MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$31 – dezembro 2001 – pp. 127–141

O Princípio do Máximo para Equações Parabólicas em uma Dimensão Espacial[1]

Jussara Matos Moreira e Gastão A. Braga

Resumo

Neste trabalho forneceremos a prova do princípio do máximo, na sua forma fraca, para a equação de difusão (ou do calor). Daremos um argumento, baseado na segunda lei da termodinâmica, que indica porque se deve esperar que esse princípio seja verdadeiro. Através de um exemplo, verificaremos que a positividade da constante de difusão é necessária para que o princípio seja válido. Baseados nesta conclusão, estenderemos esse princípio para uma classe de equações diferenciais parciais cujos coeficientes dependam da posição, desde que esses coeficientes satisfaçam a uma certa condição. Entre as aplicações, obteremos a unicidade de soluções de um problema de valor de contorno para uma versão generalizada da equação do calor não homogênea. Também obteremos uma cota superior para o ganho máximo de capital num mercado de ações regido pela equação de Black-Sholes. Além disto, provaremos um princípio do máximo para soluções estritamente positivas da equação dos meios porosos.

[1]Trabalho premiado na VIII Semana de Iniciação Científica da UFMG, de 13 a 18 de setembro de 1999. Projeto parcialmente financiado pelo programa PET do Departamento de Física da UFMG.

1 Introdução

Consideremos o problema da difusão de calor numa barra metálica de comprimento l. O processo dinâmico que descreve a propagação do calor entre dois pontos quaisquer da barra é modelado por uma equação diferencial parcial, conhecida como *equação do calor*:

$$u_t = k\Delta u. \tag{1}$$

Na equação acima, $u = u(x,t)$ é a temperatura no ponto x da barra e no instante t. k é a condutividade térmica do material que compõe a mesma. É comum assumir que k é uma constante positiva, como faremos na primeira parte deste trabalho. Posteriormente, permitiremos que a condutividade térmica dependa da posição, isto é, $k = k(x)$, mas manteremos a condição de positividade $k(x) > 0 \ \forall \ x$[1]. Como estaremos estudando um problema unidimensional [2], isto é, $x \in \mathbb{R}$, então o operador Laplaciano Δ se reduz a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Soluções da equação (1) estão bem definidas para valores positivos do tempo t e as mesmas podem ser determinadas explicitamente, tanto para o problema de valor de contorno (em que a temperatura é mantida fixa nas extremidades da barra mas pode assumir qualquer valor no seu interior [1]) quanto para o problema de valor inicial (em que a barra tem comprimento "infinito" e a distribuição inicial de temperatura é qualquer [2]), sendo essas soluções suaves. Partindo deste fato (existência de soluções suaves), o nosso objetivo neste trabalho será provar o *Princípio do Máximo* para a equação do calor e estender esse resultado para equações um pouco mais gerais do que a equação (1).

O princípio do máximo pode ser entendido como uma conseqüência da segunda lei da termodinâmica. Segundo essa lei, o calor se propaga de regiões de temperaturas mais altas para regiões de temperaturas mais baixas, isto é, a propagação é sempre na direção contrária ao gradiente de temperatura. Com isto, temperaturas mais altas tendem a diminuir

[1] A equação (1) também é dita *equação de difusão*. Neste caso, $u(x,t)$ representa a densidade de um líquido que se difunde num substrato enquanto que k representa a constante de difusão do mesmo.

[2] Cumpre notar que os resultados enunciados neste trabalho podem ser estendidos para a equação do calor em $\mathbb{R}^n$.

e temperaturas mais baixas tendem a aumentar, à medida que o tempo passa. Suponha, então, que a distribuição inicial (no tempo $t = 0$) de temperatura na barra metálica seja descrita por uma função $f(x)$ e que a temperatura máxima inicial (isto é, o máximo de $f(x)$) ocorra num ponto do interior da barra. Baseado na segunda lei da termodinâmica, somos levados a concluir que, com o passar do tempo, o novo valor máximo da temperatura deverá ser menor do que aquele valor inicial, a não ser que existam fontes externas de calor (refletidas matematicamente como condições de contorno adicionadas à equação) colocadas nas extremidades da barra. Essas fontes poderiam fazer com que a temperatura naquela extremidade da barra, num certo momento posterior ao momento inicial, fosse maior do que a temperatura máxima inicial, embora esse novo valor máximo não possa ocorrer no interior da barra. Portanto, somos levados à conclusão de que o valor máximo da temperatura ou ocorre no tempo inicial ou ocorre nas extremidades da barra. Numa linguagem matemática, a descrição qualitativa dada acima se reduz ao teorema enunciado abaixo e cuja prova se encontra na próxima seção. Para enunciar o teorema, definiremos por $\mathcal{R}$ a região semiaberta $\mathcal{R} \equiv \{(x,t)/0 < x < l \text{ e } 0 < t \leq T\}$. Sejam $\overline{\mathcal{R}}$ e int$\mathcal{R}$ o fecho e o interior de $\mathcal{R}$.

