a *ferradura de Smale*, que fornece um exemplo de conjunto maximal invariante que verifica todas as propriedades desejadas além de ter uma *dinâmica simbólica*, que nos permitirá entender facilmente sua dinâmica. De fato, uma generalização da dinâmica simbólica será fundamental na construção das ferraduras parcialmente hiperbólicas anunciadas no título. Antes de apresentar a ferradura falaremos de hiperbolicidade.

3.1 Pontos fixos hiperbólicos

Seja L um isomorfismo linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então $L(\bar{0}) = \bar{0}$, e o vetor $\bar{0}$ é o único ponto periódico de L . Escolhemos L com autovalores $0 < \lambda < 1 < \beta$ e denotamos E_λ e E_β os autoespaços associados a λ e β . Então $L(E_\lambda) = E_\lambda$ e $L(E_\beta) = E_\beta$, e se $v \in E_\lambda$ e $w \in E_\beta$ temos

$$|L^n(v)| \leq \lambda^n |v| \quad \text{e} \quad |L^n(w)| \geq \beta^n |w|$$

se $n > 0$, onde $|u|$ denota o módulo do vetor u . Isto é, L expande o módulo dos vetores na direção E_β e contrai o dos vetores em E_λ . Chamamos a estes subespaços *direções invariantes instável e estável*, respectivamente. Observemos que L não tem nenhuma outra reta vetorial invariante. Mais ainda, se consideramos qualquer reta vetorial r e seus iterados por L ($L(r), L^2(r), \dots, L^i(r), \dots$) estas se aproximam a E_β . Se consideramos os iterados por L^{-1} de r nos aproximaremos a E_λ . Finalmente, $L^n(x) \rightarrow \bar{0}$ se $x \in E_\lambda$ e $L^{-n}(x) \rightarrow \bar{0}$ se $x \in E_\beta$ quando $n \rightarrow +\infty$. Na figura desenhamos as órbitas de pontos próximos da origem. Em particular, dada qualquer vizinhança U da origem $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L^n(U) = \Lambda_L(U) = \{\bar{0}\}$.

Seja M uma matriz próxima de L (significando que se $\ell_{i,j}$ e $m_{i,j}$ são as entradas de L e M então $\ell_{i,j}$ e $m_{i,j}$ estão próximas). Vemos que os autovalores de M são $0 < \lambda' < 1 < \beta'$. Assim, M expandirá o módulo dos vetores no autoespaço $E_{\beta'}$ e contrairá os dos vetores em $E_{\lambda'}$. Finalmente $\Lambda_M(U) = \Lambda_L(U) = \{\bar{0}\}$.

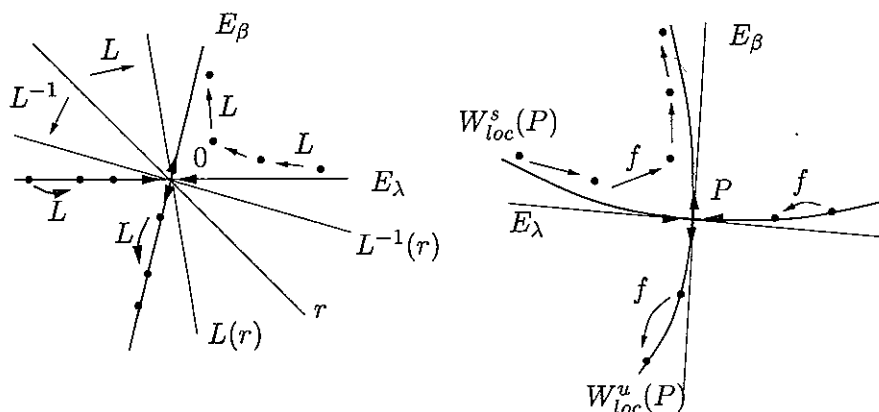


Figura 3: Dinâmica local tipo sela: transformação linear e difeomorfismo

Uma matriz com autovalores de módulo diferente de 1 (isto é, fora do círculo unitário) é chamada *matriz hiperbólica*. Se todos os autovalores estão no interior deste círculo a matriz é *contrativa*, se estão no exterior é *expansiva*, e se há autovalores no interior e no exterior é de tipo *sela*.

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo e P um ponto fixo de f , $f(P) = P$. Seja $D_P f$ a matriz derivada de f em P . Se $D_P f$ é uma matriz hiperbólica dizemos que P é um *ponto hiperbólico*. Então, o comportamento de f numa vizinhança de P é parecido com o da matriz $D_P f$ numa vizinhança da origem. Portanto, $\{P\}$ é o maximal invariante numa vizinhança. Suponhamos que $D_P f = L$. Então existem curvas tangentes aos autoespaços E_λ e E_β em P , chamadas *variedades estável e instável locais*, denotadas por $W_{loc}^s(P)$ e $W_{loc}^u(P)$ com o mesmo comportamento de E_λ e E_β , ou seja, $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(x) = P$ se $x \in W^s(P, f)$ e $\lim_{i \rightarrow -\infty} f^i(x) = P$ se $x \in W^u(P, f)$.

Usando uma versão apropriada do teorema da função implícita, tem-se que todo difeomorfismo g próximo de f tem um ponto fixo P_g próximo de P e que $D_{P_g} g$ é uma matriz hiperbólica. Este ponto é a *continuação* de P para g . Assim, $\{P_g\}$ é o maximal invariante numa vizinhança e as dinâmicas locais de f e g em uma vizinhança de P_f e P_g são essencialmente iguais. Já vimos que esta classe de continuação e estabilidade local não são válidas quando $D_P f$ não é hiperbólica: tomamos $f = f_0$ na família sela-nó, temos $f'_0(0) = 1$ (portanto a derivada não é hiperbólica)

e que $\{0\}$ é o maximal invariante numa vizinhança, mas para $\mu > 0$ o maximal invariante nessa vizinhança é o vazio e para $\mu < 0$ o intervalo $[-A_\mu, B_\mu]$.

3.2 A Ferradura de Smale

Os exemplos anteriores de conjuntos hiperbólicos são triviais: um ponto. Assim, a densidade dos pontos periódicos e a transitividade são satisfeitas automaticamente. A *Ferradura de Smale* é um exemplo de conjunto hiperbólico não enumerável onde estas propriedades são válidas. Além disso, verificam propriedades de continuação similares aos dos pontos periódicos: se f tem uma ferradura e g está próximo de f , então g tem uma ferradura que dinamicamente é idêntica. Mais tarde explicaremos isto.

No quadrado $R = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, consideramos uma aplicação injetiva e diferenciável F satisfazendo

$$F(x, y) = \begin{cases} (x/4, 4y) & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1/4] = R_1, \\ (-x/4 + 1, -4y + 4) & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [3/4, 1] = R_2. \end{cases}$$

Se $(x, y) \notin R_1 \cup R_2$ fazemos $F(x, y) \notin R$.

