MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº28 – junho 2000 – pp. 93-98

# Uma Nota sobre a Noção de Anel Valorizado

Nilson C. Bernardes Jr. e Dinamérico P. Pombo Jr.

No que se segue, $A$ denotará um anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$. Lembremos [8] que uma aplicação

$$|\cdot| : A \to \mathbf{R}_+$$

é um *valor absoluto* em $A$ se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $a, b \in A$:

(VA1) $|a| = 0$ equivale a $a = 0$;

(VA2) $|ab| = |a||b|$;

(VA3) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Um *anel valorizado* é um anel munido de um valor absoluto. Note que se uma aplicação $|\cdot| : A \to \mathbf{R}_+$ satisfaz (VA1) e (VA2), então

$$|-1| = |1| = 1 \qquad \text{e} \qquad |-a| = |a| \ \text{ para todo } a \in A.$$

O estudo dos anéis valorizados e, em particular, o estudo dos corpos valorizados (Teoria das Valorizações), desempenha um papel importante em diversas áreas da matemática, tais como Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica e Teoria dos Números. Aos leitores interessados na Teoria das Valorizações, sugerimos [1], [2], [3], [4], [7] e [8].

O objetivo da presente nota é provar que alguns resultados básicos da Teoria das Valorizações podem ser estendidos ao contexto dos anéis valorizados.

Os argumentos aqui utilizados, de caráter elementar, são baseados em idéias clássicas devidas a E. Artin (consultar [1] e [5]).

Vejamos alguns exemplos importantes de anéis valorizados que não são corpos.

(a) Seja $\mathbf{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss. A aplicação

$$a + ib \in \mathbf{Z}[i] \mapsto (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}_+$$

é um valor absoluto em $\mathbf{Z}[i]$, que induz no subanel $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}[i]$ o seu valor absoluto usual.

(b) Fixemos um natural primo $p$. Se $a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, existem um único natural $n$ e um único inteiro $d$ tais que $d$ e $p$ são primos entre si e $a = p^n d$. Definamos $|a|_p = p^{-n}$, e definamos $|0|_p = 0$. A aplicação

$$a \in \mathbf{Z} \mapsto |a|_p \in \mathbf{R}_+$$

é um valor absoluto em $\mathbf{Z}$, satisfazendo

$$|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$$

para quaisquer $a, b \in \mathbf{Z}$.

(c) Sejam $K$ um corpo e $K[X]$ o anel dos polinômios na indeterminada $X$ com coeficientes em $K$. Fixemos $p(X) \in K[X]$ irredutível sobre $K$. Se $f(X) \in K[X]$, $f(X) \neq 0$, existem um único natural $n$ e um único $h(X) \in K[X]$ tais que $h(X)$ e $p(X)$ são primos entre si e $f(X) = (p(X))^n h(X)$. Definamos $|f(X)| = 2^{-n}$, e definamos $|0| = 0$. A aplicação

$$f(X) \in K[X] \mapsto |f(X)| \in \mathbf{R}_+$$

é um valor absoluto em $K[X]$, satisfazendo

$$|f(X) + g(X)| \leq \max\{|f(X)|, |g(X)|\}$$

para quaisquer $f(X), g(X) \in K[X]$.

A partir deste instante, a menos que se diga explicitamente o contrário, $|\cdot|$ designará uma aplicação de $A$ em $\mathbf{R}_+$ satisfazendo (VA1) e (VA2).

Para $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, consideremos as condições $(U_\alpha)$ e $(V_\beta)$ abaixo, já estudadas no caso dos corpos (ver [2], p. 403, [6], pp. 51–52 e [8], p. 141).

$(U_\alpha)$ $|a + b| \leq \alpha \max\{|a|, |b|\}$ para quaisquer $a, b \in A$.

$(V_\beta)$ $|a + b| \leq \beta(|a| + |b|)$ para quaisquer $a, b \in A$.

Supondo $(U_\alpha)$ (respectivamente $(V_\beta)$) verdadeira e fazendo $a = 1$ e $b = 0$, vemos que $\alpha \geq 1$ (respectivamente $\beta \geq 1$).

**Proposição 1.** *$(U_\alpha)$ implica $(V_\alpha)$ e $(V_\beta)$ implica $(U_{2\beta})$. Em particular, para que $(U_\alpha)$ seja válida para algum $\alpha$, é necessário e suficiente que $(V_\beta)$ seja válida para algum $\beta$.*

**Demonstração.** Suponhamos $(U_\alpha)$ válida. Então

$$|a+b| \leq \alpha \max\{|a|, |b|\} \leq \alpha(|a|+|b|)$$

para quaisquer $a, b \in A$, e $(V_\alpha)$ é válida.

Suponhamos $(V_\beta)$ válida. Então

$$|a+b| \leq \beta(|a|+|b|) \leq (2\beta)\max\{|a|, |b|\}$$

para quaisquer $a, b \in A$, e $(U_{2\beta})$ é válida.

