

Triângulos em Arranjos de Retas no Plano Euclidiano

Guilherme A. Pinto

1 Introdução

Problemas geométricos aparecem muito frequentemente como exercícios em textos introdutórios sobre indução matemática. Geralmente, o objetivo principal é exercitar a demonstração por indução em si, e não desafiar a intuição geométrica sobre o problema em questão. Há um livro, porém, bastante tradicional em cursos de análise assintótica de algoritmos computacionais, que traz, sem nenhuma indicação sobre a sua dificuldade relativa, um exercício que resiste à abordagem indutiva mais comum e que, conseqüentemente, tem atormentado gerações de alunos, ano após ano. O exercício 2.17 do livro do Manber [3] pede: *Considere $n \geq 3$ retas, em posição geral, no plano Euclidiano. Prove que estas retas formam, pelo menos, $n - 2$ triângulos.* Este problema de aparência inocente tem uma história bem interessante. Em 1889, Roberts [4] enunciou a sentença como teorema mas apresentou uma prova indutiva incorreta. Oitenta e três anos depois, essencialmente a mesma sentença apareceu ainda como uma conjectura numa monografia de Grünbaum [2]. Segundo Felsner [1], a primeira solução veio somente em 1979 em [5], onde Shannon prova, por meio de dualidade geométrica, a sentença análoga para dimensões arbitrárias: *Todo arranjo de n hiperplanos em \mathbb{E}^d contém, pelo menos, $n - d$ faces simpliciais de dimensão d .*

Este artigo apresenta, na Seção 2, três contra-exemplos, e uma pequena discussão, sobre a abordagem indutiva mais comum, poupando algum trabalho, assim, a quem se dispuser a fazer o exercício. Na Seção 3,

ele apresenta uma interessante versão simplificada da demonstração dada em [1]. Naquele artigo, Felsner estuda o caso geral de arranjos de *pseudoretas* no plano Euclidiano. Essa demonstração, entretanto, assim como a de [5], não é indutiva. Aos alunos, portanto, um aviso: contínuem tentando uma demonstração indutiva.

2 Contra-exemplos

Um arranjo S de n retas no plano Euclidiano está em posição geral, se não há duas retas paralelas, nem três retas que se interceptam num mesmo ponto. Daqui para frente, todos os arranjos de que trata o artigo estão, por hipótese, em posição geral. O arranjo S induz uma *partição* do plano Euclidiano em *faces*, *arestas* e *vértices*¹. As faces e arestas podem ser *limitadas* ou *ilimitadas*². O exercício 2.17 em [3] pede que se demonstre, indutivamente, que pelo menos $n - 2$ das faces limitadas são triângulos.

A abordagem indutiva mais comum—e, em essência, a que foi tentada em [4]—funciona assim. Todo arranjo de 3 retas forma 1 triângulo. Tomando isso como base da indução, e assumindo por hipótese que todo arranjo de $n - 1$ retas forma pelo menos $n - 3$ triângulos, o passo seria: tome um arranjo qualquer S de n retas, retire uma reta l *qualquer* obtendo o arranjo S' , aplique a hipótese de indução em S' e mostre que a recolocação da reta l “cria” um novo triângulo. A reta l *cria* um novo triângulo se ela forma um triângulo, cortando uma face de S' que não é um triângulo. Quando l corta um triângulo, ela forma, necessariamente, outro triângulo e um quadrilátero, de maneira que o número de triângulos não se altera.

Essa abordagem é, quase sempre, a primeira na qual alguém insiste porque parece mesmo que não existe um arranjo no qual existe uma reta que *não* cria um triângulo ao ser recolocada. A Figura 1, entretanto, mostra um contra-exemplo, com 6 retas, para esse passo de indução.

¹Para não restar dúvida, uma face é um conjunto de pontos conexo, que não intercepta nenhuma das retas de S , e maximal. Uma aresta é um conjunto de pontos conexo, contido em uma reta e que não intercepta nenhuma outra reta, e maximal. Um vértice é um conjunto de pontos conexo, contido em mais de uma reta, e maximal.

²Uma face é limitada se existe uma bola aberta de raio finito que a contém. O mesmo vale para arestas.

Na Figura 1, a reta ℓ não cria um triângulo ao ser recolocada no arranjo, mas todas as outras retas criam. As duas próximas seções apresentam variações dessa abordagem onde, no passo de indução, tenta-se retirar, não uma reta qualquer, mas uma que satisfaça uma dada propriedade que garante que ela cria um triângulo ao ser recolocada.

