MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº29 – dezembro 2000 – pp. 115–123

Medidas maximizantes para o expoente de Liapunov

A. O. Lopes

Vamos descrever a seguir um trabalho que foi desenvolvido em conjunto com G. Contreras e P. Thieullen.

Nosso objetivo aqui é dar ao leitor uma breve descrição dos principais resultados do trabalho "Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle"que será publicado em breve no jornal "Ergodic Theory and Dynamical Systems". O presente trabalho no "Matemática Universitária"é dirigido a estudantes de graduação em matemática. A apresentação será portanto bastante informal e vamos tentar apenas dar a idéia geral da questão evitando entrar em maiores tecnicalidades. Quem estiver interessado em mais detalhes e em definições precisas poderá obtê-los no mencionado paper.

A questão de maximizar ou minimizar no problema a ser considerado é irrelevante (os resultados são os mesmos).

Este trabalho pode ser encarado como uma versão para aplicações da teoria de Aubry-Mather (que aborda Lagrangianos e considera assim tempo contínuo).

Um outro trabalho que analisa difeomorfismos de Anosov e fluxos geodésicos em superfícies de curvatura negativa (e que está intimamente relacionado com o presente artigo) será publicado em breve.

Como este número do Matemática Universitária é dedicado ao Prof. Jacob Palis, em seu aniversário de 60 anos, gostaria de expressar a profunda admiração que eu e todos os seus ex-alunos sentimos pelo nosso orientador.

O Prof. Jacob é um exemplo para a comunidade científica brasileira. Ao lado da sua grande competência como pesquisador, ele é também um grande incentivador do trabalho de seus colegas e, através do seu inquebrantável entusiasmo, uma fonte de inspiração para todos os matemáticos brasileiros.

Seja $T : M \to M$ uma tranformação agindo numa superfície M compacta de dimensão k. Na Teoria dos Sistemas Dinâmicos estamos interessados no entendimento das órbitas $\{x, T(x), T^2(x), ..., T^n(x), ...\}$, de pontos $x \in M$.

A análise de uma série de fenômenos da natureza envolvem entender a evolução temporal $T^n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, de tranformações T deste tipo.

Dizemos que x é um ponto periódico para T se existe n tal que $T^n(x) = x$. Neste caso, a órbita de x é um conjunto finito. Em geral existe um número infinito de tais pontos periódicos e eles podem muitas vezes estarem espalhados de maneira densa em M.

Vamos considerar aqui a mais simples das superfícies: o círculo S^1 (logo $k = 1$). Com o intuito de simplificar a notação, S^1 será representado pelo intervalo $(0, 1]$, no qual identificamos o ponto 0 com o ponto 1.

Deste modo $T(x) = 2\,x$ (mod 1) agindo em $M = [0, 1)$ (ou seja $M = S^1$) define um dos exemplos que estaremos interessados em analisar aqui. Tal T satisfaz $T(x) = 2\,x$, se $0 < x \leq 1/2$, e, $T(x) = 2\,x - 1$, se, $1/2 < x \leq 1$.

Note que para cada $x \in M$ existem dois pontos x_1 e x_2, tais que $T(x_1) = x = T(x_2)$. Dizemos que x_1 e x_2 são as pré-imagens de x e que T tem grau 2. Mais geralmente, dizemos que T tem grau k, se cada $x \in M$ tem k pré-imagens.

Dizemos que T é expansiva se existe $\beta > 1$, tal que $|T'(x)| > \beta$, para todo $x \in (0, 1]$.

É fácil ver que $T(x) = 2\,x$ (mod 1) é expansiva.

Vamos estar interessados aqui em tranformações expansivas T definidas no círculo S^1 e de grau k.

Para o leitor poder apreciar a complexidade que pode ocorrer na evolução dinâmica de um ponto x, observe que no exemplo acima se tomarmos dois pontos $x, y \in (0, 1]$, tais que $|x - y| = \epsilon$ (com ϵ bem pequeno), então após uma iteração, $T(x)$ e $T(y)$ distam da ordem de $2\,\epsilon$. Após n iterações $T^n(x)$ e $T^n(y)$ distam da ordem de $2^n \epsilon$.