Esta aplicação contrai na direção horizontal e expande na vertical. Em R_1 é a restrição de uma aplicação linear e em R_2 é a restrição de uma aplicação afim. Esta aplicação pode ser entendida como a composição das seguintes duas aplicações: primeiro transformamos linearmente o quadrado em um retângulo com base de comprimento $1/4$ e altura 4 , depois fazemos uma dobra no retângulo obtido e o levamos sobre o quadrado inicial.

Observe que a aplicação F tem um ponto fixo P em R_1 (a origem), e outro Q em R_2 (o ponto $(4/5, 4/5)$). É fácil ver que os iterados negativos dos pontos de $I_1 = \{0\} \times [0, 1]$ e $J_1 = \{4/5\} \times [0, 1]$ convergem a P e Q , respectivamente. Analogamente, os iterados positivos dos pontos de $I_2 = [0, 1] \times \{0\}$ e $J_2 = [0, 1] \times \{4/5\}$ convergem a P e Q . De fato, estes conjuntos são as variedades instáveis e estáveis locais de P e Q .

Na figura temos o desenho da ferradura de Smale e das variedades estáveis e instáveis locais de P e Q .

Por construção, F é uma aplicação afim em $R_1 \cup R_2$, e transforma linhas horizontais e verticais em $R_1 \cup R_2$ em linhas horizontais e verticais em R , respectivamente. Além disso, o comprimento dos segmentos

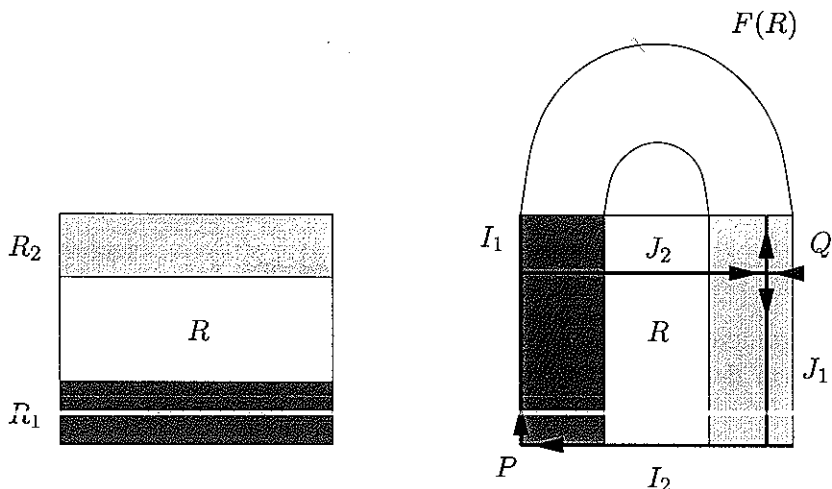


Figura 4: A ferradura de Smale

horizontais é contraído com razão $1/4$ e F multiplica o comprimento dos segmentos verticais por 4.

Como a imagem de um ponto de R no complementar de $R_1 \cup R_2$ não pertence a R , o conjunto invariante maximal de F em R , $\Lambda_F = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^i(R)$, que chamaremos Λ_F , está contido em $R_1 \cup R_2$. Como estamos interessados neste conjunto invariante maximal, no que segue podemos restringir nossa atenção aos pontos em $R_1 \cup R_2$. De fato, para sermos coerentes deveríamos estender F numa vizinhança de R e escolher um conjunto aberto contendo P e Q no seu interior, isto pode ser feito sem problemas, mas por simplicidade deixaremos este problema de lado.

A derivada $D_x F$ nos pontos fixos tem a expressão

$$D_x F = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ se } x \in R_1 \quad D_Q F = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ se } x \in R_2.$$

Assim, as retas horizontais $\mathbb{R} \times \{0\}$ e verticais $\{0\} \times \mathbb{R}$ são invariantes por DF . Obviamente, $|D_x F(v, 0)| = 1/4 |v|$ e $|D_x F(0, v)| = 4 |v|$.

Agora estamos prontos para dar a definição (quase!) exata de *hiperbolicidade*. Dados um difeomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um conjunto f -invariante Λ_f , para cada $x \in \Lambda_f$ consideramos uma *direção* E_x , (por

direção entenderemos uma reta ou um plano que passa pela origem, isto é, um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2). A família $(E_x)_{x \in \Lambda_f}$ é um campo de direções invariantes se $D_x f(E_x) = E_{f(x)}$, ou seja, a direção E_x é transformada por $D_x f$ em $E_{f(x)}$.

Dizemos que um campo de direções invariantes $(E_x^s)_{x \in \Lambda_f}$ é estável com taxa de contração λ , $0 < \lambda < 1$, se

$$|D_x f(v)| \leq \lambda |v| \quad \text{para todo } v \in E_x^s \text{ e } x \in \Lambda_f.$$

Analogamente, um campo de direções invariantes $(E_x^u)_{x \in \Lambda_f}$ é instável com taxa de expansão β , $\beta > 1$ se

$$|D_x f(v)| \geq \beta |v| \quad \text{para todo } v \in E_x^u \text{ e } x \in \Lambda_f.$$

Um conjunto f -invariante Λ_f é hiperbólico se existem campos de direções invariantes estável e instável. Isto significa que a derivada de f expande uniformemente o módulo dos vetores na direção instável e contrai uniformemente os da direção estável. No caso da Ferradura de Smale, o conjunto Λ_F , a direção estável é $\mathbb{R} \times \{0\}$ e a instável $\{0\} \times \mathbb{R}$, com taxas de contração $1/4$ e de expansão 4 .

3.3 Dinâmica Simbólica da Ferradura de Smale

Associaremos a cada ponto $x \in \Lambda_F$ um itinerário, isto é uma bi-seqüência infinita $(n_k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ formada por 1's e 2's (isto é $(n_k(x)) \in \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$). O itinerário de x nos informará que posição têm os sucessivos iterados de x pela F . O itinerário é definido como segue, como $x \in \Lambda_F$ temos que $F^i(x) \in R$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, portanto temos que $F^i(x) \in R_1 \cup R_2$, pois caso contrário, por construção, teríamos que $F^{i+1}(x) \notin R$, contradizendo o que $x \in \Lambda_F$. Escreveremos,

$$n_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } F^i(x) \in R_1, \\ 2 & \text{se } F^i(x) \in R_2. \end{cases}$$

A aplicação $h: \Lambda_F \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ que associa a cada ponto seu itinerário é bijetiva. Para ver, por exemplo, a injetividade raciocinaremos por absurdo. Suponhamos que há pontos diferentes $A = (x, y)$ e $B = (z, w)$ em Λ_F com o mesmo itinerário. Suponhamos, por exemplo, que $y \neq w$ e $|y - w| = \delta > 0$. Como os itinerários são iguais os pontos $F^i(A) = (x_i, y_i)$

