MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº30 – junho 2001 – pp. 113–114

Convexidade e Diferenciabilidade

Márcio José Horta Dantas

É bem conhecido que se uma função de n variáveis reais tem derivadas parciais então isto não implica que, em geral, esta função seja diferenciável. O objetivo desta nota é mostrar que, se uma função f é convexa e tem derivadas parciais então f é diferenciável. Na verdade tal função é C^1. Em nossa opinião este é um resultado interessante para alunos de graduação.

Teorema 0.1 : Seja U um conjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$. Considere $f : U \to \mathbb{R}$ convexa tal que em cada ponto de U as derivadas parciais $\partial f/\partial x_i$ $i = 1, \ldots, n$ existem. Então f é C^1.

Prova: Desde que f é convexa, temos $f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ para todo x, y em U e $0 \leq t \leq 1$. Seja K um subconjunto compacto de U. Então existe $\delta > 0$ tal que $x + se_i \in U$ para todo $x \in K, |s| < \delta$ e $i = 1, \ldots, n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Tomando $y = x + se_i$ obtemos

$$\frac{f(x + tse_i) - f(x)}{t} \leq f(x + se_i) - f(x).$$

□

Fazendo $t \to 0^+$ nesta desigualdade temos que $\nabla f(x) \cdot (se_i) \leq f(x + se_i) - f(x)$. Como esta desigualdade também é válida para $-s$, $s > 0$, segue que $\nabla f(x) \cdot (-se_i) \leq f(x - se_i) - f(x)$. Destas duas últimas desigualdades temos que se $s \in (0, \delta)$ então para todo $x \in K$ e $i = 1, \ldots, n$ obtemos

$$\frac{f(x) - f(x - se_i)}{s} \leq \nabla f(x) \cdot e_i \leq \frac{f(x + se_i) - f(x)}{s}. \qquad (1)$$

Se f não é C^1 então existe $p \in U$, $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{p_n\}$, $p_n \in U$ tal que $p_n \to p$ e

$$|\nabla f(p_n) - \nabla f(p)| > \epsilon, \ \forall n. \tag{2}$$

Seja $K = \{p, p_1, p_2, \dots\}$. Se x é substituído por p_n em (1), fazendo $s = \delta/2$ e usando o fato de que f é contínua, veja Corollary 2.3, pg.12 de [1], temos que a sequência $\{\nabla f(p_n) \cdot e_i\}$ é limitada para cada $i = 1, \dots, n$. Portanto, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que existe $g \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{n \to \infty} \nabla f(p_n) = g$. Substituindo x em (1) por p_n e fazendo $n \to \infty$ em (1) obtemos

$$\frac{f(p) - f(p - se_i)}{s} \leq g \cdot e_i \leq \frac{f(p + se_i) - f(p)}{s} \quad ,$$

$$0 < s < \delta \text{ e } i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Obtemos $g = \nabla f(p)$ fazendo $s \to 0^+$ em (3). Por outro lado, de (2) segue que $|g - \nabla f(p)| \geq \epsilon$, o que é uma contradição. Portanto ∇f é contínua em U. □

Referências

[1] I.Ekeland and R.Teman *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdan, (1976).

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia,
38408-100 Uberlândia,M.G.,
E-mail: marcio@ufu.br