MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$30 – junho 2001 – pp. 125–129

Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes

Airton S. de Medeiros

Como sabemos o conjunto das soluções da equação diferencial linear de ordem n, homogênea com coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \qquad (*)$$

é um espaço vetorial, de dimensão n i.e. existem soluções $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tais que qualquer solução φ se escreve, de maneira única, como uma combinação linear $\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$.

O objetivo central desta nota é observar que este resultado pode ser estabelecido de forma direta e rigorosa, sem necessidade de apelar para qualquer tipo de Teorema de Unicidade. Para tal, de acordo com a Afirmação 1 abaixo (estabelecida sem o auxílio de nenhum Teorema de Unicidade), basta exibir um conjunto de n soluções cujo Wronskiano não seja identicamente nulo.

Relembramos que o Wronskiano $W(x)$ de n funções $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, deriváveis até a ordem $n-1$, é o determinante da matriz Wronskiana

$$M(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Curiosamente, após uma extensa pesquisa bibliográfica, cerca de 150 livros-textos consultados, constatamos que nenhum dos autores adota este ponto de vista, alguns, inclusive, optam por demonstrar o Teorema de Unicidade no caso particular das equações lineares (veja p.ex. [1], pp.75–77). Na verdade, apenas um dos autores [2] demonstra, a priori, que o Wronskiano das soluções fundamentais (obtidas a partir das raízes do polinômio característico $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$) não é identicamente nulo. No entanto, o mesmo autor lança mão (desnecessariamente) do Teorema de Unicidade para demonstrar que qualquer solução de (*) é uma combinação linear das soluções fundamentais. De fato, conforme observamos acima, isto decorre imediatamente da Afirmação 1, cuja prova é baseada essencialmente num resultado elementar encontrado em praticamente todos os livros-textos de equações diferenciais (veja p.ex. [1], pp. 65–66), também conhecido como a

Fórmula de Liouville: O Wronskiano de n soluções quaisquer de (*) é da forma $ce^{-a_1 x}$ para alguma constante c.

Afirmação 1: Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ soluções de (*) cujo Wronskiano não é identicamente nulo. Então, toda solução de (*) se escreve, de maneira única, como combinação linear de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Prova: Seja φ uma solução qualquer. Queremos encontrar constantes $c_1, \ldots, c_n$ tais que $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$. Logo, para cada x fixo, $c_1, \ldots, c_n$ é uma solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1\varphi_1(x) & + & \cdots & + & c_n\varphi_n(x) & = & \varphi(x) \\ c_1\varphi_1'(x) & + & \ldots & + & c_n\varphi_n'(x) & = & \varphi'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x) & + & \ldots & + & c_n\varphi_n^{(n-1)}(x) & = & \varphi^{(n-1)}(x) \end{array} \right.$$

cujo determinante é exatamente o Wronskiano das soluções $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e que é, portanto, não nulo devido às hipóteses e à Fórmula de Liouville. Assim, as constantes $c_1, \ldots, c_n$ acima existem (e são necessariamente únicas) se, e somente se, as soluções do sistema são independentes de x. Mas, pela regra de Cramer, estas soluções são quocientes de Wronskianos de soluções de (*) e conseqüentemente constantes em virtude da Fórmula de Liouville. □

A fim de apresentar uma exposição mais completa daremos, a seguir, uma prova direta da

Afirmação 2: O Wronskiano $W(x)$ das soluções fundamentais não é identicamente nulo.

Esta demonstração é, em essência, a mesma apresentada em [2].

Provaremos que $W(0) \neq 0$ ou, equivalentemente, que as linhas da matriz Wronskiana $M(0)$ são linearmente independentes.

Relembremos que se r é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico então, $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{m-1}e^{rx}$ são as m soluções fundamentais associadas a esta raiz. Utilizaremos a seguinte

Afirmação 3: As m colunas de $M(0)$ correspondentes a essas soluções (ordenadas como acima) são as derivadas sucessivas (em relação a r) da primeira coluna (que corresponde a e^{rx} e cujos elementos são, evidentemente: $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$).

Antes de provarmos esta afirmação vejamos, rapidamente, como ela conduz ao resultado desejado.

Com efeito, sejam $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ as n linhas de $M(0)$ e sejam $c_0, \ldots, c_{n-1}$ constantes tais que $c_0L_0 + \cdots + c_{n-1}L_{n-1} = 0$. Calculando, nesta soma, as coordenadas correspondentes a cada coluna acima discriminada, obtemos, devido à afirmação: $q(r) = q'(r) = \cdots = q^{(m-1)}(r) = 0$, onde $q(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$. Logo, $q(t)$ é divisível por $(t-r)^m$. Como r é uma raiz arbitrária do polinômio característico $p(t)$, concluimos que $q(t)$ é divisível por $p(t)$ e portanto $q = 0$, já que $\text{grau}(p(t)) = n > n-1$. Em outras palavras, $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$.

Prova da Afirmação 3: Devemos mostrar que os elementos da coluna correspondente à solução fundamental $\varphi(x) = x^k e^{rx}$, são as derivadas de ordem k (em relação a r) das funções $1, r, \ldots, r^{n-1}$, respectivamente. Para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, o i-ésimo elemento desta coluna é, pela definição de $M(0)$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(i)}(0) = (x^k e^{rx})^{(i)}(0) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (x^k)^{(j)}(0) \cdot (e^{rx})^{(i-j)}(0) = \\ & \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (x^k)^{(j)}(0) \cdot r^{i-j},\end{aligned}$$

e o resultado segue imediatamente do fato que $(x^k)^{(j)}(0) = 0$, se $j \neq k$.
$\square$

Observação: Poderíamos provar a Afirmação 2 calculando explicitamente $W(0)$. De fato, com o auxílio da Afirmação 3, podemos mostrar que:

$$W(0) = c(m_1) \dots c(m_s) \prod_{s \geq i > j \geq 1} (r_i - r_j)^{m_i \cdot m_j}.$$

Onde $r_1, \dots, r_s$ são as raízes distintas do polinômio característico, m_1, $\dots, m_s$ suas respectivas multiplicidades e $c(m) = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (m-1)!$.

Não incluimos a demonstração deste resultado por considerá-la extensa e pouco instrutiva em face ao verdadeiro propósito desta nota.

Comentário sobre as Equações com Coeficientes Variáveis

É claro que a Afirmação 1 é verdadeira no contexto de equações com coeficientes variáveis, já que dispomos, igualmente, da Fórmula de Liouville para estas equações (veja p.ex. [1], pp.113–115). Portanto, para concluir que o conjunto das soluções da equação homogênea de ordem n, é um espaço vetorial de dimensão n (sem apelar para o Teorema de Unicidade) é suficiente mostrar que existem n soluções cujo Wronskiano não é identicamente nulo. E isto é garantido pelo Teorema de Existência: Basta tomar soluções satisfazendo, em um dado ponto x_0, condições iniciais de forma que a matriz Wronskiana $M(x_0)$ seja a matriz identidade.

Finalmente, gostaríamos de observar que este enfoque, ao nosso ver, além de ser coerente com o espírito de apresentar, da maneira mais direta possível, a teoria elementar das equações diferenciais, realça o valor da Fórmula de Liouville, que usualmente só é utilizada como instrumento prático no cálculo de certos Wronskianos.

Referências

[1] Coddington, Earl A. - An Introduction to Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall, Inc.

[2] Pontryagin, L.S. - Ordinary Differential Equations. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (pp. 50–55).

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, UFRJ
Ilha do Fundão
Rio de Janeiro - RJ
e-mail: airton@impa.br