Teorema 1.1 *Seja $u(x,t)$ uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ tal que u_t, u_x e u_{xx} sejam definidas em $\mathcal{R}$ e contínuas em int$\mathcal{R}$. Se $u(x,t)$ é não constante e satisfaz a equação do calor (1) em $\mathcal{R}$, então o máximo valor de $u(x,t)$ em $\overline{\mathcal{R}}$ ocorre somente em $t = 0$ e $0 \leq x \leq l$, ou em $x = 0$ e $0 \leq t \leq T$, ou em $x = l$ e $0 \leq t \leq T$.*

Ou seja, o ponto de máximo de $u(x,t)$ só poderá estar na base ou nas laterais do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, incluindo os vértices, e em nenhum outro lugar, a não ser que u seja constante. Isso é válido também para o valor mínimo e, para prová-lo, basta aplicar o princípio do máximo para $-u(x,t)$. Cumpre notar que provaremos a versão fraca do teorema (1.1), isto é, provaremos que o máximo de $u(x,t)$ é atingido, com certeza, na base ou nas laterais do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, embora deixemos sem responder (afirmativamente) que o valor máximo não pode ser atingido nem no topo e nem no interior do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$. A nossa prova é a mesma prova dada por Strauss na referência [2] e similar à dada por Fritz John na referência [3]. A prova da versão forte do princípio do máximo pode ser encontrada na referência clássica de Protter e Weimberger [4].

Na próxima seção provaremos o teorema (1.1). Na seção 3 daremos um exemplo para o fato de que se k não for constante e assumir valores negativos em algum subintervalo, então o princípio do máximo pode deixar de valer, isto é, o valor máximo pode ocorrer no "topo" da região $\mathcal{R}$. Nas seção 4 estenderemos o argumento dado na seção 2 para outras equações parabólicas. Na seção 5 daremos algumas aplicações do teorema (1.1) e de sua extensão, teorema (4.1). Finalmente, na seção 6, provaremos o princípio do máximo para uma equação não linear.

2 A prova do princípio do máximo para a equação do calor

Por hipótese, $u(x,t)$ é contínua no conjunto compacto $\overline{\mathcal{R}}$. Portanto, existe pelo menos um ponto de $\overline{\mathcal{R}}$ onde $u(x,t)$ assume o seu valor máximo. Por outro lado, sabe-se que se o ponto de máximo for um ponto do interior do retângulo, então as derivadas primeiras se anulam e as derivadas segundas devem ser nulas ou negativas nesse ponto. Se u_{xx} não for nula, isto é, $u_{xx} < 0$, então, como $u_t = 0$, teríamos $u_t \neq ku_{xx}$, isto é, a equação do calor (1) não seria satisfeita no ponto de máximo, o que seria um absurdo já que $u(x,t)$ é solução. Portanto, não poderia existir um ponto de máximo no interior do retângulo, mas somente nas bordas, sob a hipótese $u_{xx} < 0$. Dessa maneira, só nos faltaria mostrar que o máximo $u(x,t)$ não pode ocorrer na fronteira superior $t = T$ do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$. É claro que esse argumento não é rigoroso pois, infelizmente, não se pode assegurar que $u_{xx} < 0$ no ponto de máximo. Portanto, são necessárias outras argumentações.

A seguir provaremos que, se M representa o valor máximo de $u(x,t)$ na base $t = 0$ e nas laterais $x = 0$ e $x = l$ do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, então $u(x,t) \leq M$ para todos os pontos de $\overline{\mathcal{R}}$.