Ou seja dois pontos próximos x e y tem uma tendência a rapidamente se distanciarem nas primeiras iterações (mais tarde poderão se aproximar de novo).

Sendo assim, dado x, ainda que saibamos algo sobre

$$x, T(x), T^2(x), ..., T^n(x),$$

não teremos uma boa informação sobre

$$y, T(y), T^2(y), ..., T^n(x)$$

(o ponto $T^n(x)$ poderá se encontrar muito distante de $T^n(y)$) mesmo que y esteja próximo de x.

Fixado x, para detectar a velocidade (em escala logaritmica) com que um ponto próximo qualquer y se distancia de x ao longo do tempo (ou seja, comparando as distâncias das iterações $T^n(y)$ e $T^n(x)$), definimos

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \log(T^n)'(x).$$

Neste caso, para x fixo, pela regra da cadeia e pelo Teorema do valor médio, obtemos que a distância entre $T^n(y)$ e $T^n(x)$ (ou seja $|T^n(x) - T^n(y)|$) é da ordem de $(e^{\lambda(x)})^n$.

Para aplicações expansivas este número $\lambda(x)$ é sempre positivo.

Quanto maior for o valor $\lambda(x)$ maior será a velocidade (na escala logaritmica) de afastamento de um y em torno de x com o crescimento de n.

Diferentes pontos x possuem diferentes velocidades logaritmicas λ (x).

Dizemos que existe sensibilidade em relação a condição inicial para T em torno de x se $\lambda(x) > 0$. Neste caso, uma pequena mudança y na condição inicial x pode acarretar numa mudança drástica de comportamento a longo prazo. Alguns fenômenos na natureza, como por exemplo a evolução do clima nas diversas regiões da terra, possuem a propriedade da sensibilidade em relação a condição inicial. Esta é uma das razões para o interesse teórico em analisar o expoente de Lyapunov de T.

Uma medida μ sobre $(0, 1]$ é uma lei que associa numeros reais não-negativos a subconjuntos $A \subset (0, 1]$ (existem restrições sobre a classe de conjuntos a ser considerado - que deve ser uma sigma-algebra - mas não desejamos aqui entrar em muitos detalhes técnicos). Referimos o leitor a [1] P. Fernandez, para maiores detalhes sobre Teoria da Medida.

Por exemplo, a medida de Lebesgue é caracterizada como aquela que para intervalos $A = (a, b) \subset (0, 1]$, temos $\mu(A) = \mu((a, b)) = b - a$.

Outra medida importante é a delta-Dirac em x_0 (fixado) que é definida para todo subconjunto A, por

a) $\mu(A) = 1$, se $x_0 \in A$,

e,

b) $\mu(A) = 0$, caso contrário.

Denotamos tal medida μ por δ_{x_0}, ou $\delta(x - x_0)$, como é algumas vezes usual. Esta medida é tal que toda a "massa"está concentrada em x_0.

Dizemos que uma medida μ é uma probabilidade se $\mu(M) = 1$.

O valor $\mu(A)$ indica a probabilidade de ocorrer A. Sendo assim se $\mu(A) > \mu(B)$, então é porque é mais provável ocorrer A do que B, isto é, se escolhermos um ponto x em $(0, 1]$ ao acaso (de acordo com μ), então é mais provável que ele esteja em A do que em B.

Em Probabilidade [2] ou em Teoria Ergódica [4] estamos interessados em afirmações que são verdadeiras com probabilidade 1.

Por exemplo, se jogarmos uma moeda honesta 100 vezes, mais ou menos em metade delas sairá cara e em metade sairá coroa. Esta é uma afirmação de natureza probabilística. Mesmo que seja possível sair 100 vezes cara, quando jogamos a moeda um número extremamente grande de vezes, com probabilidade 1 o número de caras e coroas obtidos deve ser aproximadamente igual. Este resultado é confirmado pela nossa experiência prática ao jogar uma moeda. Resultados desta natureza são rigorosamente tratados em Probabilidade e em Teoria Ergódica.

