MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$31 – dezembro 2001 – pp. 1–19

Simetrias por rotação no espaço das matrizes e dinâmica dos fluidos

N. Cohen e M. C. Lopes Filho

Resumo

Neste artigo vamos demonstrar um teorema específico de álgebra linear real que diz que qualquer transformação linear do espaço das matrizes 3×3 nele mesmo que comuta com todas as conjugações ortogonais pode ser descrita de forma bastante elegante com três parâmetros. O resultado utiliza de forma ampla o conteúdo de um curso de algebra linear, dá um vislumbre da beleza e do poder da teoria de representações de grupos de Lie e se aplica naturalmente em dinâmica dos fluidos. O artigo se dirige a alunos que tenham familiaridade com álgebra linear ao nível do livro de Boldrini ou de E. L. Lima e já tenham cursado Cálculo e Física II para poder apreciar a aplicação em dinâmica dos fluidos.

1 Introdução

O que é um fluido? Isto não é uma pergunta com uma resposta bem determinada, já que o conceito teórico de fluido vai necessariamente corresponder a uma abstração do comportamento físico dos materiais concretos que se deseja chamar de fluido. Portanto, o conceito teórico de fluido pode mudar dependendo do ponto de vista de quem está formulando o conceito. É natural introduzir a discussão sobre a noção de fluido utilizando o contraste com a noção de sólido elástico. Primeiro, o que estes dois conceitos devem ter em comum. Ambos são descrições de meios contínuos, cujo comportamento dinâmico pode ser descrito, e predito, por meio de algumas variáveis macroscópicas, como velocidade, densidade e pressão. As distinções, intuitivamente claras, no comportamento de fluidos e de sólidos elásticos podem ser expressas matematicamente na descrição de como estes meios contínuos interagem consigo mesmos.

Suponha que o meio contínuo sob consideração ocupe uma região (aberta) do espaço, em princípio dependente do tempo t, que denotamos por $\Omega = \Omega(t)$. As forças que as partes de um meio contínuo exercem sobre outras partes são descritas, de uma maneira que tornaremos precisa daqui a pouco, pelo que se chama *tensor de tensão (stress tensor)*. O tensor de tensão nada mais é que uma matriz 3×3, que denotamos por $T(\mathbf{x}, t)$, função da posição $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ e do tempo t. O fato que as forças internas em um meio contínuo qualquer podem ser descritas por $T(\mathbf{x}, t)$, através de nove números reais, não é nada óbvio. Trata-se de uma consequência do princípio de conservação de momento, veja [6], seção 5.4.

O tensor de tensão descreve as forças internas ao meio contínuo da seguinte maneira. Fixados um instante de tempo t e um ponto $\mathbf{x} \in \Omega(t)$, escrevemos a força (de contato) por unidade de área que uma parte do material exerce sobre outra parte na direção do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ na forma:

$$F(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = p\mathbf{n} + T(x, t)\mathbf{n},$$

onde p é a pressão. A distinção entre sólidos elásticos e fluidos pode ser expressa matematicamente na maneira em que o tensor de tensão é descrito em função das variáveis macroscópicas. As fórmulas que exprimem o tensor de tensão em termos das variáveis macroscópicas do meio contínuo chamam-se *relações constitutivas* e incorporam a descrição matemática completa das propriedades mecânicas do meio contínuo.

Em um sólido elástico, o tensor de tensão é determinado pela *deformação* a que o sólido está sujeito no instante t, isto é, a força que parte do sólido exerce sobre outra parte depende apenas de quão torcido e entortado o sólido está em um determinado instante. As propriedades mecânicas de sólidos elásticos podem ser descritas pela maneira com que eles resistem à deformação.

Em contraste, um fluido apresenta resistência desprezível à deformação. De fato, no caso extremo de fluidos ideais, o tensor de tensão se anula identicamente e o fluido interage consigo mesmo apenas através da pressão. Os fluidos em que o tensor de tensão está presente chamam-se de fluidos viscosos, mas mesmo em fluidos viscosos não há resistência do fluido à deformação própria, mas apenas à velocidade com que esta deformação é imposta ao fluido. Intuitivamente, dizemos que um fluido pode ser deformado de uma maneira qualquer, sem que se criem forças no fluido tendendo a restaurá-lo a uma posição específica - um fluido é indiferente a deformações.