É importante observar que o nosso argumento não proíbe a ocorrência de um ponto de máximo interior. Contudo, ele garante que $u(x,t)$ não ultrapassa em módulo o seu valor máximo obtido sobre a fronteira $t = 0$, $x = 0$. Fazendo-se $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$ com ε sendo uma constante positiva, se for possível provar que $v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2$ dentro do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, então, $u(x,t) \leq M + \varepsilon(l^2 - x^2) \leq M + \varepsilon l^2$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, pode-se escolher ε tão pequeno quanto se queira e, então, $u(x,t) \leq M$ dentro de $\overline{\mathcal{R}}$. Por hipótese, tem-se $v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2$ em $t = 0$, $x = 0$ e $x = l$. Além disso, para todo $(x,t) \in \mathcal{R}$, $v_t - kv_{xx} = u_t - k(u_{xx} + 2\varepsilon) = u_t - ku_{xx} - 2k\varepsilon$. Como $u_t = ku_{xx}$, então:

$$v_t - kv_{xx} = -2k\varepsilon < 0, \tag{2}$$

já que $k, \varepsilon > 0$. Supondo que $v(x,t)$ atingisse um máximo num ponto interior (x_0, t_0) com $0 < x_0 < l$ e $0 < t_0 < T$, isso implicaria que $v_t = 0$ e $v_{xx} \leq 0$ no ponto. Mas, se isso fosse verdade teríamos que $v_t - kv_{xx} = -kv_{xx} \geq 0$, o que contradiz o cálculo anterior. Assim, não pode haver um ponto de máximo interior para $v(x,t)$.

Suponha agora que $v(x,t)$ tivesse um máximo no topo do retângulo $\mathcal{R}$, ou seja, em $t = T$ e $0 < x < l$. Por hipótese, u_t, u_x e u_{xx} estão bem definidas em $\mathcal{R}$. Segue que v_t, v_x e v_{xx} também estão bem definidas em $\mathcal{R}$ (entendemos por u_t e v_t em $t = T$ como sendo a derivada lateral de u quando t tende para T por valores menores do que T). Portanto $v_x = 0$ e $v_{xx} \leq 0$ no ponto considerado, denominado (x_0, T), onde também podemos afirmar que $v(x_0, T)$ é maior que $v(x_0, T - \delta)$ para valores positivos e pequenos de δ. Portanto:

$$v_t(x_0, T) = \lim_{\delta \to 0} \frac{v(x_0, T) - v(x_0, T - \delta)}{\delta} \geq 0 \tag{3}$$

isto é, $v_t(x_0, T)$ é não negativo. Esta informação, juntamente com as desigualdades $v_{xx}(x_0, T) \leq 0$ e $k > 0$, nos fornece que $v_t - kv_{xx} \geq 0$, o que contradiz (2). Portanto, concluímos que não pode haver ponto de máximo de $v(x,t)$ no topo do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$. Ainda assim, $v(x,t)$ tem que ter um ponto de máximo em algum local do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, já que esse é um conjunto fechado e limitado, e, portanto, compacto, e já que $v(x,t)$ é contínua nesse retângulo. Por exclusão, esse ponto de máximo deve estar na base ou nas laterais. Conseqüentemente, para todo $(x,t) \in \overline{\mathcal{R}}$ teremos: $v(x,t) \leq$ máximo de $v(x,t)$ sobre a base e laterais $\leq M + \varepsilon l^2$. Assim, concluímos que $u(x,t) \leq M$, o que prova a versão fraca do princípio do máximo para a equação do calor.

3 Um exemplo da não validade do princípio do máximo

A seguir, daremos um exemplo de uma equação em que a condutividade térmica k depende de x e para a qual o princípio do máximo não se aplica. Considere a seguinte modificação da equação (1):