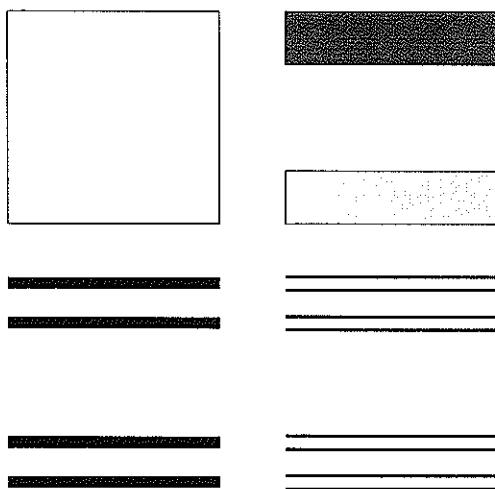


Figura 5: Cilindros

e $F^i(B) = (z_i, w_i)$ sempre estão no mesmo retângulo R_j , $j = n_j(A) = n_j(B)$. Da expressão afim da F , obtemos que $|y_i - z_i| = 4^i \delta$. Por outro lado, $F^i(A)$ e $F^i(B)$ estão no mesmo R_j , assim temos

$$4^i \delta = |y_i - z_i| \leq 1/4$$

para todo $i > 0$. Porém, como $\delta > 0$ isto é impossível.

Para provar que a aplicação é sobrejetiva, para cada $k \geq 0$ e cada seqüência (i_0, i_1, \dots, i_k) formada por 1's e 2's consideremos os conjuntos (chamados *cilindros*) $\Sigma^+(i_0, i_1, \dots, i_k)$ definido como segue

$$\Sigma^+(i_0, i_1, \dots, i_k) = \{x \in \Lambda_F \text{ tal que } n_j(x) = i_j \text{ para todo } j = 0, \dots, k\}.$$

Temos que $\Sigma^+(1) = R_1$ e $\Sigma^+(2) = R_2$. Também se verifica que $\Sigma^+(i, j)$ é um retângulo horizontal de altura $1/16$ contido em $\Sigma^+(i) = R_i$. Indutivamente, $\Sigma^+(i_0, i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$ é um retângulo horizontal contido em $\Sigma^+(i_0, i_1, \dots, i_k)$ com altura 4 vezes menor. Ou seja, dada uma seqüência $(i_0, i_1, \dots, i_k, \dots)$ temos que $\Sigma^+(i_0, i_1, \dots, i_k, \dots)$ é um segmento horizontal. Na figura desenhamos todos os cilindros Σ^+ até o passo $k = 3$. Um bom exercício é identificar cada cilindro da figura.

Considerando iterados negativos, definimos

$$\Sigma^-(i_k, \dots, i_1, i_0) = \{x \in \Lambda_F \text{ tal que } n_{-j}(x) = i_j \text{ para todo } j = 0, \dots, k\}.$$

Indutivamente, teremos que $\Sigma^-(i_k, \dots, i_1, i_0)$ é um retângulo vertical de largura $(1/4)^k$. Como antes, dada uma seqüência $(i_0, i_1, \dots, i_k, \dots)$ temos que $\Sigma^-(\dots, i_k, \dots, i_1, i_0)$ é um segmento vertical.

Agora, dada uma bi-seqüência (n_k) , consideramos os conjuntos $\Sigma^+(n_0, n_1, \dots)$ e $\Sigma^-(\dots, n_{-1}, n_0)$, que são um segmento horizontal e um segmento vertical, portanto se intersectam em um ponto (a, b) que, por construção, pertence a Λ_F e tem o itinerário desejado.

De fato esta construção fornece a injetividade e a sobrejetividade simultaneamente.

Usando a bijeção $h: \Sigma_F \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ e que o conjunto $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ não é enumerável temos que Λ_F não é enumerável.

Como exercício, propomos ver que um ponto $A \in \Lambda_F$ é periódico de período k se, e somente se, seu itinerário é periódico de período k (isto é, $n_{m+k}(A) = n_m(A)$ para todo m). Agora, como em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ há infinitas seqüências periódicas, obtemos que Λ_F contém infinitos pontos periódicos. Observe que o conjunto de pontos periódicos de Λ_F é enumerável, para isso basta ver que este conjunto é a união $\cup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$, onde \mathcal{P}_n é o conjunto de pontos de período n , e que cada \mathcal{P}_n tem cardinal menor ou igual a 2^n (isto é um bom exercício).

Por outro lado, como em $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ há seqüências não periódicas, temos que Λ_F também contém infinitos pontos não periódicos. De fato, como Λ_F não é enumerável (pois $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ não é enumerável) e os pontos periódicos de Λ_F são enumeráveis, temos que Λ_F contém um número infinito não enumerável de órbitas não periódicas. Mais tarde, usando a dinâmica simbólica, veremos que há pontos que têm uma órbita densa em Λ_F . Para isto, primeiro devemos entender a relação entre itinerários e iterações.

Agora usaremos os itinerários para obter informações dinâmicas mais profundas. Primeiro, entendamos a relação entre os itinerários de A e os de $F(A)$. Como $F^{k+1}(A) \in R_j$ implica que $F^k(F(A)) \in R_j$ então temos que $n_{k+1}(A) = n_k(F(A))$. Isto justifica a introdução da função de deslocamento à direita

$$\sigma: \{1, 2\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{Z}} \quad (n_i) \mapsto \sigma((n_i)) = (m_i), \quad m_i = n_{i+1}.$$

Como acabamos de observar, o deslocamento σ transforma o itinerário de A no de $F(A)$, ou seja:

$$\sigma \circ h = h \circ F.$$

Como h associa a cada ponto periódico um itinerário periódico, e vice-versa, segue-se que estudar os pontos periódicos de F é o mesmo que estudar os pontos periódicos de σ . Mas os pontos periódicos de σ são as bi-seqüências periódicas (itinerários periódicos).

A seguir, veremos que os pontos periódicos são densos em Λ_F . O argumento da prova da injetividade de h mostra que se A e $B \in \Lambda_F$ estão próximos então os primeiros dígitos dos seus itinerários coincidem. Em particular, dados $k > 0$, $B = (b_1, b_2)$ e $A = (a_1, a_2)$, então os k primeiros iterados destes pontos estão sempre no mesmo retângulo R_k ($n_j(A) = n_j(B)$ se $0 \leq j \leq k$), se (e somente se)

$$4^k |b_2 - a_2| \leq 1/3 \iff |b_2 - a_2| < \frac{1}{4^k 3}.$$

Mais ainda, quando a proximidade dos pontos aumenta, também aumenta o número dos dígitos onde os itinerários coincidem. Podemos fazer o mesmo raciocínio com a primeira coordenada (observe que para controlar as distâncias na segunda coordenada usamos iterados de F e para controlar as distâncias na primeira usamos iterados de F^{-1}).