Naturalmente, os conceitos matemáticos de sólido elástico e de fluido descritos acima são idealizações - materiais do mundo real se comportam de maneira intermediária, por vezes fluindo e por vezes se deformando e frequentemente fazendo as duas coisas. Isto é, materiais reais são *fluidos viscoelásticos*, em que ambos os comportamentos têm que ser levados em conta simultaneamente na descrição matemática. Vamos contudo nos concentrar a seguir no caso específico de fluidos.

É natural considerar-se que, para cada fluido viscoso específico, o tensor de tensão fique determinado por alguma fórmula em termos da velocidade do fluido. Dado que o tensor de tensão exprime a interação por contato do fluido consigo mesmo, é natural também que esta lei física exprima o tensor de tensão $T(\mathbf{x}, t)$ em um ponto $\mathbf{x}$ e tempo t apenas como uma função da velocidade do fluido, denotada por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e de suas derivadas $D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), D^2\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \ldots$ avaliadas no ponto $\mathbf{x}$ e no instante t. Mais ainda, o fluido viscoso não deve oferecer resistência ao movimento retilíneo e uniforme do fluido inteiro, de modo que o tensor de tensão deve depender apenas das derivadas da velocidade, mas não da velocidade ela mesma.

Introduziremos duas hipóteses sobre a forma específica da lei que descreve o tensor de tensão em termos de derivadas da velocidade.

(H1) O tensor de tensão depende apenas da matriz de primeiras derivadas da velocidade, e esta dependência é linear.

(H2) Esta dependência é indiferente a rotações rígidas e reflexões do espaço, isto é, não distingue direções ou a orientação do espaço. Isto apenas quer dizer que a lei física que descreve o tensor de tensão depende apenas das propriedades intrínsecas do fluido, e não da maneira como este fluido está inserido no universo externo - ou seja, estamos assumindo que não haja campos externos influenciando as propriedades mecânicas do fluido (ou que os campos externos presentes influenciem estas propriedades de maneira isotrópica, isto é, de uma maneira que não distingue direções no espaço).

A hipótese (H1) é uma simplificação, válida principalmente quando as derivadas de velocidade que aparecem no fluxo são pequenas. Esta hipótese pode ser confirmada experimentalmente em situações físicas específicas. A hipótese (H2) é mais natural. Para examinarmos seu conteúdo matemático, observamos que rotações ou reflexões do espaço são expressas por meio de transformações lineares *ortogonais*. Como tanto a matriz de derivadas de velocidade como o tensor de tensão são de fato transformações lineares, ambos respondem a uma mudança de base simultânea nos seus domínios e imagens por meio de conjugação. A hipótese (H2) pode pois ser expressa pela relação:

$$T(O^{-1}DuO) = O^{-1}T(Du)O, \tag{1}$$

para qualquer matriz ortogonal $O \in \mathcal{O}$.

Note que, dada apenas a hipótese (H1) e o fato que o mundo é tridimensional, as possíveis formas específicas para a expressão de $T(Du)$ vivem em um espaço vetorial de dimensão 81. De fato, a relação entre o tensor de tensão e as derivadas de velocidade se exprime por uma transformação linear arbitrária do espaço vetorial das matrizes 3×3 nele mesmo, que fica portanto determinada por uma matriz 9×9, após uma escolha de base no espaço das matrizes. Nosso objetivo neste artigo é demonstrar que a hipótese (H2) restringe esta relação de forma dramática, a tal ponto que qualquer T satisfazendo (H1) e (H2) tem que pertencer a um certo subspaço de dimensão 3 do espaço original de dimensão 81. Mais precisamente, este artigo tem como objetivo demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 1 *Seja $T = T(Du)$ uma expressão para o tensor de tensão satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Então, existem constantes reais λ, μ e ν tais que:*

$$T(Du) = \lambda \ \mathit{traço}(Du)\mathbb{I} + \mu Du + \nu(Du)^t.$$

2 Conjugações Ortogonais

No que se segue, vamos essencialmente abandonar as questões relacionadas com dinâmica dos fluidos e restringir a discussão ao problema de álgebra linear formulado no fim da seção anterior:

PROBLEMA: Caracterizar todas as transformações lineares do espaço vetorial das matrizes reais 3×3 nele mesmo que sejam invariantes com respeito a conjugação ortogonal.