$$u_t = xu_{xx}, \tag{4}$$

onde $k = k(x) = x$. É fácil verificar que $u(x,t) = -2xt - x^2$ é solução da equação. Por outro lado, localizemos os pontos críticos de $u(x,t) = -2xt - x^2$ dentro do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$ dado por $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1$. Esses pontos são determinados pelas condições (veja a referência [5]):
$\frac{\partial u}{\partial t} = -2x = 0$,
$\frac{\partial u}{\partial x} = -2t - 2x = 0$,
cuja solução é o ponto $(0,0)$ e que fornece $u(0,0) = 0$. Como esse ponto se encontra no bordo do retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, isto significa que u não tem pontos críticos no interior de $\mathcal{R}$. Mas como existe um ponto de máximo global, pois u é uma função contínua no compacto $\overline{\mathcal{R}}$, esse ponto só pode estar sobre a fronteira. Então, resta saber se existe algum ponto (x_0, t_0) na fronteira $t = 1$[3] que seja o ponto de máximo global. Para determiná-lo, olhemos para a restrição de u sobre a fronteira:
em $t = 0, \rightarrow u(x,0) = -x^2 < 0$,
em $t = 1, \rightarrow u(x,1) = -2x - x^2$,
cujo máximo ocorre em $x = -1$ e que fornece $u(-1,1) = 1$. Observando que nas fronteiras laterais $x = 2$ e $x = -2$ a função $u(x,t)$ é sempre menor ou igual a zero pois $u(2,t) = -4(t+1) \leq -4$ e $u(-2,t) = 4(t-1) \leq 0$, concluímos que o ponto de máximo ocorre no topo do retângulo, no ponto $x = -1$ e $t = 1$, infringindo o princípio do máximo para a equação dada.

4 Generalização do princípio do máximo

É interessante entender porque o princípio do máximo não se aplica à equação (4) da seção 3. No apêndice A deste trabalho, repetimos os

[3]se o máximo de u ocorresse em uma das outras componentes da fronteira não teríamos nenhuma contradição com o princípio do máximo.

passos da prova do teorema (1.1) e verificamos que o mesmo argumento não se aplica pois a função $k(x) = x$ não mantém o seu sinal no intervalo $-2 \leq x \leq 2$. A seguir, consideraremos funções $k(x)$ estritamente positivas. Sob esta hipótese seremos capazes de provar o princípio do máximo usando os mesmos argumentos da seção 2. Considere a seguinte equação:

$$u_t = k(x)u_{xx} + b(x)u_x, \tag{5}$$

definida na região $\mathcal{R}$, definida por $0 < x < l$, $0 < t \leq T$. Além das hipóteses do teorema (1.1) sobre u e suas derivadas parciais, também assumiremos que $k(x) > 0$ em $0 < x < l$. Sob estas hipóteses e sob uma hipótese adicional no coeficiente $b(x)$, verificaremos que o teorema (1.1), quando enunciado para soluções da equação (5), é verdadeiro e admite uma prova idêntica à prova dada para a equação do calor. Espera-se que a equação acima também tenha um princípio do máximo porque, já que $u_x = 0$ no ponto crítico, a parcela $b(x)u_x$ se anula no ponto de máximo e por isto não afeta a análise de sinais necessária para a dedução do princípio. De novo, assumiremos a existência de soluções suaves de (5). Fazendo-se $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$,

$$v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x = u_t - k(x)u_{xx} - b(x)u_x - 2\varepsilon k(x) - 2\varepsilon x b(x)$$

$$-2\varepsilon[k(x) + xb(x)],$$

para todo (x,t) em $\mathcal{R}$. Portanto, $v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x$ será estritamente negativo se exigirmos que $k(x) + xb(x) > 0$ para todo x no intervalo $0 < x < l$. Dessa maneira a análise da seção 2 é válida: se $v(x,t)$ atingisse um máximo no interior, teríamos $v_t = 0$, $v_x = 0$ e $v_{xx} \leq 0$ no ponto, o que forneceria $v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x \geq 0$. Mas essa desigualdade contradiz a desigualdade $v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x < 0$, desde que $k(x) + xb(x) > 0$. Portanto, não pode haver um ponto de máximo no interior de $\mathcal{R}$. Por outro lado, se $v(x,t)$ atingisse um máximo no topo: $v_x(x_0,T) = 0$, $v_{xx}(x_0,T) \leq 0$ e

$$v_t(x_0,T) = \lim_{\delta \to 0} \frac{v(x_0,T) - v(x_0,T-\delta)}{\delta} \geq 0,$$

e assim teríamos $v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x \geq 0$, o que de novo contradiz a desigualdade $v_t - k(x)v_{xx} - b(x)v_x < 0$. Portanto, não pode haver um ponto de máximo no topo. Dessa forma, para $k(x) + xb(x) > 0$, o princípio do máximo na sua forma fraca é verificado para soluções da equação $u_t = k(x)u_{xx} + b(x)u_x$. A seguir enunciamos a forma forte desse resultado:

