MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº30 – junho 2001 – pp. 103–111

Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers

Geraldo Botelho

De todas as partes da análise, as mais elaboradas, as mais puras, por assim dizer, serão as mais fecundas nas mãos daqueles que delas sabem servir-se.
Henri Poincaré

Em relação a uma série infinita de números reais, interessa saber se a soma é finita (indicaremos uma série convergente de números não negativos pela notação $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$), se a soma em módulo é finita (a série é dita *absolutamente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$) e se a ordem das parcelas não altera a soma (a série é dita *incondicionalmente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge, qualquer que seja a permutação σ dos índices). É fato bem conhecido dos alunos de graduação que toda série absolutamente convergente é também convergente. A demonstração normalmente é feita através de uma aplicação simples do critério de Cauchy para séries. Em seguida, os estudantes são informados de que a recíproca não é verdadeira, e então saca-se a série harmônica alternada, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$, como exemplo de série convergente que não é absolutamente convergente. Tais séries são chamadas de *condicionalmente convergentes.*

Quanto à convergência incondicional, de um resultado de Dirichlet [6, p.48] sabemos que uma série de números reais é incondicionalmente convergente se e somente se é absolutamente convergente. Resta analisar o comportamento das séries condicionalmente convergentes. Nesse ponto aparece um fato que é espantoso à primeira vista: uma série condicionalmente convergente pode ser reordenada de forma a convergir para qualquer número real previamente escolhido. Este resultado é devido a Riemann [16] e Dini [5] e sua demonstração pode ser encontrada em, por exemplo, [1, Teorema 3.29] ou [14, Teorema IV.23]. Assim existem apenas duas possibilidades, diametralmente opostas, para uma série convergente: ou ela se comporta como as somas finitas, no sentido de que a ordem das parcelas não altera a soma; ou então a ordem das parcelas altera a soma de forma radical, no sentido de que a soma pode ser qualquer número, bastando para isso uma escolha adequada da ordem das parcelas. Tudo isso pode ser resumido na seguinte dicotomia (por simplicidade, escreveremos a partir de agora $\sum_n a_n$ ao invés de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Teorema. Seja $\sum_n a_n$ uma série convergente de números reais. Então uma (e, obviamente, apenas uma) das condições abaixo ocorre:
(a) Para toda permutação σ de $\mathbb{N}$, $\sum_n a_{\sigma(n)}$ converge e a soma resulta $\sum_n a_n$. Mais ainda, essa alternativa ocorre se e somente se a série é absolutamente convergente.
(b) Existem permutações σ de $\mathbb{N}$ para as quais $\sum_n a_{\sigma(n)}$ é divergente. Nesse caso, para cada $a \in \mathbb{R}$ existe uma permutação σ de $\mathbb{N}$ tal que $a = \sum_n a_{\sigma(n)}$. Existem ainda permutações que levam a série a divergir para $+\infty$ e para $-\infty$.

De qualquer forma, a questão está plenamente resolvida há mais de cento e trinta anos. Com o advento da Análise Funcional nas primeiras décadas do século 20, a discussão acima foi retomada no contexto de séries formadas por elementos de um espaço normado. Pretendo nesse texto mostrar as semelhanças e as diferenças que o caso escalar guarda com os espaços de dimensão infinita.

Definição. Um *espaço normado* é um espaço vetorial E munido de uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, chamada *norma*, tal que
- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$,
- $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$ e todo escalar t,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$.

Um *espaço de Banach* é um espaço normado que com a métrica

$d(x,y) = \|x-y\|$ se torna um espaço métrico completo. Dizemos que a série $\sum_n x_n$, com $x_n \in E$ para todo n, é *convergente* se existe $x \in E$ tal que $\|\sum_{j=1}^n x_j - x\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Nesse caso dizemos que x é a *soma* da série e escrevemos $\sum_n x_n = x$. Assim como na reta, dizemos que a série é *absolutamente convergente* se $\sum_n \|x_n\| < +\infty$ e *incondicionalmente convergente* se $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge, qualquer que seja a permutação σ dos índices.