Portanto, para aproximar um ponto A de itinerário $(n_k(A))$ por pontos periódicos tomamos pontos B_m com itinerário de período $2m + 1$ (portanto B_m tem período $2m + 1$) satisfazendo $n_k(B_m) = n_k(A)$ se $k \in [-m, m]$. Por construção, $B_m \rightarrow A$ quando $m \rightarrow \infty$.

Usando o mesmo tipo de argumentos construímos órbitas densas em Λ_F . Por exemplo, um bom exercício é ver que o ponto associado ao itinerário cuja parte positiva é

$$(n_k)_{k \geq 0} = 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, \dots, \\ 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, \dots 1, 1, 1, 1, \dots$$

tem a órbita densa. Observamos que a cadeia de 2's e 1's é obtida escrevendo sucessivamente todas as *palavras* possíveis de 1 2, 3, 4, etc dígitos (no texto paramos nos quatro dígitos).

O importante da dinâmica simbólica é que permite reduzir o estudo da dinâmica em Λ_F ao estudo do deslocamento à direita σ em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, o que obviamente é muito mais simples.

Finalmente dois comentários. Primeiro sobre a estabilidade da ferradura. O modelo pode parecer muito rígido, e de fato o é. Mas se

consideramos um difeomorfismo G próximo de F acontece que G tem uma ferradura Λ_G que é exatamente igual a de Λ_F , isto significa que existe uma bijeção $h_G: \Lambda_G \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $h_G^{-1} \circ \sigma \circ h_G = G$, ou seja as dinâmicas de Λ_G e Λ_F estão modeladas pela mesma dinâmica simbólica.

O segundo comentário é um pouco mais hermético, dizendo que no caso sistemas estáveis a dinâmica do conjunto limite se divide em dinâmicas locais que são do tipo de uma ferradura. Bom, estes são os chamados conjuntos *básicos*. Se você está curioso, coisa que espero, o melhor é fazer um curso de sistemas dinâmicos, algo sempre muito interessante.

Pararemos aqui, a parte dedicada à hiperbolicidade e exemplos de conjuntos hiperbólicos. Se tentássemos ser completos, deveríamos explicar os difeomorfismos de Anosov do Toro, que são de natureza diferente das ferraduras. Aos leitores interessados sugiro consultar [2], por sinal uma excelente referência para os temas explicados até agora.

4 Conjuntos Parcialmente Hiperbólicos

A partir de agora consideraremos difeomorfismos f definidos em \mathbb{R}^3 . Dizemos que um conjunto f -invariante Λ_f é *parcialmente hiperbólico de tipo sela*² se existem constantes $0 < \lambda < 1 < \beta$ e campos de retas invariantes $(E_x^s)_{x \in \Lambda_f}$, $(E_x^c)_{x \in \Lambda_f}$ e $(E_x^u)_{x \in \Lambda_f}$ (as direções estável, central e instável) tais que $D_x f$ expande na direção instável

$$|D_x f(v)| \geq \beta |v| \text{ para todo } x \in \Lambda_f \text{ e } v \in E_x^u,$$

contraí na estável

$$|D_x f(v)| \leq \lambda |v| \text{ para todo } x \in \Lambda_f \text{ e } v \in E_x^s,$$

e é *neutro* na central. Por neutro entendemos que existem pontos $x, y \in \Lambda_f$ para os quais há expansão fraca ($|D_x f(v)| \geq |v|$) e contração fraca ($|D_y f(v)| \leq |v|$). Mas para todo $v \in E_x^c$ diferente de 0 teremos

$$\lambda |v| < |D_x f(v)| < \beta |v|.$$

²salientamos que esta não é a definição exata (nem a mais geral) de hiperbolicidade parcial, somente queremos dar uma definição que contenha a idéia de hiperbolicidade parcial e seja útil no nosso contexto

Esta última afirmação corresponde ao conceito de *dominação*, noção que tem um papel muito importante em dinâmica não uniformemente hiperbólica.

Uma forma simples de obter um conjunto parcialmente hiperbólico é considerar uma Ferradura de Smale $F: R \rightarrow R$ e multiplicá-la pela identidade em \mathbb{R}

$$G: R \times \mathbb{R} \rightarrow R \times \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto G(x, y, z) = (F(x, y), z).$$

Então $\Sigma_G = \Lambda_F \times \{0\}$ é um conjunto invariante. Outra alternativa seria multiplicar a ferradura de Smale por uma rotação irracional de ângulo σ no círculo,

$$H: R \times \mathbb{S}^1 \rightarrow R \times \mathbb{S}^1, \quad (x, y, z) \mapsto H(x, y, z) = (F(x, y), R_\sigma(x)).$$

Neste caso $\Sigma_H = \Lambda_T \times \mathbb{S}^1$ é um conjunto invariante.

Nestes exemplos, temos que $\mathbb{R} \times \{0, 0\}$ é uma direção invariante estável, $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ é instável, e $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$ é totalmente neutra, por exemplo $DG(0, 0, v) = (0, 0, v)$. Mas este exemplo Σ_G é pouco interessante. Em primeiro lugar, Σ_G não é maximal invariante, se tomamos a vizinhança $U = R \times (-\delta, \delta)$ o maximal invariante em U é $\Lambda_F \times (-\delta, \delta)$. Também é fácil ver que não é transitivo (a órbita de um ponto da forma (a, b, c) sempre permanece no nível a , sua primeira coordenada nunca varia, assim nunca poderá passar perto de pontos no nível $-a$, por exemplo). Finalmente, G pode ser aproximado por uma função hiperbólica: dado $\lambda < 1$ próximo de 1, temos que $\Lambda_F \times \{0\}$ é um conjunto hiperbólico de $G_\lambda(x, y, z) = (F(x, y), \lambda z)$, pois agora a direção $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$ é contra-tiva:

$$|DG_\lambda(0, 0, v)| = |(0, 0, \lambda v)| = \lambda |v|.$$

Isto significa que o exemplo é pouco robusto.

O exemplo Σ_H é um pouco mais interessante, mas também mais sofisticado. O conjunto Σ_H é transitivo, mas ver isto não é trivial, e depende dos seguintes fatos que somente vamos indicar. Primeiro para provar a transitividade de um conjunto para um difeomorfismo f , é suficiente ver que dados dois abertos U e V existe um número n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Observe que é isto o que acontece (de uma forma muitíssimo forte) no Lema 2.1. Segundo que na ferradura de Smale, dados dois abertos U e V de Σ_F existe $m = m(U, V)$ tais que

$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq m$. Aceitos estes dois fatos o leitor deve provar a transitividade de Σ_H como exercício.

Porém, novamente esta transitividade é pouco robusta, se mudamos um pouco o ângulo de rotação e consideramos uma rotação de ângulo racional a transitividade desaparece (o leitor deve verificar como mais um exercício).