Teorema 4.1 *Seja $u(x,t)$ uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ tal que u_t, u_x e u_{xx} sejam definidas em $\mathcal{R}$ e contínuas em int$\mathcal{R}$. Se $u(x,t)$ é uma solução não constante da equação (5) na região $\mathcal{R}$ e se os coeficientes de (5) são funções contínuas e satisfazem às condições:*
i) $k(x) > 0$ se $x \in (0,l)$
ii) $k(x) + xb(x) > 0$ se $x \in (0,l)$,
então o máximo valor de $u(x,t)$ ocorre somente em $t = 0$ e $0 \leq x \leq l$, ou $x = 0$ e $0 \leq t \leq T$ ou em $x = l$ e $0 \leq t \leq T$.

5 Aplicações

Daremos, a seguir, algumas aplicações do teorema (4.1). Na seção 5.1 obteremos a unicidade de soluções de um problema de valor de contorno. Na mesma seção também mostraremos que a positividade do dado inicial se mantém ao longo do tempo (permanência do sinal). Na seção 5.2 aplicaremos o nosso teorema para obter cotas superiores para soluções da equação de Black-Sholes. Essa equação é usada para modelar o comportamento do ganho de capital num mercado financeiro com ações cujos preços evoluam estocasticamente com o tempo.

5.1 Unicidade de soluções de um problema de valor de contorno

Uma das aplicações clássicas do Princípio do Máximo é a prova da unicidade de soluções de um problema de valor de contorno. Consideremos um problema não homogêneo que possa ser reduzido a uma situação em que o teorema (4.1) possa ser aplicado:

$$u_t - k(x)u_{xx} - b(x)u_x = F(x,t) \quad x \in (0,l) \quad t > 0 \tag{6}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \;\; \forall \;\; 0 \leq t,$$

onde f, F, k e b são funções suaves o bastante para garantir a existência de soluções do problema de contorno (é suficiente assumir que essas funções sejam contínuas). Se u_1 e u_2 são duas soluções do problema acima, considere as diferenças $u_1 - u_2$ e $u_2 - u_1$. Ambas são soluções do seguinte problema de contorno no retângulo $(0, l) \times (0, T]$, para qualquer $T > 0$:

$$u_t = k(x)u_{xx} + b(x)u_x \quad x \in (0, l) \quad T \geq t > 0 \tag{7}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \ \ \forall \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Supondo que b e k satisfaçam as hipóteses do teorema (4.1), podemos aplicá-lo ao problema acima para concluirmos que, como o máximo sobre a fronteira é nulo já que $u(x, 0) = 0$ para $x \in (0, l)$ e $u(0, t) = u(l, t) = 0$ para $0 \leq t \leq T$, as desigualdades $u_1 - u_2 \leq 0$ e $u_2 - u_1 \leq 0$ são simultaneamente satisfeitas para todo $x \in [0, l]$ e $t \in [0, T]$, seguindo daí que $u_1 = u_2$ no retângulo $[0, l] \times [0, T]$. Em particular, se $b(x) = 0$ e $k(x) = k > 0$, então a equação (6) se reduz à equação do calor com um termo de "fonte" $F(x, t)$. Dessa maneira obtemos a unicidade de soluções de um problema de valor de contorno para a equação do calor.

Uma característica de equações que satisfazem ao Princípio do Máximo é a permanência do "sinal" do dado inicial para o problema de contorno (7), isto é, se o dado inicial $f(x)$ é não negativo, então a solução da equação será não negativa para qualquer tempo posterior ao tempo inicial. Reciprocamente, mostraremos na última seção destas notas que se assumirmos a existência de soluções positivas de certas equações então podemos provar um Princípio do Máximo para as mesmas. A seguir, considere o problema de contorno (6) e suponha que $F(x, t)$ seja identicamente nula e que o dado inicial $f(x)$ seja não negativo. Então o mínimo de $u(x, t)$ sobre a fronteira do retângulo $[0, l] \times [0, T)$ é não negativo e, portanto, segue do Princípio do Máximo que $u(x, t) \geq 0$ no retângulo $[0, l] \times [0, T]$. Em particular, se u_1 e u_2 são soluções do problema (6) com dado inicial $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in (0, l)$, então $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$ no retângulo $[0, l] \times [0, T]$, seja qual for $T > 0$. Esta última afirmação segue da afirmação anterior, bastando considerar o problema de contorno (6) para a diferença $u_1 - u_2$, com dado inicial $f(x) - g(x) \geq 0$.