Exemplos.
1. É claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach, de dimensão n, com a norma euclidiana usual. Além disso, qualquer espaço normado de dimensão finita E é isomorfo a $\mathbb{R}^{dim(E)}$.

2. Chame de c_0 o espaço das sequências de números reais (ou complexos) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ que convergem para 0. Então a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\},$$

torna c_o um espaço de Banach de dimensão infinita.

3. Para $1 \leq p < +\infty$, chame de ℓ_p o espaço das sequências de números reais (ou complexos) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_n |a_n|^p < +\infty$. Com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p},$$

ℓ_p torna-se um espaço de Banach de dimensão infinita. Não é difícil verificar que se $1 \leq p < q < +\infty$ então ℓ_p está contido propriamente em ℓ_q. Por exemplo, é bem conhecido que a sequência $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ pertence a ℓ_2 mas não pertence a ℓ_1 (precisaremos disso mais tarde). Novamente por simplicidade passaremos a escrever (a_n) ao invés de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Graças à convergência coordenada a coordenada, a equivalência entre as convergências absoluta e incondicional (alternativa (a) do Teorema acima) se mantém para séries convergentes em espaços de dimensão finita. Eventuais novidades devem então ser procuradas apenas em espaços de dimensão infinita.

As séries incondicionalmente convergentes em espaços de Banach foram exaustivamente estudadas, e em [4, Theorem 1.9] o leitor pode encontrar doze propriedades que são equivalentes à convergência incondicional. Enfatizarei aqui a relação entre as convergências absoluta e incondicional, conceitos que, como vimos, são equivalentes em dimensão finita. Uma das implicações continua verdadeira em dimensão infinita, e podemos perceber pela proposição abaixo que, para que a convergência absoluta implique em convergência incondicional o importante é ser completo, e não a dimensão ser finita. Quem observou isso pela primeira vez foi o próprio Banach em sua tese [2].

Proposição. Um espaço normado E é um espaço de Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.

Demonstração. Suponha que E é um espaço de Banach e que $\sum_n x_n$ é uma série absolutamente convergente em E. Dada uma permutação σ de $\mathbb{N}$, como $\sum_n \|x_n\| < +\infty$, do resultado de Dirichlet citado acima sabemos que $\sum_n \|x_{\sigma(n)}\| < +\infty$. Da desigualdade

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} \Big\| = \Big\| \sum_{j=m+1}^{n} x_{\sigma(j)} \Big\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_{\sigma(j)}\|$$

segue que a sequência das somas parciais $(\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)})$ é de Cauchy em E, e portanto convergente. Assim $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge em E, provando que $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente.

Para a recíproca, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E. Podemos então escolher uma sequência (n_k) em $\mathbb{N}$ de forma que chamando $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ tem-se $\|y_k\| \leq 1/2^k$. Logo $\sum_k \|y_k\| < +\infty$, e por hipótese segue que $\sum_k y_k$ é (incondicionalmente) convergente em E. Fazendo $k \to \infty$ na igualdade $x_{n_1} + y_1 + \cdots + y_k = x_{n_{k+1}}$ segue que (x_{n_k}) é convergente. Logo (x_n) é de Cauchy e tem uma subsequência convergente. Segue então que (x_n) é convergente, o que prova que E é um espaço de Banach. $\square$

Nunca houve dúvida quanto à não validade da recíproca, pois logo se percebeu que não é difícil exibir exemplos de espaços de Banach (de dimensão infinita, é claro) que abrigam séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes.

Exemplos.

1. $E = c_0$. Sejam (e_n) os vetores canônicos dos espaços de sequências, isto é: $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, onde 1 aparece na n-ésima coordenada. Chame $x_n = e_n/n$ e analisemos a série $\sum_n x_n$ em c_0. Tomando $x = (1/n) \in c_0$, é fácil ver que $\sum_n x_n = x$, pois

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \Big\| = \|(1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots) - x\| =$$

$$= \Big\|(0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\Big\| = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Com um pouquinho mais de trabalho mostraremos que $\sum_n x_n$ converge incondicionalmente para x. Para ver isso, seja σ uma permutação de $\mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome um inteiro positivo $N > 1/\varepsilon$. É claro que para cada $j = 1, \ldots, N$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(n_j) = j$. Chame agora $n_0 = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_N\}$. Então para $n \geq n_0$ o vetor $\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$ certamente tem suas primeiras N coordenadas iguais às de x. Portanto

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x \Big\| \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Isso prova que $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge, e portanto $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente. Como $\|x_n\| = 1/n$ para todo n, então $\sum_n x_n$ não é absolutamente convergente.