Voltando aos conjuntos parcialmente hiperbólicos, a forma em que a dinâmica de Df na direção central é neutra pode ser estabelecida de forma um pouco mais forte. Suponhamos que exista uma constante $K > 1$ tal que para todo n_0 existam $n \geq n_0$, $x_n \in \Lambda_f$ e tais que para todo $v \in E_{x_n}^c$ se tenha

$$K^{-1} |v| \leq |D_{x_n} f^n(v)| \leq K |v|.$$

Esta fórmula tem a seguinte interpretação. Queremos saber quanto expande/contrai em média a derivada de f ao longo da órbita de x na direção central. Para isso chamemos $M_i(x) = D_{f^{i-1}(x)} f(e_i)$, onde e_i é um vetor unitário na direção central $E_{f^{i-1}(x)}^c$. Como a direção central tem dimensão 1, temos que se $v \in E^c(x)$ então

$$\begin{aligned} |D_x f^n(v)| &= |D_{f^{n-1}(x)} f \circ D_{f^{n-2}(x)} f \circ \cdots \circ D_x f(v)| \\ &= M_n(x) \cdot M_{n-1}(x) \cdots M_1(x) \cdot |v| = (M_x)^n \cdot |v|, \end{aligned}$$

onde M_x é a *média de expansão* (nos n primeiros iterados). Tomando $x = x_n$ obtemos

$$-\frac{\log(K)}{n} \leq \log(M_{x_n}) \leq \frac{\log(K)}{n}.$$

Como K está fixo, fazendo n crescer obtemos pontos x_n tais que $\log(M_{x_n})$ está arbitrariamente próximo de zero, isto é, a média da sua taxa de expansão M_{x_n} está próxima de 1. Esta propriedade reflete o comportamento neutro da derivada na direção central: há pontos nos quais pode haver expansão ou contração na direção central, porém, em média, a derivada nem expande nem contrai os vetores na direção central.

5 Ferraduras Parcialmente Hiperbólicas

Nosso objetivo é a construção de uma generalização (tridimensional) parcialmente hiperbólica da ferradura de Smale com boas condições de persistência.

Consideraremos no cubo $C = [0, 1]^3$ uma aplicação injetiva e diferenciável $F: C \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que seu conjunto maximal invariante em C , Λ_F , seja parcialmente hiperbólico, com direção estável paralela ao eixo \mathbb{X} , $(\mathbb{R} \times \{(0, 0)\})$, direção instável paralela ao eixo \mathbb{Z} , $(\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$, e direção central paralela ao eixo \mathbb{Y} $(\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\})$. Teremos que, em alguns pontos de Λ_F , a direção central será de fato contrativa, para outros pontos expansiva, mas, em qualquer caso, teremos pontos onde a média da taxa de expansão de DF ao longo da direção central estará arbitrariamente próxima de um. Também teremos que as eventuais contrações na direção central serão sempre menos fortes que as contrações na direção estável, e que possíveis expansões na direção central serão menores que as expansões na direção instável (ou seja, teremos dominação). Este tipo de propriedade é muito importante no nosso contexto, e garante que para difeomorfismos próximos de F as continuações de Λ_F (ainda não definimos esta noção, o faremos no fim da nota) admitam uma decomposição do fibrado tangente em três partes: estável, central e instável. Nesta nota não teremos a oportunidade de discutir este ponto.

Escolhemos intervalos

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, 3/10], & I_2 &= [2/10, 8/10] & I_3 &= [7/10, 1], \\ J_1 &= [4/10, 1], & J_2 &= [0, 1/10] \cup [9/10, 1], & J_3 &= [0, 6/10] \end{aligned}$$

e definimos funções monótonas diferenciáveis $f_1, f_2, f_3: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f_i([0, 1]) &\subset [1/20, 19/20] \subset [0, 1], \\ 4 > f'_i(x) &= \beta > 1 \text{ se } x \in I_i, \text{ e} && \text{para todo } i = 1, 2, 3. \\ 1/10 < f'_i(x) &= \lambda < 1 \text{ se } x \in J_i. \end{aligned}$$

Estas funções formam um *sistema iterado de funções*.

Na figura desenhamos os gráficos das f_i . Observamos que f_1 tem um ponto fixo contrativo p_1 ($0 < f'_1(p_1) < 1$), f_2 tem três pontos fixos $p_2^e < q_2 < p_2^d$, p_2^e e p_2^d contrativos e q_2 expansivo, e f_3 tem um único ponto fixo p_3 que é contrativo.

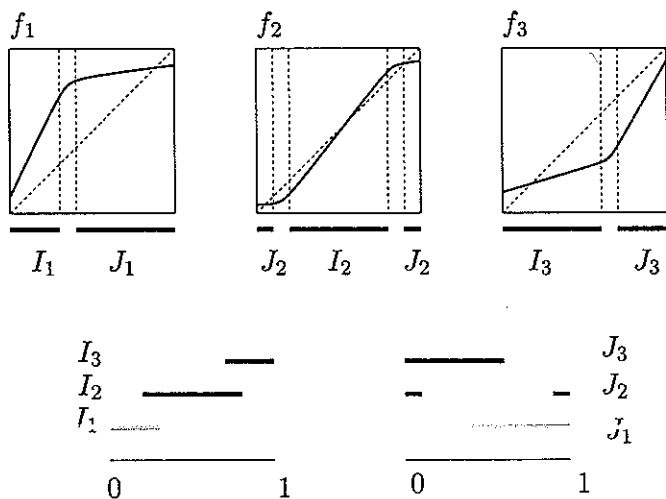


Figura 6: As funções f_i

Por construção temos que

$$[0, 1] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = J_1 \cup J_2 \cup J_3.$$

Isto implica a seguinte propriedade que será fundamental na nossa construção:

Propriedade Fundamental *dados qualquer ponto $x \in [0, 1]$ existem $1 \leq i, j \leq 3$ tais que $f_i'(x) > 3/2$ e $0 < f_j'(x) < 1/2$.*

Consideramos os subcubos C_1, C_2 e C_3 de $C = [0, 1]^3$ definidos por

$$\begin{aligned} C_1 &= [0, 1]^2 \times [1/12, 2/12], \\ C_2 &= [0, 1]^2 \times [6/12, 7/12], \\ C_3 &= [0, 1]^2 \times [10/12, 11/12] \end{aligned}$$

e funções $F_i: C_i \rightarrow C$ definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= (x/12 + 1/12, f_1(y), 12z - 1), \\ F_2(x, y, z) &= (x/12 + 5/12, f_2(y), -12z + 7), \\ F_3(x, y, z) &= (x/12 + 9/12, f_3(y), 12z - 11). \end{aligned}$$