Nesta nota provaremos que os valores absolutos são precisamente as aplicações $|\cdot|$ para as quais $(U_2)$ é válida. Como conseqüência, veremos que $|\cdot|^\mu$ é um valor absoluto (para uma escolha conveniente de $\mu$) caso $|\cdot|$ satisfaça $(U_\alpha)$ para algum $\alpha$. Além disso, daremos um exemplo mostrando que há aplicações $|\cdot|$ satisfazendo alguma condição $(U_\alpha)$, sem entretanto serem valores absolutos.

**Definição 2.** Diz-se que $|\cdot|$ é *não-arquimediano* quando $(U_1)$ é satisfeita. Neste caso, $|\cdot|$ é um valor absoluto em $A$.

**Proposição 3.** *Suponhamos $|\cdot|$ um valor absoluto em $A$. Para que $|\cdot|$ seja não-arquimediano, é necessário e suficiente que o conjunto $\{|n|; n \in \mathbf{Z}\}$ seja limitado ($\mathbf{Z}$ considerado como um subconjunto de $A$ da maneira usual).*

**Demonstração.** Se $|\cdot|$ é não-arquimediano, segue por indução que $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Logo, $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbf{Z}$.

Reciprocamente, admitamos que exista $L > 0$ tal que $|n| \leq L$ para todo $n \in \mathbf{Z}$. Sejam $a, b \in A$ e $n \in \mathbf{N}^*$. Então

$$|a+b|^n = |(a+b)^n| = |\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{n} |\binom{n}{k}| |a|^k |b|^{n-k}$$

$$\leq L(\sum_{k=0}^{n} |a|^k |b|^{n-k}) \leq L(n+1)(\max\{|a|, |b|\})^n.$$

Portanto,

$$|a+b| \leq \sqrt[n]{L}\,\sqrt[n]{n+1}\max\{|a|, |b|\}.$$

Fazendo $n$ tender para $\infty$ vem

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\},$$

provando o desejado.

Passemos agora ao resultado principal.

**Teorema 4.** *Para que* $|\cdot|$ *seja um valor absoluto em* $A$, *é necessário e suficiente que* $(U_2)$ *seja válida.*

**Demonstração.** Como a condição é evidentemente necessária, provemos que ela é suficiente.

Mostremos, por indução, que se $n \in \mathbf{N}^*$ e $a_1, \dots, a_{2^n} \in A$, então

$$|a_1 + \cdots + a_{2^n}| \leq 2^n \max\{|a_1|, \dots, |a_{2^n}|\}.$$

Por hipótese, a desigualdade é válida para $n = 1$. Suponhamos o resultado verdadeiro para $n \in \mathbf{N}^*$, e sejam $a_1, \dots, a_{2^{n+1}} \in A$. Então

$$\begin{aligned}|a_1 + \cdots + a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}}| &\leq 2 \max\{|a_1 + \cdots + a_{2^n}|, |a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}}|\} \\ &\leq 2^{n+1} \max\{|a_1|, \dots, |a_{2^{n+1}}|\}.\end{aligned}$$

Sejam agora $a_1, \dots, a_m \in A$, e tomemos $n \in \mathbf{N}^*$ com $m \leq 2^n < 2m$. Então

$$\begin{aligned}|a_1 + \cdots + a_m| = |a_1 + \cdots + a_m + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{2^n - m \text{ vezes}}| &\leq 2^n \max\{|a_1|, \dots, |a_m|\} \\ &\leq (2m) \max\{|a_1|, \dots, |a_m|\},\end{aligned}$$

o que implica

$$|m| \leq 2m \quad (\text{fazendo } a_1 = \ldots = a_m = 1)$$

e

$$|a_1 + \cdots + a_m| \leq (2m)(|a_1| + \cdots + |a_m|).$$

Finalmente, sejam $a, b \in A$ e $m \in \mathbf{N}^*$. Então

$$\begin{aligned}|a+b|^m = |(a+b)^m| = |\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}| &\leq 2(m+1) \left( \sum_{k=0}^{m} |\binom{m}{k}| |a|^k |b|^{m-k} \right) \\ &\leq 4(m+1) \left( \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} |a|^k |b|^{m-k} \right) = 4(m+1)(|a| + |b|)^m.\end{aligned}$$

Logo,

$$|a + b| \leq \sqrt[m]{4}\, \sqrt[m]{m+1}\, (|a| + |b|).$$

Fazendo $m$ tender para $\infty$ obtemos

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

concluindo assim a demonstração.

**Definição 5.** Suponhamos que $|\cdot|$ satisfaça $(U_\gamma)$ para algum $\gamma$. Definamos

$$c = c_{|\cdot|} = \inf\{\beta; |\cdot| \text{ satisfaz } (V_\beta)\} \quad \text{e} \quad C = C_{|\cdot|} = \inf\{\alpha; |\cdot| \text{ satisfaz } (U_\alpha)\}.$$

**Proposição 6.** *Para $|\cdot|$ como na Definição 5, as condições $(V_c)$ e $(U_C)$ são satisfeitas. Além disso, $1 \leq c \leq C \leq 2c$.*

**Demonstração.** Claramente, $(V_c)$ e $(U_C)$ são satisfeitas. Daí decorre a segunda afirmação em vista da Proposição 1.