Outros exemplos de probabilidades são dados através de integrais de Stieljes: seja $g(x)$, onde $g : (0, 1] \to \mathbf{R}$ é uma função não-negativa tal que $\int g(x)dx = 1$. Definimos para um intervalo A o valor $\mu(A) = \int_A g(x)dx$. Fica definida assim uma probabilidade μ. Se $g(x)$ tem sempre valores maiores em A do que em B, então $\mu(A) = \int_A g(x)dx > \int_B g(x)dx = \mu(B)$. Deste modo, neste caso, g contém a informação de qual região de $(0, 1]$ tem mais probabilidade de ocorrer.

Probabilidades aparecem em diferentes situações na natureza: quando jogamos uma moeda ou um dado, no número de pessoas numa fila, no número de pessoas que consumem um produto, na altura de uma pessoa de uma certa região, etc...

Alguns fenômenos do mundo real têm natureza determinística, enquanto outros tem natureza aleatória. Neste último caso aparecem de maneira natural as probabilidades.

No mundo real, muitas vezes, aparecem de maneira natural probabilidades que descrevem o fenômeno aleatório. Por exemplo no caso da moeda aparece uma lei μ_1 no caso do dado outra μ_2. Em cada caso, dizemos que os eventos ocorrem ao acaso de acordo com a respectiva probabilidade μ.

Podemos analisar um sistema dinâmico de um ponto de vista determinístico ou aleatório.

Em Teoria Ergódica estamos interessados no ponto de vista aleatório, e portanto, em probabilidades invariantes para a tranformação T.

Definição: Dizemos que μ é T-invariante, se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo intervalo A.

É fácil ver que a probabilidade de Lebesgue definida acima é invariante para $T(x) = 2x \pmod 1$ (faça um desenho do gráfico de T).

Se x é um ponto periódico de período n para uma T qualquer, então é também fácil ver que

$$\mu = \frac{1}{n}\,\delta_x + \frac{1}{n}\,\delta_{T(x)} + \frac{1}{n}\,\delta_{T^2(x)} + \ldots + \frac{1}{n}\,\delta_{T^{n-1}(x)}$$

define uma probabilidade invariante para T.

No caso acima dizemos que μ tem suporte numa órbita periódica.

Estes dois exemplos acima são casos extremos: a primeira probabilidade se "esparrama"ao longo de todo o intervalo $(0,1]$ e a segunda, por outro lado, está "bastante concentrada"em torno da órbita do ponto periódico, ou seja ao longo do conjunto $\{x, T(x), T^2(x), ..., T^n(x)\}$.

O conceito de probabilidade T-invariante, denotada por μ, é bastante natural em Teoria Ergódica. Se quisermos falar sobre a probabilidade de algo ocorrer na evolução temporal de $T^n(x)$, é necessário haver alguma relação entre μ e T. Isto é dado pela relação, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo intervalo A.

Dizemos que um conjunto $B \subset X$ é denso em X, se todo ponto $x \in X$ pode ser aproximado por pontos $y \in B$. Mais precisamente, num espaço métrico X com métrica d, o subconjunto B é denso em X, se para qualquer $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ (ver [3]).

Podemos perguntar, por exemplo, qual a probabilidade $\mu(A)$ quando A é da forma

$$A = \{x \in (0,1] \,|\, T^n(x), n \in \mathbf{N}, \text{é um conjunto denso em } (0,1]\}.$$

O conjunto A em geral não é um intervalo e é necessário dar sentido a medida de conjuntos A mais complexos do que intervalos. Em Teoria da Medida é analisada a formalização matemática de tais conceitos.

Para algumas probabilidades μ o A acima definido satisfaz $\mu(A) = 1$ (neste caso com probabilidade 1 para todo x ocorre que $T^n(x), n \in \mathbf{N}$, é denso em (0,1]). Para outras μ podemos ter que $\mu(A) = 0$; isto depende, fundamentalmente, de μ.

Por exemplo para uma medida da forma

$$\mu = \frac{1}{n}\,\delta_x + \frac{1}{n}\,\delta_{T(x)} + \frac{1}{n}\,\delta_{T^2(x)} + ... + \frac{1}{n}\,\delta_{T^{n-1}(x)},$$

temos que para o A acima definido satisfaz $\mu(A) = 0$.