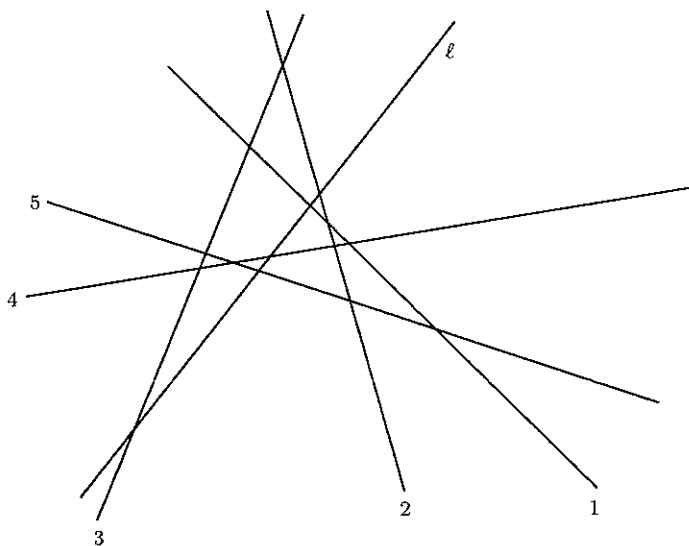


Figura 1: Um contra-exemplo para a abordagem mais comum

2.1 Retas externas

Se uma aresta e , adjacente a uma face ilimitada, é também adjacente a um triângulo t , então, a reta suporte de e cria t ao ser recolocada. Denota-se uma reta com esta propriedade de reta *externa*. Na Figura 1, as retas 1, 2 e 3 são externas, e as outras não. Se todo arranjo contivesse ao menos uma reta externa, bastaria tomar a reta ℓ , do passo de indução, como sendo uma das retas externas. A Figura 2 mostra um contra-exemplo onde não há retas externas.

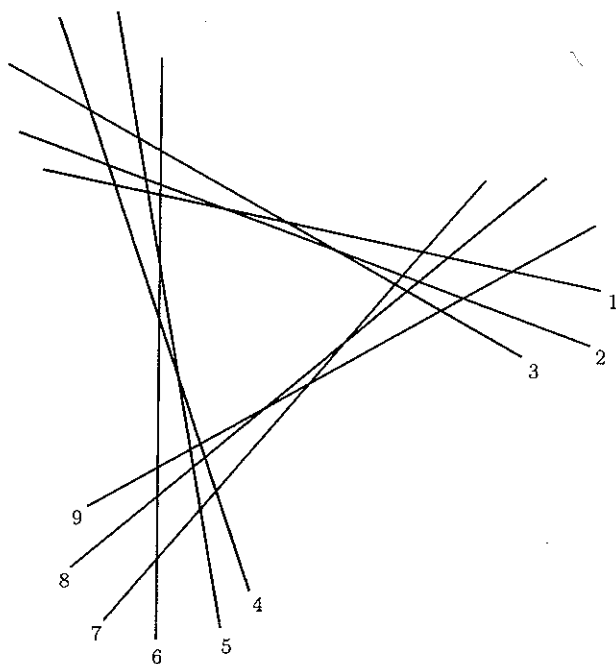


Figura 2: Um contra-exemplo para retas externas

2.2 Borboletas

Um vértice de um arranjo \mathcal{S} pode ser adjacente a dois triângulos. Neste caso, os triângulos formam uma *borboleta* e as duas retas que se interceptam no vértice comum aos dois triângulos são as retas suporte da borboleta. Na Figura 1 há uma borboleta com suporte nas retas 1 e 2, e outra com suporte em 4 e 5.

Como o arranjo \mathcal{S} está em posição geral, uma aresta não pode ser adjacente a dois triângulos. Essa propriedade pode ser usada para mostrar facilmente que ambas as retas suporte de uma borboleta criam um triângulo ao serem recolocadas. Se todo arranjo contivesse ao menos uma borboleta, bastaria tomar a reta ℓ , do passo de indução, como sendo uma das retas suporte de uma das borboletas. A Figura 3 mostra um contra-exemplo onde não há borboletas.