5.2 Uma cota superior para soluções da equação de Black-Sholes

A equação de Black-Sholes apareceu no início dos anos 70, no trabalho seminal [6], dos economistas F. Black and M. Sholes, que rendeu a R. Merton e M. Sholes o prêmio Nobel de Economia de 1997. Essa equação descreve o valor final (ganho ou perda de capital) de um certo produto financeiro num mercado com ações e com aplicações rendendo a taxa de juros fixa e/ou rendendo dividendos. Essa equação é de natureza estocástica, isto é, o ganho de capital tem uma componente aleatória devido à incerteza no valor da ação no tempo t. Esse tópico se desenvolveu muito nos últimos anos graças à contribuição de matemáticos e de físicos-matemáticos e hoje em dia já existem equações bem mais sofisticadas e que fornecem uma melhor modelagem do mercado de capitais. O nosso objetivo aqui não é discutir a origem e aplicações da equação, o que pode ser visto em [7]. Veja também [8] para uma dedução da solução da equação para dados iniciais polinomiais e veja [9] para uma introdução ao assunto.

A seguir nós aplicaremos o teorema da seção 5 para determinar uma cota superior sobre o ganho financeiro máximo num mercado de capitais regido pela equação de Black-Sholes, dada a seguir, e com a "direção do tempo" devidamente invertida:

$$u_t = \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx} + (r-\delta) x u_x - ru \quad x \geq 0 \tag{8}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = 0 \;\; \forall \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Na equação acima, u representa o ganho de capital no tempo t e no valor x da ação. As constantes σ, r e δ são positivas e o significado das mesmas não será discutido aqui. Multiplicando-se a equação pela exponencial de rt, podemos eliminar o termo linear em u e reescrever a equação como ($v = u \exp[rt]$):

$$v_t = \frac{\sigma^2 x^2}{2} v_{xx} + (r-\delta) x v_x, \tag{9}$$

que está na forma da equação do teorema (4.1), onde $k(x) = \frac{\sigma^2 x^2}{2}$ e $b(x) = (r-\delta)x$. A primeira condição do teorema é satisfeita pela função

$k(x)$ pois $k > 0$ para qualquer $x \neq 0$. A segunda condição, dada por $k(x) + xb(x) > 0$, é satisfeita desde que $\frac{\sigma^2}{2} + (r - \delta) > 0$, pois $x > 0$ no intervalo $(0, l)$, l positivo. Portanto, concluímos do teorema que $v(x,t) \leq N$, para todo $x \in [0,l]$ e para todo $t \in [0,T]$, onde N é o máximo de v sobre a fronteira. Se M é o máximo de u sobre a fronteira, podemos reescrever essa cota superior como

$$u(x,t)e^{rt} \leq \sup\{u(x,t)e^{rt} \text{ na fronteira}\} \leq Me^{rT},$$

isto é,

$$u(x,t) \leq Me^{r(T-t)},$$

desde que $\frac{\sigma^2}{2} + (r - \delta) > 0$.

6 O princípio do máximo para a equação dos meios porosos

Positividade de soluções e o princípio do máximo são assuntos intimanente relacionados. Além disto, o princípio do máximo não é privilégio das equações lineares. Consideraremos, a seguir, uma equação não linear e provaremos uma versão fraca desse princípio para a mesma, sob a hipótese de existência de soluções positivas.