Vamos fixar $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, uma base ortonormal positiva (i.e. $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$) para o espaço Euclidiano tridimensional. Como temos uma base fixada, não vamos fazer distinção entre matrizes e transformações lineares, ou seja, toda matriz real 3×3 T também é entendida como a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base fixada é T. O espaço vetorial das matrizes 3×3 com coeficientes reais é denotado por M, e a transformação linear identidade em $\mathbb{R}^3$ é denotada por $\mathbb{I}$. Uma matriz $O \in M$ é ortogonal se $O^{-1} = O^t$. Esta é uma caracterização algébrica elegante e não óbvia de um conjunto geometricamente muito significativo: o das rotações rígidas e das reflexões especulares do espaço Euclidiano, que fixam a origem. O conjunto de todas as matrizes ortogonais chama-se *grupo ortogonal* e, no nosso caso particular de matrizes 3×3, denota-se este grupo (de Lie) por $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Como vamos trabalhar apenas no caso 3×3, denotamos este grupo ortogonal específico apenas por $\mathcal{O}$. Dado $O \in \mathcal{O}$, observe que a relação $OO^t = \mathbb{I}$ é uma maneira condensada de dizer que as linhas de uma matriz ortogonal formam uma base ortonormal do R^3. A relação $O^tO = \mathbb{I}$ diz que as colunas de uma matriz ortogonal também são uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

Nosso objetivo final neste artigo é demonstrar que simetria por rotação restringe bastante a forma que transformações lineares podem tomar. Comecemos com um resultado clássico de Álgebra Linear, que ao mesmo tempo ilustra de forma simples o principio geral por trás do que pretendemos fazer e que será utilizado posteriormente. Primeiro, recordemos que o produto de matrizes quadradas não é *comutativo*, ou seja, se $A, B \in M$, em geral, $AB \neq BA$. Contudo, certos pares $A, B \in M$ de matrizes satisfazem a relação $AB = BA$, e, neste caso, diz-se que as matrizes A e B *comutam*. Por exemplo, múltiplos da matriz identidade comutam com qualquer outra matriz.

Teorema 2 *Seja $Q \in M$ uma matriz que comuta com todas as matrizes ortogonais (equivalentemente: uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cuja matriz com respeito a qualquer base ortonormal é sempre a mesma).*

Então Q é um múltiplo da identidade.

Demonstração: Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ um vetor não-nulo. Seja $\mathcal{O}_\mathbf{v}$ o conjunto de todas as matrizes ortogonais que fixam o vetor $\mathbf{v}$, i.e. o conjunto das matrizes $O \in \mathcal{O}$ tal que:

$$O\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Geometricamente, este é o conjunto de todas as rotações em torno da reta suporte de $\mathbf{v}$, acrescido das reflexões com respeito a planos contendo esta mesma reta. Seja $O \in \mathcal{O}_\mathbf{v}$. Então:

$$OQ\mathbf{v} = QO\mathbf{v} = Q\mathbf{v},$$

e portanto, $Q\mathbf{v}$ também fica fixado por todas as matrizes em $\mathcal{O}_\mathbf{v}$. Isto implica que $\mathbf{v}$ e $Q\mathbf{v}$ são linearmente dependentes, já que os únicos vetores fixados por uma rotação do $\mathbb{R}^3$ em torno de uma reta passando pela origem são aqueles gerados pelo vetor diretor da reta. Uma transformação linear com a propriedade que todo vetor é linearmente dependente com sua imagem pela transformação tem que ser um múltiplo da identidade. Este fato é facil de verificar, e fica como exercicio para o leitor. □

Podemos introduzir em M um produto interno. Sejam $A, B \in M$, definimos:

$$\langle A, B\rangle \equiv \text{ traço } (A^t B).$$

A norma de uma matriz A com respeito a esse produto interno é chamada de *norma de Frobenius*, e é denotada por $\|A\|_F \equiv |\langle A, A\rangle|^{1/2}$. Como a norma de Frobenius é a única norma de matrizes que vamos utilizar nesta discussão, vamos chama-la apenas de norma.