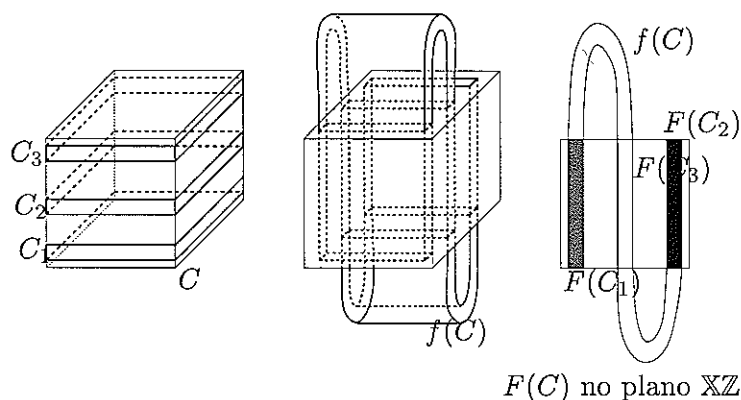


Figura 7: A função F : Ferradura parcialmente hiperbólica

Finalmente consideramos qualquer função diferenciável e injetiva $F: C \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F_i(x, y, z) \text{ se } x \in C_i \\ F(x, y, z) &\notin C \text{ se } x \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3. \end{aligned}$$

Esta função lembra a Ferradura de Smale, como pode se observar na figura.

Estamos interessados no conjunto maximal invariante Λ_F de F em C , $\Lambda_F = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F^i(C)$. Este conjunto depende exclusivamente das definições de F_1 , F_2 e F_3 (pois, como no caso da ferradura, todo ponto que não pertence a $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ é jogado fora de C pela F , não estando assim em Λ_F .) Portanto, podemos restringir nossa atenção aos pontos na união destes três subcubos, que chamaremos C' .

Pela expressão da F para todo ponto $X \in C'$ temos:

$$\begin{aligned} D_{(x,y,z)}F(1, 0, 0) &= (1/12, 0, 0), \\ D_{(x,y,z)}F(0, 0, 1) &= (0, 0, \pm 12), \\ D_{(x,y,z)}F(0, 1, 0) &= (0, f'_j(y), 0) \text{ se } y \in C_j. \end{aligned}$$

Assim, as direções horizontal ($\mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$), central ($\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$), e vertical ($\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$) são invariantes pela derivada de F . Temos que $D_{(x,y,z)}F$ expande (com razão 12) o módulo dos vetores da direção vertical e contrai (com razão $1/12$) os da horizontal. Na direção central

teremos umas vezes expansão e outras contração (sendo que estas oscilam entre $1/2$ e 12 , portanto temos dominação). Por exemplo, o leitor pode verificar que ponto fixo $(5/11, q_2, 7/13)$ expande a direção central e o ponto $(1/11, p_1, 1/11)$ a contrai. Convidamos ao leitor a encontrar os outros pontos fixos e discutir seu caráter (expansivo ou contrativo na direção central).

Uma propriedade muito importante de Λ_F é que contém pontos periódicos tipo sela com diferentes comportamentos na direção central, há pontos cujo modulo da derivada nesta direção é maior que 1, e outros que é menor que 1. Dizemos que estes pontos tem diferente *índice* (número de autovalores contrativos da derivada contados com multiplicidade). Por exemplo, no nosso caso o ponto p_1 tem índice dois e o ponto q_2 tem índice um. Este é um fenômeno típico de dimensão maior ou igual a três.

5.1 (Quase)dinâmica simbólica

Nosso próximo objetivo é obter uma generalização da dinâmica simbólica da Ferradura de Smale que informe não sobre o itinerário em si do ponto, mas sobre se o ponto está sendo contraído ou expandido na direção central. Para isso, dado $A = (x, y, z) \in C_i \subset C'$ diremos que A é de *tipo expansivo* se $y \in I_i$. Se $y \in J_i$ então A é de *tipo contrativo*. Observamos que há pontos em C' que não são nem contrativos nem expansivos (aqueles com $y \in I \setminus (I_i \cup J_i)$). De fato, no momento, esqueceremos estes pontos.

Primeiro, como no caso da ferradura de Smale, a cada ponto $A \in \Lambda_F$, $A_i = F^i(A) = (a_i, b_i, c_i)$, associamos uma bi-séqüência de posições $p(A) = (p_i(A))_{i \in \mathbb{Z}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $A_i \in C_{p_i(A)}$, a qual informa em que subcubo está o iterado A_i de A . Infelizmente esta função não fornece tanta informação como a da ferradura de Smale. Por exemplo não é injetiva (os pontos fixos $(1/11, p_1, 1/11)$ e $(1/11, q_1, 1/11)$ tem a mesma séqüência de posições). Mas raciocinando como no caso da ferradura de Smale temos que é sobrejetiva. Portanto, entender a dinâmica de Λ_F é muito mais complicado que entender a dos deslocamentos em $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$. Por exemplo, há pontos cuja série de posições é periódica, porém não são periódicos (por exemplo os do segmento $\{1/11\} \times (p_1, q_1) \times \{1/11\}$).

Portanto, a dinâmica simbólica das posições não é suficiente para nossos objetivos.

Queremos agora uma seqüência de símbolos (com propriedades parecidas a da dinâmica simbólica da ferradura) que nos informe se a derivada na direção central do iterado em questão expande ou contrai. Observe que no caso da ferradura não tínhamos este problema, sempre havia expansão vertical e contração horizontal. Por este mesmo motivo vamos mais ou menos esquecer as direções vertical e horizontal no nosso exemplo, pois elas não são conflitivas.

No momento, restringiremos nossa atenção àqueles pontos A de Λ_F tais que todo ponto da sua órbita positiva é ou de tipo expansivo ou contrativo, isto é, se $A_i = F^i(A) = (a_i, b_i, c_i)$ e $A_i \in C_{p_i(A)}$ então temos que

$$b_i \in I_{p_i(A)} \cup J_{p_i(A)}.$$

Veremos que esta limitação não é muito importante. Denominaremos Σ_F a este subconjunto de Λ_F . Então dado $A \in \Sigma_F$ consideramos a seguinte função:

$$g: \Sigma_F \rightarrow \{e, c\}^{\mathbb{N}_0}, \quad A \mapsto g(A) = (n_k(A))_{k \geq 0} \in \{e, c\}^{\mathbb{N}_0},$$

$$\begin{cases} n_k(A) = e & \text{se } b_k \in I_{p_k(A)} \\ n_k(A) = c & \text{se } b_k \in J_{p_k(A)}. \end{cases}$$

Agora temos que introduzir um pouco de notação. Diremos que um segmento V da forma $(\{(a, b)\} \times [0, 1])$ é um *segmento vertical*. Associado a V há três subsegmentos verticais, as interseções de V com os cubos C_1, C_2 e C_3 . Denotaremos estas interseções por V_1, V_2 e V_3 , respectivamente. Pela expressão da F , a imagem de um subsegmento vertical é um segmento vertical. Por exemplo, dado $W = \{(a, b)\} \times [1/12, 2/12] \subset C_1$, então $F(W) = \{(1/12 + a/12, f_1(b))\} \times [0, 1]$.