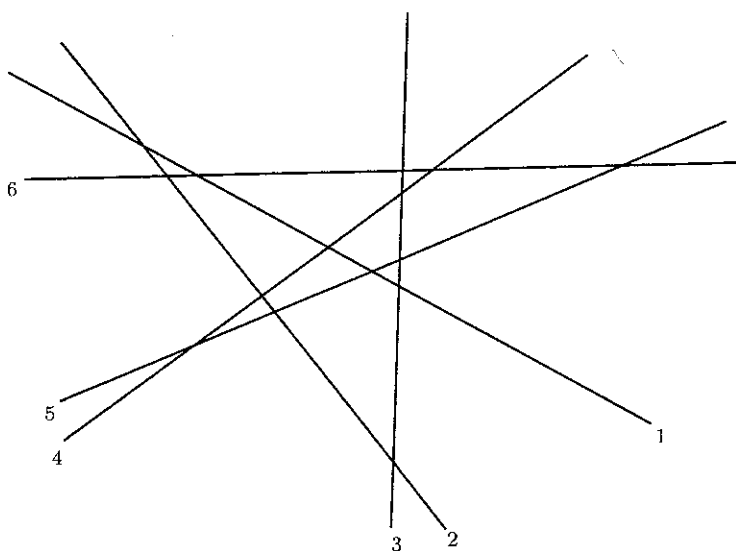


Figura 3: Um contra-exemplo para borboletas

2.3 Discussão

É interessante observar que os três contra-exemplos apresentados acima são mutuamente excludentes, no sentido de que nenhum serve como contra-exemplo para as outras duas propriedades. No arranjo da Figura 3, por exemplo, não há borboletas; mas há retas externas e toda reta cria um triângulo ao ser recolocada no arranjo. Essa observação mostra, por um lado, que de fato as três propriedades são representativas do ponto de vista combinatorial, pois nenhuma implica outra; mas, por outro lado, que não pode ser descartada a possibilidade, por exemplo, de que ausência de borboletas implique presença de retas externas. Portanto, essa abordagem indutiva mais comum, de retirar e recolocar uma reta ℓ , poderia ainda ser salva por alguma outra propriedade, talvez mais sofisticada, ou mesmo em se mostrando diretamente que todo arranjo possui pelo menos uma reta que cria um triângulo ao ser recolocada. Apenas um arranjo no qual *nenhuma* reta crie um triângulo ao ser recolocada poderia derrubar, como contra-exemplo definitivo, essa abordagem.

Para apreciar melhor a solução da próxima seção, se o leitor nunca tentou resolver esse exercício, ele deve tentar antes de prosseguir.

3 Uma solução com argumentos de contagem

A solução que se segue é essencialmente a apresentada em [1]. Apenas a interpretação sobre interseção de semiplanos, a subsequente demonstração do Lema 2 e a apresentação foram dadas pelo autor desse artigo, por serem mais simples.

Dado um arranjo \mathcal{S} de n retas, seja Δ o número de triângulos, E o número de arestas limitadas e F o número de faces limitadas em \mathcal{S} . A idéia é contar o número de arestas limitadas de duas maneiras diferentes, em função de n e em função de F e Δ . Como \mathcal{S} está em posição geral, toda reta é interceptada por todas as outras $n - 1$ retas, em vértices distintos. Assim, toda reta é particionada em $n - 1$ vértices, 2 arestas ilimitadas e $n - 2$ arestas limitadas. Portanto, em função de n , vale $E = n(n - 2)$. Um exercício simples de indução mostra que $F = (n - 1)(n - 2)/2$. A próxima seção mostra que, em função de F e Δ , vale $E \leq 2F + \Delta$. Portanto, $n(n - 2) \leq (n - 1)(n - 2) + \Delta$, e chega-se ao resultado desejado, $\Delta \geq n - 2$.

3.1 Contando em função de F e Δ

A idéia é atribuir rótulos \oplus ou \ominus a cada lado de cada aresta limitada de \mathcal{S} . Para isso, considere uma aresta limitada e qualquer de \mathcal{S} . Seja f uma das duas faces (limitada ou não) adjacentes a e . Seja k o número de arestas adjacentes a f . Seja r_1 a reta suporte de e , e r_2, r_3, \dots, r_k as retas suporte das arestas adjacentes a f , em sentido horário, a partir de e . Lembre que uma reta divide o plano Euclidiano, definindo dois semiplanos. Agora, seja d_i o semiplano, definido pela reta r_i , que contém a face f . Com isso, f é a interseção dos semiplanos do conjunto $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. Veja a Figura 4(a).

O rótulo de e , do lado de f , é \oplus se a interseção dos semiplanos do conjunto $\{d_2, d_3, \dots, d_k\}$ é ilimitada. Ou seja, quando se retira o semiplano d_1 do conjunto $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, a interseção torna-se ilimitada. O rótulo é \ominus caso contrário. Na Figura 4(a), o rótulo de e do lado de f será \oplus .