O espaço vetorial das matrizes 3×3 pode ser decomposto como soma direta de dois subespaços ortogonais, o subspaço $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas, e o subespaço $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas. Mais precisamente,

$$\mathcal{S} \equiv \{S \in M : S^t = S\},$$

$$\mathcal{A} \equiv \{A \in M : A^t = -A\}.$$

A decomposição (única) de uma matriz qualquer $Q \in M$ como uma soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica é dada por:

$$Q = Q_{\mathcal{S}} + Q_{\mathcal{A}} \equiv \frac{Q+Q^t}{2} + \frac{Q-Q^t}{2}.$$

Vamos mostrar em seguida que os espaços das matrizes simétricas e das matrizes anti-simétricas são preservados por conjugação ortogonal.

Lema 1 *Se $A \in \mathcal{A}$ e $S \in \mathcal{S}$ então, para qualquer matriz ortogonal O, $O^{-1}AO \in \mathcal{A}$ e $O^{-1}SO \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Primeiro considere $A \in \mathcal{A}$ e $O \in \mathcal{O}$ fixas. Então,

$$(O^{-1}AO)^t = O^tA^t(O^{-1})^t = O^{-1}(-A)O = -(O^{-1}AO),$$

e portanto $O^{-1}AO \in \mathcal{A}$. Por outro lado, para $S \in \mathcal{S}$, $O \in \mathcal{O}$ temos:

$$(O^{-1}AO)^t = O^tA^t(O^{-1})^t = O^{-1}AO.$$

de modo que $O^{-1}AO \in \mathcal{S}$ também. $\square$

No que se segue, vamos considerar transformações lineares quaisquer $T : M \to M$ decompostas em quatro transformações lineares:

$$T = \begin{bmatrix} T_{\mathcal{AA}} & T_{\mathcal{SA}} \\ T_{\mathcal{AS}} & T_{\mathcal{SS}} \end{bmatrix} : \mathcal{A} \oplus \mathcal{S} \to \mathcal{A} \oplus \mathcal{S},$$

onde, se $S \in M$,

$$(T(S))_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{AA}}(S_{\mathcal{A}}) + T_{\mathcal{SA}}(S_{\mathcal{S}}),$$

e

$$(T(S))_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{AS}}(S_{\mathcal{A}}) + T_{\mathcal{SS}}(S_{\mathcal{S}}).$$

Suponha que T satisfaz a propriedade que desejamos estudar, isto é, que para toda matriz ortogonal $O \in \mathcal{O}$ e toda matriz $Q \in M$, $T(O^{-1}QO) = O^{-1}T(Q)O$. Uma consequência do Lema 1 é que cada uma das quatro transformações lineares $T_{\mathcal{AA}}$, $T_{\mathcal{AS}}$, $T_{\mathcal{SA}}$ e $T_{\mathcal{SS}}$ satisfaz a mesma propriedade (exercício).

Torna-se importante estudar de que maneira a conjugação ortogonal se comporta dentro dos conjuntos de matrizes simétricas e anti-simétricas. Vamos apresentar informação sobre isto em dois resultados, um para cada caso.

Proposição 1 *Para cada matriz simétrica S existem uma matriz ortogonal O e uma matriz diagonal D tal que $O^{-1}SO = D$. A matriz diagonal D é única, a menos de permutações dos seus coeficientes da diagonal.*

Este resultado é o teorema espectral para matrizes simétricas, veja por exemplo, o capítulo 9 de [1] ou o livro [5] para a demonstração.

Proposição 2 *Duas matrizes anti-simétricas 3×3 são conjugadas por uma matriz ortogonal se e somente se elas possuirem a mesma norma.*

Antes de demonstrarmos este resultado, vamos apresentar um lema, que é uma descrição geométrica das transformações lineares anti-simétricas.

Lema 2 *A cada matriz anti-simétrica A está associado um único vetor $\mathbf{v}$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$, onde $\times$ é o produto vetorial padrão do $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração do lema: Podemos escrever uma matriz anti-simétrica A qualquer como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ então a transformação linear $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x}$ tem como matriz com respeito à base canônica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix},$$

bastando portanto fazer-se a identificação apropriada. $\square$

Demonstração da Proposição 2:

Primeiro note que se $O \in \mathcal{O}$ é uma matriz ortogonal, e $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ são vetores, então:

$$O(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\det O)((O\mathbf{v}) \times (O\mathbf{w})).$$