Diremos que um subsegmento vertical W é *contrativo* se $n_0(A) = c$ para todo A em W (de fato, no nosso caso o valor n_0 é independente do ponto do subsegmento). Analogamente, um subsegmento vertical W é *expansivo* se $n_0(A) = e$ para todo A em W .

Lema 5.1. *Todo segmento vertical V contém no mínimo um subsegmento vertical contrativo e um subsegmento vertical expansivo*

Denotaremos estes segmentos, respectivamente, por V^c e V^e . Obviamente, V pode conter mais de um segmento contrativo (mais precisamente dois), em tal caso escolhemos um deles, que chamaremos V^c ,

descartando o outro. A escolha é completamente irrelevante. Faremos o mesmo com os expansivos.

Prova do Lema: Tomamos $V = \{(a, b)\} \times [0, 1]$. Pela Propriedade Fundamental existem j e k em $\{1, 2, 3\}$ tal que $b \in I_j$ e $b \in J_k$. Assim, é suficiente considerar $V^e = V \cap C_j$ e $V^c = V \cap C_k$. \square

Definimos Λ_F^+ como o conjunto de pontos de C que tem sua órbita positiva contida em C , isto é $\Lambda_F^+ = \bigcap_{i \geq 0} F^i(C)$. Definimos Σ_F^+ como o subconjunto de Λ_F^+ tais que toda sua órbita positiva está formada de pontos expansivos ou contrativos.

Lema 5.2. (Sobrejetividade da aplicação g) *Seja $(n_k)_{k \geq 0}$ uma seqüência em $\{e, c\}^{\mathbb{N}_0}$. Então existe $A \in \Sigma_F^+$ tal que $g(A) = (n_k)_{k \geq 0}$.*

Seja A um ponto de Σ_F^+ , e $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uma bi-seqüência de c 's e e 's. Dizemos que A tem *itinerário de tipo (n_k)* se $g(A) = (n_k)$. Um itinerário (n_k) é *periódico de período p* se $n_{k+p} = n_k$ para todo k .

Prova do Lema: Primeiro consideramos qualquer segmento vertical V . Pelo Lema 5.1, V contém um subsegmento vertical V^0 de tipo n_0 (obviamente, tipo c significará contrativo e tipo e significará expansivo). Seja $V'_0 = F(V_0)$. Temos que V'_0 é um segmento vertical. Novamente pelo Lema 5.1, V' contém subsegmentos $(V'_0)^c$ e $(V'_0)^e$ de tipo c e e . Se $n_1 = c$ escrevemos $V_1 = (V'_0)^c$, caso contrário, escrevemos $V_1 = (V'_0)^e$. Escrevemos $K_1 = F^{-1}(V_1)$. Temos que K_1 é um segmento contido em V_0 de comprimento $1/12 \ell(V_0)$.

Agora raciocinaremos indutivamente. Suponhamos definidos subsegmentos verticais V_0, \dots, V_n tais que, para todo $0 \leq m \leq n$, V_m é do tipo n_m e $V_{m+1} \subset F(V_m)$. Isto implica que

$$\ell(F^{-1}(V_{m+1})) = (1/12) \ell(V_m).$$

Indutivamente,

$$\ell(F^{-m-1}(V_{m+1})) = (1/12)^{m+1} \ell(V_0)$$

Portanto, por construção, a seqüência de intervalos $K_m = F^{-m}(V_m) \subset V_0$ é encaixada ($K_{m+1} \subset K_m$) e seu comprimento é $(1/12)^{m+1} \ell(V_0)$.

Para a definição de V_{n+1} faremos como no caso $n = 0$, escrevemos $V'_{n+1} = F(V_n)$. Como V'_{n+1} é um segmento vertical, pelo Lema 5.1,

V'_{n+1} contém subsegmentos $(V'_{n+1})^c$ e $(V'_{n+1})^e$. Se $n_{n+1} = c$ escrevemos $V_{n+1} = (V'_{n+1})^c$, caso contrário $V_{n+1} = (V'_{n+1})^e$. Por construção, $V_{n+1} \subset F(V_n)$. Escrevemos $K_{n+1} = F^{-(n+1)}(V_{n+1}) \subset K_n \subset V_0$. O comprimento de K_{n+1} é $(1/12)^{n+1} \ell(V_0)$.

Obtivemos uma sequência de segmentos compactos encaixados $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$ com comprimento decrescendo exponencialmente. Portanto, sua interseção $\bigcap_{n \geq 0} K_n$ é um ponto que chamaremos A . Por construção, $A \in \Lambda_F^+$ e tem itinerário positivo do tipo (n_k) : como $A \in K_m$, $F^m(A) \in F^m(K_m) = V_m$ que, por definição, está formado por pontos do tipo n_m . Isto termina a prova do lema. \square

Observemos que a nossa construção fornece um único ponto com itinerário prefixado, mas não sabemos se é o único. Por exemplo, suponhamos que $n_0 = c$ e que, logo no primeiro passo da nossa construção, o segmento vertical V escolhido contenha dois subsegmentos de tipo C , digamos V_{01} e V_{02} . Podemos continuar a prova com qualquer dos dois segmentos, mas os pontos resultantes das construções serão diferentes.

Dois comentários finais: primeiro, não sabemos se A pertence a Λ_F , segundo não sabemos se é um ponto limite ou dinamicamente interessante. Resolveremos agora estes problemas.

O próximo lema afirma que dado qualquer itinerário periódico sempre há um ponto limite em Λ_F que o recorre:

Lema 5.3. *Seja $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \{c, e\}^{\mathbb{Z}}$ uma bi-sequência periódica (isto é, existe p tal que $n_{k+p} = n_k$ para todo k) Então existe um ponto limite A em Λ_F com itinerário (n_k) .*

Como no lema anterior temos que *a priori* o ponto A não é, necessariamente, nem único nem periódico.

Prova do Lema: Seja p o período de (n_k) . Consideremos a parte positiva de órbita (n_k) , $(n_k)_{k \geq 0}$. Pelo Lema 5.2, existe um ponto $B \in \Sigma_F^+$ com itinerário positivo $(n_k)_{k \geq 0}$, infelizmente não sabemos se B é periódico. Por outro lado, os pontos $F^{mp}(B) = B_m$ tem também itinerário positivo periódico (n_k) (isto segue usando a função deslocamento e suas propriedades). Por construção, $F^i(B_m) = F^{mp+i}(B)$ é do tipo $n_{mp+i} = n_i$ e $B_m \in \Sigma_F^+$ (como a órbita positiva de B está contida em C o mesmo vale para a de B_m).

Seja A um ponto de acumulação dos B_m . Por definição A é um ponto limite de B ($A \in \omega(B, F)$). Para simplificar suponhamos que $B_m \rightarrow A$.