Lema 1 *Toda aresta limitada de \mathcal{S} tem um rótulo \oplus de um lado e um rótulo \ominus do outro.*

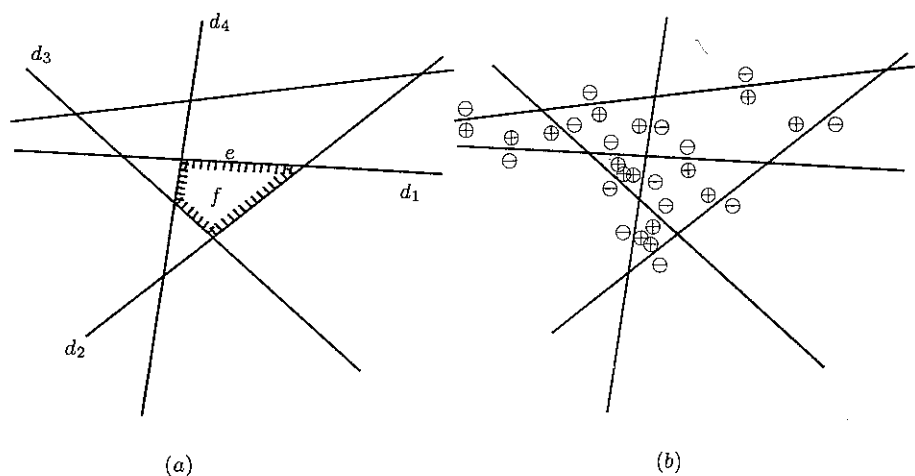


Figura 4: Rotulando as arestas limitadas de S

Prova A interseção dos semiplanos do conjunto $\{d_2, d_3, \dots, d_k\}$ é ilimitada se e somente se a interseção de r_2 e r_k está contida no semiplano d_1 . Como r_2 e r_k se interceptam em exatamente um dos lados de r_1 , o lema segue. \square

A Figura 4(b) mostra a rotulação completa do arranjo da Figura 4(a). Pelo Lema 1, pode-se contar o número de arestas limitadas como:

$$E = \sum_f (\text{número de } \oplus \text{ na face } f)$$

É fácil ver que todos os três rótulos dentro de um triângulo são \oplus . O pulo do gato é dado pelo próximo lema que mostra que o número máximo de rótulos \oplus dentro de qualquer face limitada, que não é um triângulo, é 2. Portanto:

$$E = \sum_f (\text{número de } \oplus \text{ na face } f) \leq 2F + \Delta$$

onde conta-se, no máximo, dois rótulos \oplus por face. O termo Δ conta o terceiro rótulo \oplus que sobra dentro de cada triângulo.

Lema 2 *Uma face limitada adjacente a k arestas, $k \geq 4$, possui no máximo dois rótulos \oplus .*

Prova Basta mostrar que quaisquer dois rótulos \oplus dentro da mesma face têm que ser adjacentes. O lema segue daí. Se o rótulo de uma aresta e do lado da face f é \oplus , então a interseção dos semiplanos do conjunto $\{d_1, d_2, d_k\}$ é limitada, e contém a face f . Portanto, quando se retira um semiplano d_i , para $3 \leq i \leq k-1$, do conjunto $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, a interseção que resulta é limitada. Assim, os rótulos das arestas correspondentes aos semiplanos d_3, d_4, \dots, d_{k-1} , do lado de f , têm que ser todos \ominus . \square

Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer as sugestões e o incentivo de Pedro Jussieu de Rezende e as excelentes observações feitas pelos revisores.

Referências

- [1] Stefan Felsner e Klaus Kriegel. Triangles in euclidean arrangements. *Discrete and Computational Geometry*, 22:429–438, 1999.
- [2] B. Grünbaum. *Arrangements and Spreads*. Número 10 em CBMS Monographs (Regional Conf. Series Math). Amer. Math. Soc, 1972.
- [3] Udi Manber. *Introduction to Algorithms: A Creative Approach*. Addison-Wesley, 1989.
- [4] S. Roberts. On the figures formed by the intercepts of a system of straight lines in the plane, and on analogous relations in space of three dimensions. *Proceedings of the London Math. Society*, 19:405–422, 1889.
- [5] R. Shannon. Simplicial cells in arrangements of hyperplanes. *Geom. Dedicata*, 8:179–187, 1979.

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 6176
13083-970, Campinas, SP
email: guialbu@ic.unicamp.br