Para verificar isto, considere $O \in \mathcal{O}$ fixa e escreva $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como combinação linear dos vetores da base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Usando a linearidade da transformação linear O e o fato que o produto vetorial é bilinear alternado, podemos provar facilmente que basta verificar a identidade nos casos $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k})$. Examinamos apenas o caso $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$, já que os outros dois casos funcionam da mesma maneira. Note que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, já que a base é positiva. A imagem de uma base ortonormal por uma transformação linear ortogonal também é uma base ortonormal, de modo que $\{O\mathbf{i}, O\mathbf{j}, O\mathbf{k}\}$ é uma base ortonormal. Mais ainda, esta base é positiva se o determinante de O for $+1$ e negativa se o determinante de O for -1. A afirmação fica demonstrada, pois, para qualquer base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial do primeiro com o segundo elemento da base é o sinal da base vezes o terceiro elemento da base.

Considere agora A uma matriz anti-simétrica, associada pelo Lema 2 a um vetor $\mathbf{v}$, $O \in \mathcal{O}$ e $\mathbf{x}$ um vetor qualquer. Então:

$$O^{-1}AOx = O^{-1}(\mathbf{v} \times O\mathbf{x}) = (\det O)(O^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{x}),$$

e portanto a matriz anti-simétrica $O^{-1}AO$ fica associada ao vetor $(\det O)$ $O^{-1}\mathbf{v}$ pelo Lema 2.

Finalmente, note que a norma de uma matriz anti-simétrica é precisamente o dobro da norma Euclidiana do vetor associado a ela, e que dados dois vetores de mesma norma, sempre existe uma matriz ortogonal de determinante 1 que leva um vetor no outro. Pelo exposto acima, esta mesma matriz ortogonal conjuga as matrizes anti-simétricas associadas. $\square$

A demonstração da Proposição 2 fornece uma descrição geométrica simples da conjugação ortogonal no espaço das matrizes anti-simétricas.

3 Simetrias em espaços de matrizes

Nosso objetivo nesta seção é enunciar e demonstrar nosso resultado principal. Vamos iniciar com um lema que generaliza o Teorema 2.

Lema 3 *Seja Q uma matriz 3×3 com a seguinte propriedade: para qualquer matriz ortogonal $O \in \mathcal{O}$, da forma:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{O} \end{bmatrix},$$

(com $\widetilde{O}$ uma matriz ortogonal 2×2) temos que $QO = OQ$. Então $Q = (a_{ij})$ é uma matriz diagonal, com $a_{22} = a_{33}$.

Demonstração do lema: Seja:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & v_1 & v_2 \\ w_1 & b_{11} & b_{12} \\ w_2 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & B \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{v} = [v_1 v_2], \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Então, se O é uma matriz ortogonal da forma descrita no enunciado temos:

$$O^{-1}QO = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{v}\widetilde{O} \\ \widetilde{O}^{-1}\mathbf{w} & \widetilde{O}^{-1}B\widetilde{O} \end{bmatrix}.$$

Para que $O^{-1}QO = Q$ para todo $\widetilde{O}$, não temos restrição sobre a_{11}, e, pela versão 2×2 do Teorema 2, $B = \mu\mathbb{I}_2$. Mais ainda, os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ficam fixados quando multiplicados por qualquer matriz ortogonal 2×2 à direita e à esquerda respectivamente. Isto implica que $\mathbf{v} = \mathbf{w} = 0$, o que conclui a demonstração. □

No que se segue, vamos estudar as restrições que a covariância com respeito à conjugação ortogonal impõe às transformações lineares T_{AA}, T_{AS}, T_{SA} e T_{SS}.

3.1 Caso T_{AS}

A demonstração que vamos apresentar para este caso é devida a Plamen Koshlukov, do IMECC-UNICAMP. Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3 *Seja T uma transformação linear do espaço vetorial das matrizes anti-simétricas 3×3 para o espaço das matrizes simétricas 3×3 tal que $T(O^{-1}AO) = O^{-1}T(A)O$ para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $O \in \mathcal{O}$. Então T é a transformação linear nula.*

Demonstração do Teorema 3:

Considere a matriz anti-simétrica A_0 dada por:

$$A_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primeiro note que o valor de T em A_0 determina T completamente. Note que as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

são conjugadas a A_0, pela Proposição 2, já que estas matrizes tem a mesma norma. A matriz A_0, juntamente com as outras duas matrizes acima, formam uma base de $\mathcal{A}$, de modo que T fica então determinada por linearidade.