Pode-se mostrar que para a medida de Lebesgue μ e $T(x) = 2\,x$ (mod 1) temos que $\mu(A) = 1$ para tal A.

Se uma medida da forma

$$\mu = \frac{1}{n}\,\delta_x + \frac{1}{n}\,\delta_{T(x)} + \frac{1}{n}\,\delta_{T^2(x)} + ... + \frac{1}{n}\,\delta_{T^{n-1}(x)},$$

descreve o que se observa num certo fenômeno da natureza, temos que na verdade o fenômeno observado não é "aleatório", mas sim que ele ocorre de maneira "determinística" (observa-se de fato $\{x, T(x), .., T^n(x)\}$). Poderíamos dizer de uma maneira informal que a delta-Dirac é a maneira natural de se tratar com o determinismo dentro da Probabilidade.

As medidas ou probabilidades existem para se integrar funções $f(x)$, onde $f : M \to \mathbf{R}$, obtendo assim $\int f(x)d\mu(x)$.

No caso em que μ é a probabilidade de Lebesgue obtemos a nossa velha conhecida $\int f(x)dx$ (isto é, $d\mu(x) = dx$).

No caso em que μ é a delta-Dirac em x_0, pode-se mostrar que para uma função contínua $f(x)$ qualquer, temos que $\int f(x)d\,\delta(x - x_0) = \int f(x)d\,\delta_{x_0}(x) = f(x_0)$. Isto é bastante razoável uma vez que toda informação desta medida está concentrada em x_0.

Se μ for dada por uma integral de Stieltjes ($\mu(A) = \int_A g(x)dx$), então $\int f(x)d\mu(x) = \int f(x)g(x)dx$.

Dada uma função $f : M \to \mathbf{R}$ dizemos que $\int f(x)d\mu(x)$ é o valor médio de f.

Dada uma probabilidade T-invariante μ, definimos o expoente de Liapunov da medida μ como

$$\int \lambda(x)d\mu(x) = \lambda(\mu).$$

Este valor $\lambda(\mu)$ descreve o valor médio do expoente de Liapunov $\lambda(x)$ dos pontos $x \in (0,1]$ com relação a probabilidade μ.

Dado duas medidas μ e ν, se $\lambda(\mu) > \lambda(\nu)$, é porque na média temos mais tendencia a afastamento rápido dos pontos escolhidos de acordo com μ do que escolhidos de acordo com ν.

Em Teoria Ergódica tem papel de destaque as medidas ergódicas. Não vamos dar aqui a definição formal deste conceito (ver [4] R. Mane, para definições), mas apenas afirmar que se μ é uma medida ergódica, então existe A tal que $\mu(A) = 1$, e que o valor $\lambda(x)$ é igual a $\lambda(\mu)$ para todo $x \in A$.

Em outras palavras, com μ-probabilidade 1, temos que $\lambda(x)$ é constante e igual a média $\lambda(\mu)$.

Podemos perguntar: para uma T fixada, qual medida μ é aquela que possue a maior tendência de afastamento médio $\lambda(\mu)$?

Definição: Para T fixada, $T : S^1 \to S^1$, denotamos por $\mathcal{M}(T)$ o conjunto de todas as probabilidades T-invariantes.

Definição: Dada uma transformação $T : S^1 \to S^1$ de grau k, dizemos que μ é a probabilidade de máximo expoente de Lyapunov se

$$\int \lambda(x) d\mu(x) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(T)} \int \lambda(x) d\nu(x).$$

Note, por exemplo, que para $T(x) = 2x \pmod 1$, toda a medida invariante $\nu \in \mathcal{M}(T)$ é tal que $\lambda(\nu) = \log 2$. Isto se deve ao fato que $T'(x) = 2$ para qualquer $x \in (0,1]$. Neste caso o supremo é atingido por qualquer probabilidade $\nu \in \mathcal{M}(T)$. Esta tranformação T é na verdade muito particular, e poderia se imaginar que para a "maioria"das tranformações T expansivas, temos que $T'(x)$ não é constante.

É natural perguntar se é verdade que para a "maioria"das transformações expansivas T vale que existe apenas uma medida μ de máximo expoente de Lyapunov em $\mathcal{M}(T)$, e se tal μ é ergódica?