O lema segue da seguinte afirmação,

Afirmação. $A \in \Lambda_F$ e $g(A) = (n_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. (O leitor poderá reclamar que esta função não é exatamente a mesma g que foi definida anteriormente, mas sua definição é a óbvia).

Para ver que a órbita de A está contida em C , raciocinaremos por absurdo. Suponhamos que $F^j(A) \notin C$ para algum j . Suponhamos que $j < 0$. Então há uma bola de raio $\delta > 0$ centrada em $F^j(A)$ que não intersecta a C . Como F^j é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\text{dist}(X, A) < \varepsilon$ então $\text{dist}(F^j(A), F^j(X)) < \delta$, e, portanto, $F^j(X) \notin C$. Como $B_m \rightarrow A$ existe $m > |j|$ tal que $\text{dist}(B_m, A) < \varepsilon$. Portanto, $F^j(B_m) = B_{m+j} = B_r$ ($r = m + j > 0$) não está em C , contradizendo o fato da órbita positiva de B estar contida em C .

Exatamente o mesmo argumento, que somente usa continuidade, implica que o itinerário de A é do tipo (n_k) . Isto termina a prova do lema. \square

Agora estamos em condições de provar que Λ_F é parcialmente hiperbólico:

Proposição 5.4. *O conjunto Λ_F é parcialmente hiperbólico.*

Prova: Já sabemos que DF deixa invariantes as direções horizontal, central e vertical, contraindo com taxa $1/12$ a horizontal e expandindo com taxa 12 a vertical. Falta ver que existem pontos com média da taxa de contração/expansão na direção central arbitrariamente próxima de 1 .

A seguir dado $n_0 > 0$ suficientemente grande, acharemos $n \geq n_0$ e um ponto $A_n \in \Lambda_F$ para o qual a taxa de dilatação na direção central dos seus n primeiros iterados está arbitrariamente próxima de 1 . Para isto é suficiente escolher A_n tal que

$$1 \leq \|D_{A_n} F^n(0, 1, 0)\| \leq \lambda^{-1},$$

lembramos que $\beta > 1$ e $f'_i(y) = \beta$ para todo $y \in I_k$. Também tínhamos $\lambda < 1$ e $f'_i(y) = \lambda$ para todo $y \in J_k$. Provado isto, teremos que a média de taxa de expansão dos n primeiros iterados de A , M_n , verifica

$$0 \leq \log(M_n) \leq \frac{\log(\lambda^{-1})}{n}.$$

Isto implica que M_n está próximo de 1.

Para provar a afirmação, observe que se $B = (x, y, z) \in C_i$ é um ponto de tipo expansivo então,

$$|D_B F(0, 1, 0)| = |(0, f'_i(y), 0)| = \beta.$$

Analogamente, se $B \in C_i$ é contrativo,

$$|D_B F(0, 1, 0)| = |(0, f'_i(y), 0)| = \lambda.$$

Para provar a afirmação escolhamos m tal que

$$\lambda^{m+1} \beta^{n_0} < 1 \leq \lambda^m \beta^{n_0}$$

Portanto,

$$1 \leq \lambda^m \beta^{n_0} < \lambda^{-1}.$$

Considere um ponto limite A em Λ_F com itinerário de período $n = m + n_0$ da forma $n_i(A) = c$ se $0 \leq i \leq m - 1$, e $n_i(A) = e$ se $m \leq i \leq m + n_0 - 1$. Por construção, e especialmente pelas fórmulas sobre as derivadas na direção central de pontos de tipo contrativo e expansivo acima, temos

$$1 \leq |D_A F^{m+n_0}(0, 1, 0)| \leq \lambda^{-1}.$$

Agora, fazendo $n_0 \rightarrow \infty$ obtemos o resultado. \square

Este tipo de resultado significa o seguinte: se o ponto A da prova da proposição fosse periódico, sua derivada (considerada no período) estaria próxima de 1. Isto significa que o ponto A (considerado na direção central e visto no período) é muito parecido com os pontos A_μ e B_μ que aparecem na família sela-nó. O que de fato acontece é que podemos perturbar nosso modelo para obter exatamente uma função que, localmente e vista no período, é como a família sela-nó no ponto zero.

5.2 Comentário final

Temos que fazer alguns comentários. Primeiro, que há infinitos pontos em Λ_F com itinerários periódicos (basta ver que o número destes itinerários é infinito). Se quisermos obter mais propriedades sobre o conjunto Λ_F então deveríamos analisar com atenção as funções f_1, f_2

e f_3 (das quais muito pouco exigimos). Escolhendo com cuidado estas funções, é possível garantir a transitividade de Λ_F . Mas isto depende de uma análise muito mais detalhada, a qual escapa aos nossos objetivos.

Nossa construção é muito rígida, estamos preservando as direções paralelas aos eixos coordenados. Obviamente, se variamos um pouco a função nada disto será mais verdade. Por sorte sabemos que há outras direções invariantes (próximas as dos eixos) e os argumentos podem ser repetidos. Isto significa que o nosso exemplo e suas propriedades são válidas para aplicações próximas. Estas são as continuções de que falamos.

O modelo de ferradura parcialmente hiperbólica apresentado está inspirado na aplicação chamada *misturador (blender)* introduzido em [1] para estudar difeomorfismos transitivos parcialmente hiperbólicos. Estes misturadores foram generalizados em [3]. De fato, o modelo apresentado aqui foi encontrado (por várias pessoas) faz tempo e já o utilizamos várias vezes para entender como *as coisas funcionam*, talvez não seja o ideal, mas sempre ajuda, pois fornece um modelo de dinâmica parcialmente hiperbólica simples e ao mesmo tempo rica. Ou seja, é um bom modelo. Além disso, pensamos que os misturadores (do qual o modelo apresentado é um exemplo) são o mecanismo fundamental para obter transitividade robusta, mas isto é outra estória. Este é o motivo pelo qual escolhi apresentá-lo.

Referências

- [1] Ch. Bonatti e L.J. Díaz, *Persistence of transitive diffeomorphisms*, Ann. Math., **143**, 367-396, (1995).
- [2] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin-Cummings, (1986).
- [3] L.J. Díaz e J. Rocha, *Partially hyperbolic and transitive dynamics generated by heteroclinic cycles*, prepublicação PUC-Rio 1998 e a parecer em Ergodic Th. & Dyn. Systems.
- [4] A. Katok e B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **54**, (1995)

-
- [5] J. Palis e F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **35**, (1993).
- [6] D. Ruelle, *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*, Academic Press, (1989).
- [7] M. Viana, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, 21 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1997).
- [8] M. Viana, *Dynamics a probabilistic and geometric perspective*, Documenta Mathematica - ICM98, vol (1), 557-578, (1998).

Lorenzo J. Díaz (lodiaz@mat.puc-rio.br)
Depto. Matemática PUC-Rio
Marquês de S. Vicente 225
22453-900 Rio de Janeiro RJ
Brasil