2. $E = \ell_2$. De forma análoga ao exemplo acima, verifica-se que a mesma série $\sum_n e_n/n$ converge incondicionalmente mas não absolutamente em ℓ_2. Na verdade, para qualquer sequência (a_n) que está em ℓ_2 mas não em ℓ_1, a série $\sum_n a_n e_n$ converge incondicionalmente mas não absolutamente em ℓ_2.

A partir desses exemplos, passou-se a questionar a existência, em *qualquer* espaço de Banach de dimensão infinita, de uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente. O que se desejava realmente saber era se o fato da convergência incondicional implicar na convergência absoluta é uma propriedade exclusiva da dimensão finita. Essa questão se mostrou bem mais difícil tanto que foi abordada por Banach em [3, p.240] e se tornou um dos problemas do célebre Scottish Book. Mesmo o caso de ℓ_1, aparentemente simples, teve que esperar até 1947 para ser resolvido por Macphail [15]. Finalmente, em 1950, Dvoretzky e Rogers [7] provaram que o exemplo que exibimos para ℓ_2 pode ser adaptado para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita.

Teorema de Dvoretzky-Rogers. Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Para toda sequência $(a_n) \in \ell_2$ existe uma sequência (x_n) em E tal que $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente e $\|x_n\| = |a_n|$ para todo n. Assim, escolhendo (a_n) em ℓ_2 mas não em ℓ_1, a série correspondente em E é incondicionalmente convergente mas não é absolutamente convergente.

Esboço da demonstração. A apresentação dos detalhes técnicos está além dos objetivos desta revista. Ofereço então um esboço mostrando os passos que devem ser seguidos. Na verdade, convido o leitor para um exercício do tipo 'deve ter sido assim que esses caras pensaram nisso pela primeira vez'. O ponto fundamental da demonstração repousa no seguinte resultado que, surpreendentemente, trata de espaços de dimensão finita (mas, note bem, vale para dimensões finitas arbitrariamente grandes): em todo espaço de Banach de dimensão $2n$ podemos escolher vetores $x_1, \ldots, x_n$ tais que $1/2 \leq \|x_j\| \leq 1, j = 1, \ldots, n$, e de forma que para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n$ vale que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \Big\| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Dada $(a_n) \in \ell_2$, escolha uma sequência (n_k) em $\mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_k}^{\infty} |a_n|^2 \leq 2^{-2k}$. Como E tem dimensão infinita, podemos escolher uma sequência (y_n) em E tal que $1/2 \leq \|y_j\| \leq 1$ para todo j, satisfazendo

$$\Big\| \sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n \Big\| \leq \Big(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2 \Big)^{1/2},$$

qualquer que seja a sequência de escalares (α_n) e $n_k \leq N \leq n_{k+1}$. Chame agora $x_j = a_j y_j / \|y_j\|$. Claramente $\|x_j\| = |a_j|$ para todo j. Para provar a convergência incondicional usaremos a seguinte caracterização: $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente se e somente se $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge qualquer que seja a escolha de sinais $\varepsilon_n = \pm 1$. Seja então uma escolha de sinais $\varepsilon_n = \pm 1$. Se $n_k \leq N \leq n_{k+1}$ então tomando

$\alpha_n = \varepsilon_n a_n / \|y_n\|$ temos que

$$\Big\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\| \le \Big(\sum_{n=n_k}^{N} \frac{|a_n|^2}{\|y_n\|^2} \Big)^{1/2} \le 2 \cdot \Big(\sum_{n=n_k}^{N} |a_n|^2 \Big)^{1/2} \le 2^{-k+1},$$

o que mostra que a sequência das somas parciais $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j$ é de Cauchy em E, e portanto $\sum_n \varepsilon_n x_n$ é convergente. Com isso está provado que $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente. □

Observações finais.