Antes de mais nada é necessário dar sentido a afirmação "para a maioria das tranformações expansivas T".

Dado um espaço métrico X com uma distância d (ver [2] E. Lima, para definições) dizemos que uma propriedade é valida para a "maioria"dos pontos $x \in X$, se existe $B \subset X$ aberto e denso, tal que a propriedade vale para todo $x \in B$.

Vamos considerar a seguir o espaço X das tranformações T de S^1 em S^1 e colocar uma distância $d(T_1, T_2)$ entre funções expansivas. O nosso resultado principal vai afirmar que para a "maioria"das T, a medida de máximo expoente de Lyapunov para T é única e está concentrada em uma órbita periódica, ou seja é da forma

$$\mu = \frac{1}{n}\,\delta_x + \frac{1}{n}\,\delta_{T(x)} + \frac{1}{n}\,\delta_{T^2(x)} + ... + \frac{1}{n}\,\delta_{T^{n-1}(x)},$$

para um certo n e um certo ponto x periódico. Esta medida μ é trivialmente ergódica.

Dizemos que uma função $A(x)$ definida de S^1 em $\mathbf{R}$ é α-Holder, se é finito

$$\sup_{0<|x-y|<\frac{1}{2}} \{\frac{|A(x) - A(y)|}{|x-y|^\alpha}\}.$$

Dizemos que uma função expansiva $T(x)$ de grau k definida de S^1 em S^1 é de classe $C^{1+\alpha}$, se $T'(x)$ é α-Holder.

Vamos considerar o espaço $\mathcal{F}_\alpha$ das transformações expansivas $T : S^1 \to S^1$, de classe $C^{1+\alpha}$ (onde $\alpha < 1$) e que tem grau k.

Denotamos $\text{Höl}_\alpha(A)$ para $A : S^1 \to \mathbb{R}$ o valor:

$$\text{Höl}_\alpha(A) = \sup_{0<|x-y|<\frac{1}{2}} \{\frac{|A(x) - A(y)|}{|x-y|^\alpha}\}$$

Ainda, denotamos $||A||_0 = \sup_{x\in(0,1]} |A(x)|$ para a norma uniforme de A. $||A||_\alpha$, por sua vez, vai denotar a norma α-Hölder dada por A:

$$||A||_\alpha = \text{Höl}_\alpha(A) + ||A||_0.$$

A distância d que usaremos é dada por

$$d(T_1, T_2) = \sup_{x\in(0,1]} \{||T_1 - T_2||_0, ||T_1' - T_2'||_\alpha\}$$

Se $d(T_1, T_2)$ é pequeno então é porque para todo x vale que $T_1(x)$ e $T_2(x)$ estão próximos e ainda $T_1'(x)$ e $T_2'(x)$ estão próximos.

Para α fixo, denotamos por $X = \mathcal{F}_{\alpha+}$ o conjunto $\cup_{\beta>\alpha}\mathcal{F}_\beta$ com a distancia d definida acima.

Nosso resultado principal é:

Teorema: Seja $\alpha < 1$ fixo. O conjunto B das transformações T em $\mathcal{F}_{\alpha+} = X$ que possuem apenas uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(T)$ maximizando o expoente de Lyapunov e tal que μ tem suporte numa órbita periódica é aberto e denso em $\mathcal{F}_{\alpha+}$.

O Teorema acima afirma que para a maioria das transformações expansivas T a medida que maximiza o exponte de Liapunov está concentrada numa órbita periódica. A demonstração deste resultado usa de maneira fundamental uma equação de sub-cohomologia (discretizada no tempo) que é análoga a equação de Hamilton-Jacobi da Mecânica Clássica.

Bibliografia

[1] P, Fernandez, Medida e Integração, Projeto Euclides, IMPA, 1981
[2] B. James, Probabilidade: um Curso em Nível Intermediário, 1987
[3] E. Lima, Espaços Métricos, , Projeto Euclides, IMPA, 1980
[4] R. Mane, Teoria Ergódica, Projeto Euclides, IMPA, 1982

Instituto de Matemática
UFRGS
Porto Alegre 91501-970, RS, Brasil.