Tem-se a seguinte conseqüência do Teorema 4, já conhecida no caso dos corpos ([6], p. 56).

**Corolário 7.** *Para $|\cdot|$ como na Definição 5, $c = \max\{1, \frac{C}{2}\}$.*

**Demonstração.** Admitamos, primeiramente, $1 \leq C \leq 2$. Então $|\cdot|$ satisfaz $(U_2)$. Pelo Teorema 4, $c = 1 = \max\{1, \frac{C}{2}\}$.

Admitamos, agora, $C > 2$, e escrevamos $C = 2^h$ $(h > 1)$. Para quaisquer $a, b \in A$, $|a+b| \leq 2^h \max\{|a|, |b|\}$, e portanto $|a+b|^{\frac{1}{h}} \leq 2\max\{|a|^{\frac{1}{h}}, |b|^{\frac{1}{h}}\}$. Logo, a aplicação $a \in A \mapsto |a|^{\frac{1}{h}} \in \mathbf{R}_+$, que obviamente satisfaz (VA1) e (VA2), também satisfaz $(U_2)$. Pelo Teorema 4, $|a+b|^{\frac{1}{h}} \leq |a|^{\frac{1}{h}} + |b|^{\frac{1}{h}}$, ou seja, $|a+b| \leq (|a|^{\frac{1}{h}} + |b|^{\frac{1}{h}})^h$. Mas, como é fácil verificar,

$$(\star) \qquad (x+y)^h \leq 2^{h-1}(x^h + y^h) \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbf{R}_+,$$

o que fornece

$$(|a|^{\frac{1}{h}} + |b|^{\frac{1}{h}})^h \leq 2^{h-1}\left((|a|^{\frac{1}{h}})^h + (|b|^{\frac{1}{h}})^h\right) = 2^{h-1}(|a| + |b|).$$

Portanto, $|a+b| \leq 2^{h-1}(|a| + |b|)$ para quaisquer $a, b \in A$, e assim $c \leq 2^{h-1}$. Como $c \geq \frac{C}{2} = 2^{h-1}$, então $c = 2^{h-1} = \max\{1, \frac{C}{2}\}$, concluindo a demonstração.

**Observação 8.** (a) O Corolário 7 implica a parte relevante do Teorema 4. Com efeito, suponhamos que $|\cdot|$ satisfaça $(U_2)$. Então $C \leq 2$, e do Corolário 7 obtém-se $c = 1$, ou seja, $|\cdot|$ é um valor absoluto em $A$.
(b) Resulta da demonstração do Corolário 7 que se $|\cdot|$ satisfaz $(U_\alpha)$ para algum $\alpha$, então existe $\mu \geq 1$ tal que $|\cdot|^\mu$ é um valor absoluto em $A$.

Vejamos agora o exemplo prometido após a demonstração da Proposição 1.

**Exemplo 9.** Seja $|\cdot|$ o valor absoluto usual em $\mathbf{Z}$ e seja $\lambda > 1$. Definamos $|a|_\lambda = |a|^\lambda$ para $a \in \mathbf{Z}$. Obviamente, $|\cdot|_\lambda$ satisfaz (VA1) e (VA2). Além disso, por $(\star)$,

$$|a+b|_\lambda = |a+b|^\lambda \leq (|a| + |b|)^\lambda \leq 2^{\lambda-1}(|a|^\lambda + |b|^\lambda) = 2^{\lambda-1}(|a|_\lambda + |b|_\lambda)$$

para quaisquer $a, b \in \mathbf{Z}$; portanto, $|\cdot|_\lambda$ satisfaz $(V_{2^{\lambda-1}})$. Suponhamos que $|\cdot|_\lambda$ satisfaça $(V_\beta)$. Fazendo $a = b = 1$, vem $2^\lambda = |2|_\lambda \leq 2\beta$. Logo, $c = 2^{\lambda-1}$. Como $2^{\lambda-1} > 1$, $|\cdot|_\lambda$ não é um valor absoluto em $\mathbf{Z}$.

# Referências


[1] E. Artin, *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, New York University, 1951.

[2] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Hermann & Addison-Wesley, 1972.

[3] J. W. S. Cassels, *Local Fields*, Cambridge University Press, 1986.

[4] O. Endler, *Valuation Theory*, Springer-Verlag, 1972.

[5] I. Kaplansky, Topological methods in valuation theory, *Duke Math. J.* **14** (1947), 527–541.

[6] L. Nachbin, *Espaços Vetoriais Topológicos*, Notas de Matemática **4**, 1948.

[7] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1962.

[8] S. Warner, *Topological Fields*, Notas de Matemática 126, North-Holland, 1989.



Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
Rua Mário Santos Braga s/n$^o$, Niterói
24020-140, RJ, Brasil.