Considere agora as seguintes matrizes ortogonais:

$$O_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $T(A_0)$ seja uma matriz simétrica arbitrária, da forma

$$T(A_0) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}.$$

A conjugação $Q \mapsto O_0^{-1} Q O_0$ apenas troca os sinais da primeira linha e da primeira coluna da matriz Q. Portanto, de um lado, $O_0^{-1} A_0 O_0 = -A_0$, e, por outro lado,

$$O_0^{-1} T(A_0) O_0 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & -b_2 \\ -b_1 & a_2 & b_3 \\ -b_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $a_1 = a_2 = a_3 = b_3 = 0$. Analogamente, a conjugação com O_1 troca os sinais da segunda linha e da segunda coluna, perimitindo concluir que $b_2 = 0$. Finalmente, temos que $O_2^{-1} A_0 O_2 = A_0$ enquanto que

$$O_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix} O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e portanto, $b_3 = 0$, de modo que $T(A_0) = 0$ e portanto, $T = 0$. □

3.2 Caso T_{SA}

Teorema 4 *Seja T uma transformação linear do espaço vetorial das matrizes simétricas 3×3 para o espaço das matrizes anti-simétricas 3×3 tal que $T(O^{-1}SO) = O^{-1}T(S)O$ para quaisquer $S \in \mathcal{S}$ e $O \in \mathcal{O}$. Então T é a transformação linear nula.*

Demonstração do Teorema 4:

Basta determinar a imagem das matrizes diagonais, e, devido a permutações dos elementos da base por transformações ortogonais e da linearidade de T, basta determinar a imagem da matriz D_1, com $(D_1)_{11} = 1$ e todos os outros coeficientes nulos. A matriz D_1 é invariante por conjugação com matrizes ortogonais que fixem o primeiro elemento da base canônica e façam uma rotação no plano gerado pelas outras duas. Portanto, a matriz anti-simétrica $T(D_1)$ tem a mesma propriedade. Pelo Lema 3, $T(D_1)$ tem que ser diagonal, o que implica que $T(D_1)$ é zero, e portanto, $T = 0$. □

3.3 Caso T_{SS}

Teorema 5 *Seja T uma transformação linear do espaço vetorial das matrizes simétricas 3×3 em si mesmo tal que $T(O^{-1}SO) = O^{-1}T(S)O$ para quaisquer $S \in \mathcal{S}$ e $O \in \mathcal{O}$. Então existem constantes reais λ e μ tais que:*

$$T(S) = \lambda S + \mu \; tr(S)\mathbb{I}.$$

Demonstração do Teorema 5: Seja D_i a matriz diagonal tal que $(D_i)_{ii} = 1$, e todos os outros coeficientes de D_i são nulos. Como na demonstração do teorema anterior, para determinarmos T acima, basta determinarmos a matriz $T(D_1)$. Pelo Lema 3, existem números a e b tais que:

$$T(D_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$T(D_2) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \text{ e } T(D_3) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

de modo que:

$$T\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a\lambda_1 + b(\lambda_2+\lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & a\lambda_2 + b(\lambda_1+\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & a\lambda_3 + b(\lambda_1+\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

$$= (a-b)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} + b(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbb{I}.$$

Finalmente, se S é uma matriz simétrica qualquer, seja O uma matriz ortogonal que diagonaliza S, ou seja:

$$S = O^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} O.$$

Portanto,

$$T(S) = T\left(O^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} O\right) =$$

$$= O^{-1}\left((a-b)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} + b(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\mathbb{I}\right) O =$$

$$= (a-b)Q + b\,\mathrm{tr}(Q)\mathbb{I},$$

como queriamos. □

3.4 Caso T_{AA}

Teorema 6 *Seja T uma transformação linear do espaço vetorial das matrizes anti-simétricas 3×3 em si mesmo tal que $T(O^{-1}AO) = O^{-1}$ $T(A)O$ para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $O \in \mathcal{O}$. Então existe uma constante real ν tal que:*