• O Teorema de Dvoretzky-Rogers desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da Teoria dos Espaços de Banach, tendo influenciado, por exemplo, os trabalhos revolucionários de Grothendieck na década de 50 que, por sua vez, inspiraram Pietsch a introduzir, uma década mais tarde, a hoje clássica Teoria de Ideais de Operadores.

• Quanto ao comportamento das séries condicionalmente convergentes em dimensões maiores que 1, o estado da arte é o seguinte: no caso complexo, Lévy [13] provou em 1905 que dada uma série convergente de números complexos, o conjunto das somas de todas as suas reordenações convergentes é formado por apenas um ponto ou é uma reta em $\mathbb{C}$ ou então é todo o plano complexo. Steinitz [17] generalizou esse resultado e fechou a questão no caso de dimensão finita em 1913: dada uma série convergente em $\mathbb{R}^n$, o conjunto das somas de todas as suas reordenações convergentes é uma variedade afim, isto é, o transladado de um subespaço vetorial. Em dimensão infinita a situação certamente se complica e algumas questões permanecem abertas - veja [10]. Se mesmo a reta apresenta surpresas, a dimensão infinita também não decepciona: a partir de exemplos descobertos por Marcinkiewicz, Kornilov e Nikishin, V. M. Kadets [9] mostrou que em todo espaço de Banach de dimensão infinita pode ser encontrada uma série convergente cujo conjunto das somas de todas as suas reordenações convergentes não é convexo. Mais surpreendente ainda é o seguinte resultado descoberto por Enflo (não publicado), Kornilov [11, 12] e M. I. Kadets e K. Wozniakowski [8]: todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma série convergente cujo conjunto das somas de todas as suas reordenações convergentes é formado por (exatamente) dois pontos!

Referências

[1] G. Ávila, *Introdução à Análise Matemática*, 2a. Ed., Ed. Edgard Blücher (1999).

[2] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensenbles abstraits et leurs applicatins aux équations integráles*, Fundamenta Math., **3** (1922) 131-181.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, PWN (1932).

[4] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **43** (1995).

[5] U. Dini, *Sui prodotti infiniti*, Annali di Matem. **2** (1868) 28-38.

[6] J.P.G.L. Dirichlet, *Mathematische Werke, Band I.* reprinted Chelsea Publ. Comp. (1969). Publicação original de 1837.

[7] A. Dvoretzky e C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950) 193-197.

[8] M.I. Kadets e K. Wozniakowski, *On series whose permutations have only two sums*, Boll. Polon. Acad. Sci. **37** (1989) 15-21.

[9] V.M. Kadets, *On a problem of Banach, 'Problem 106 in the Scottish Book'*, Funktsional Anal. i Prilozhen **20** (1986) 74-75. Traduzido para o inglês em Funct. Anal. Appl. **20** (1986) 317-319.

[10] M.I. Kadets e V.M. Kadets, *Series in Banach spaces: conditional and unconditional convergente*, Operator Theory: Advances and Applications 94, Basel: Birkhauser (1997).

[11] P.A. Kornilov, *Structure of the sums set of a functional series*, Vestnik Mosk. Univ. Ser. I (1988) no.4, 9-13. Traduzido para o inglês em Mosc. Univ. Math. Bull. **43**, no.4, (1988) 6-11.

[12] P.A. Kornilov, *On the set of sums of a conditionally convergent series of functions*, Mat. Sbornik **137** (1988) 114-127. Traduzido para o inglês em Math. USSR Sb. **65** (1990) 119-131.

[13] P. Lévy, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouv. Ann. de Math. **64** (1905) 506-511.

[14] E.L. Lima, *Curso de Análise Vol. 1*, 3a. Ed., Projeto Euclides, IMPA-CNPq (1982).

[15] M.S. Macphail, *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 121-123.

[16] B. Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift Universität Göttingen (1854) (Dover Publ. 1953).

[17] E. Steinitz, *Bedingt konvergence reihen und konvexe Systeme*, Journ. Reine Angew. Math. **143** (1913) 128-175.

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
e-mail: botelho@ufu.br