$$T(A) = \nu A.$$

Demonstração do Teorema 6: Vimos no Lema 2 que para cada matriz anti-simétrica A está associado um único vetor $\mathbf{v}$ tal que, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$. Vamos usar a notação $\mathcal{I}$ para o operador do espaço das matrizes anti-simétricas no $\mathbb{R}^3$, que associa a cada matriz anti-simétrica A o vetor $\mathbf{v} = \mathcal{I}(A)$ correspondente. Vimos também na demonstração da Proposição 2 que:

$$\mathcal{I}(O^{-1}AO) = \det(O)O^{-1}\mathcal{I}(A).$$

Seja T a transformação linear no espaço das matrizes anti-simétricas que se deseja provar ser um múltiplo da identidade. Então $\mathcal{I}T\mathcal{I}^{-1}$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, e portanto uma matriz 3×3, com a propriedade que, para qualquer matriz ortogonal O e vetor $\mathbf{x}$:

$$O^{-1}\mathcal{I}T\mathcal{I}^{-1}\mathbf{x} = \det(O)\mathcal{I}O^{-1}T\mathcal{I}\mathbf{x}O = \det(O)\mathcal{I}T(O^{-1}\mathcal{I}^{-1}\mathbf{x}O) =$$

$$\det(O)\mathcal{I}T(\mathcal{I}^{-1}\det(O)O^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{I}T\mathcal{I}^{-1}O^{-1}\mathbf{x}.$$

Portanto, a matriz $\mathcal{I}T\mathcal{I}^{-1}$ comuta com todas as matrizes ortogonais, o que pelo Teorema 2, implica que esta matriz é um múltiplo da identidade.

Como $\mathcal{I}$ é um isomorfismo linear, isto implica que T ela mesma é um múltiplo da identidade, como queriamos. □

4 Teorema principal, comentários e conclusões

O nosso resultado final simplesmente coloca os quatro Teoremas da seção anterior juntos. Há duas maneiras, igualmente elegantes, de apresentar o resultado final, que incluiremos no enunciado abaixo.

Teorema 7 *Seja T uma transformação linear do espaço vetorial das matrizes 3×3 de coeficientes reais nele mesmo tal que, para toda matriz ortogonal 3×3 O e toda matriz 3×3 Q tenhamos:*

$$T(O^{-1}QO) = O^{-1}T(Q)O.$$

Então, existem constantes reais a, b e c tais que:

$$T(Q) = a \ \mathit{traço}(Q)\mathbb{I} + bQ_S + cQ_A.$$

Equivalentemente, podemos dizer que existem constantes reais λ, μ e ν tais que:

$$T(Q) = \lambda \ \mathit{traço}(Q)\mathbb{I} + \mu Q + \nu Q^t.$$

A demonstração consiste do conteúdo das duas seções anteriores.

Temos ainda algumas observações a fazer. A primeira observação é que a generalização óbvia do enunciado acima para matrizes reais $n \times n$ é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Deixamos este fato como um exercício para o leitor, mas observamos que o problema em dimensão três já apresenta quase toda a dificuldade do caso geral.

Voltando à aplicação em dinâmica dos fluidos, suponhamos que o momento angular contido em regiões pequenas do fluido tende a zero quando o volume da região tende a zero. Neste caso, pode-se demonstrar que o tensor de tensão $T(Du(x))$ é simétrico em cada x (veja [6]), e que portanto, pelo resultado demonstrado neste artigo, existem duas constantes λ e μ tais que

$$T(Q) = \mu \ \text{traço}(Q)\mathbb{I} + \lambda Q.$$

As constantes λ e μ são chamadas *constantes de Lamé*. Esta situação leva à formulação usual das equações de Navier-Stokes (tanto compressíveis quanto incompressíveis) como modelo para o comportamento do fluido.

Uma terceira observação que desejamos fazer é a conexão do argumento aqui traçado com a teoria de representações de grupos de Lie. Não vamos definir o que seja um grupo de Lie, mas observamos que o conjunto das matrizes ortogonais possui uma propriedade algébrica interessante: O produto de matrizes é uma operação que associa a um par de matrizes ortogonais seu produto, que também é ortogonal. Este produto não comutativo em $\mathcal{O}$ é associativo, possui neutro e elemento inverso, o que se define dizer que $\mathcal{O}$ é um *grupo* com respeito a essa operação. Outros subconjuntos do espaço das matrizes são grupos no mesmo sentido: O conjunto das matrizes inversíveis, o conjunto das matrizes de determinante um, e o conjunto das matrizes complexas Hermitianas são alguns outros exemplos. Uma boa introdução ao estudo destes grupos é o livro texto de M. Curtis [3].

Dada uma escolha de base para o espaço Euclidiano, o grupo das matrizes ortogonais pode ser identificado com o grupo das transformações lineares ortogonais do espaço nele mesmo. Esta identificação do grupo das matrizes com um conjunto de aplicações do espaço Euclidiano nele mesmo operando por composição é um exemplo de *representação* de um grupo. A representação específica de que trata este artigo é a representação do grupo ortogonal de dimensão 3 no espaço das matrizes 3×3 dada pela conjugação. Mais especificamente, verificamos que a representação por conjugação do grupo ortogonal no espaço das matrizes se decompõe, como soma direta, de representações separadas nos espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas e que podemos descrever bastante precisamente cada uma destas representações, via Proposições 1 e 2. O Teorema 2 e o Lema 3 são caracterizações do conjunto das matrizes que são fixadas pela representação ou por uma fatia dela. Nosso resultado principal, Teorema 7 é um teorema de classificação de transformações lineares que, na terminologia de teoria de representações, entrelaçam a representação com ela mesma. Todo o conteúdo deste artigo pode ser entendido como a resolução de um exercício elementar, mas complicado, de teoria de representações.

Para o leitor intrigado pela descrição acima, podemos recomendar o livro texto [4].

Uma observação sobre como este artigo veio a ser escrito e uma nota de agradecimento são apropriadas. O problema resolvido neste artigo apareceu no começo de um curso avançado de dinâmica dos fluidos, que o segundo autor ministrava no segundo semestre de 1999, na UNICAMP. Ao seguir a dedução do sistema de Navier-Stokes como apresentado por A. Chorin e J. Marsden em [2], fica claro que aqueles autores acreditavam (incorretamente) que a conclusão do Teorema 1 é uma aplicação imediata do Teorema 2 (de fato, Chorin e Marsden estavam interessados apenas no caso simétrico-simétrico, e portanto, no Teorema 5). Progressivamente, foi ficando claro que o resultado sugerido era razoavelmente delicado, e durante algumas semanas, este problema foi assunto comum de discussão na sala de café do IMECC-UNICAMP. Os autores, de um certo modo, são apenas relatores de uma conversa prolongada, que envolveu um grupo maior de pesquisadores. Cabe especialmente agradecer a Plamen Koshlukov, e também a Aluisio Pinheiro, Helena Lopes, Marcelo Firer, Marcelo Santos e Renato Pedrosa, entre outros, pelas contribuições à discussão e aos alunos do curso pelas contribuições que eles deram, pelo interesse continuado e paciência que exibiram. Cabe ainda agradecer a Djairo de Figueiredo, pelas sugestões para a melhoria da redação deste artigo. Uma dedução inteiramente correta do sistema de Navier-Stokes que inclui o resultado demonstrado neste artigo pode ser encontrada em [7].

Referências

[1] Boldrini, J. L. *et alli Algebra Linear* 3a. ed., editora HARBRA, 1986.

[2] Chorin, A. and Marsden, J. *A mathematical introduction to fluid mechanics* Universitext, Springer Verlag, 1979.

[3] Curtis, M. L. *Matrix Groups* Universitext, Springer Verlag, 1984.

[4] Fulton, W. and Harris, J. *Representation theory: A first course* Graduate Texts in Mathematics v. 129, Springer Verlag, 1991.

[5] Lima, E. L. *Álgebra Linear* 3a. ed., 1999. Coleção Matemática Universitária, Soc. Bras. de Matemática.

[6] Panton, R. L. *Incompressible Flow* John Wiley & Sons, 1984.

[7] Serrin, J. *Mathematical principles of classical fluid mechanics* Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 8/1, Strömungsmechanik I (Mitherausgeber C. Truesdell) (1959) pp. 125–263 Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Milton C. Lopes Filho
Departamento de Matematica, IMECC-UNICAMP.
Caixa Postal 6065, Campinas, SP 13081-970, Brasil
E-mail address: mlopes@@ime.unicamp.br

Nir Cohen
Departamento de Matematica Aplicada, IMECC-UNICAMP.
Caixa Postal 6065, Campinas, SP 13081-970, Brasil
E-mail address: nir@@ime.unicamp.br