Considere a equação $u_t = (u^m)_{xx}$, $m > 1$, conhecida como *equação dos meios porosos* [10]. Se $m = 1$, recuperamos a equação do calor, cuja velocidade de propagação de sinais é infinita, refletindo a sua natureza parabólica, ao contrário do que acontece com a equação da onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, cuja velocidade de propagação de sinais é finita e igual a c. Uma das características interessantes da equação dos meios porosos, com $m > 1$, é que os sinais têm velocidade finita de propagação. Esta propriedade é comum às equações hiperbólicas, como ressaltado acima para a equação da onda, e ela ocorre porque a "constante de difusão", neste caso, é a solução u, que pode se anular em regiões do espaço-tempo, fazendo com que a velocidade de propagação de informação seja finita. Se u se mantém estritamente positiva em alguma região do espaço-tempo, é de se esperar que um princípio do máximo seja válido nessa região. Então a equação $u_t = (u^m)_{xx}$, para $m > 1$, possui características de equações hiperbólicas ou de equações parabólicas, dependendo dos valores de u [11]. Mostraremos, a seguir, que é possível redefinir a função auxiliar

$v(x,t)$, usada nas seções anteriores, para provar um princípio do máximo para a equação dada, desde que u seja estritamente positiva. Lembremos que $\mathcal{R}$ denota a região semiaberta

$\{(x,t)/0 < x < l \ \text{e} \ 0 < t \leq T\}$, enquanto que $\overline{\mathcal{R}}$ e int$\mathcal{R}$ denotam o seu fecho e interior, respectivamente.

Teorema 6.1 *Se $u(x,t)$ é uma solução estritamente positiva da equação $u_t = (u^m)_{xx}$, $m > 1$, contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e tal que suas derivadas parciais primeira e segunda estão bem definidas em int$\mathcal{R}$ e são contínuas em $\mathcal{R}$, então os extremos de u ocorrem ou na base ou nas laterais de $\overline{\mathcal{R}}$.*

Prova: Seja $v \equiv (u^m + \epsilon x^2)^{1/m}$ a m-ésima raiz positiva de $u^m + \epsilon x^2$. Então v está bem definida e é estritamente positiva pois $v^m = u^m + \epsilon x^2 \geq u^m > 0$ em $\overline{\mathcal{R}}$. Além disto,

$$v_t - (v^m)_{xx} = v_t - m(m-1)v^{m-2}v_x^2 - mv^{m-1}v_{xx}.$$

Quando calculada num ponto crítico $p = p_c$ de v, a igualdade acima se reduz a

$$v_t(p_c) - (v^m)_{xx}(p_c) = -mv^{m-1}(p_c)v_{xx}(p_c). \tag{10}$$

Se p_c é ponto de máximo local, então (10) nos fornece que

$$v_t(p_c) - (v^m)_{xx}(p_c) \geq 0. \tag{11}$$

Por outro lado, como $mv^{m-1}v_t = (v^m)_t = (u^m + \epsilon x^2)_t = mu^{m-1}u_t$, concluímos que

$$v_t = \frac{u^{m-1}}{v^{m-1}}u_t. \tag{12}$$

Portanto u_t e v_t se anulam nos mesmos pontos já que u e v são ambas estritamente positivas. Usando que u é solução da equação dada e usando a última igualdade, obtemos

$$v_t - (v^m)_{xx} = \frac{u^{m-1}}{v^{m-1}}u_t - (u^m)_{xx} - 2\epsilon \tag{13}$$

$$(\frac{u^{m-1}}{v^{m-1}} - 1)u_t + u_t - (u^m)_{xx} - 2\epsilon(\frac{u^{m-1}}{v^{m-1}} - 1)u_t - 2\epsilon. \tag{14}$$

Calculando (13) num ponto crítico p_c de v obtemos $v_t(p_c) - (v^m)_{xx}(p_c) = -2\epsilon < 0$, o que contradiz a desigualdade (11) quando p_c é um ponto de máximo local. Argumento similar vale quando p_c é um ponto do topo de $\overline{\mathcal{R}}$, se o devido cuidado for tomado com relação à derivada lateral com respeito a t. Se M é o máximo de u sobre a base e as laterais de $\overline{\mathcal{R}}$, então $v^m \leq$ (máximo de v sobre a base e as laterais)$^m \leq M^m + \epsilon l^2$, isto é, $u^m \leq M^m + \epsilon(l^2 - x^2)$. Como ϵ é arbitrário, segue da última desigualdade que $u \leq M$ em $\overline{\mathcal{R}}$.

Para o estudo do mínimo, defina v como a m-ésima raíz positiva de $u^m + kt$, onde $k > 0$. Então $v_t = \frac{mu^{m-1}u_t+k}{mv^{m-1}}$ e segue daí que

$$v_t - (v^m)_{xx} = \frac{mu^{m-1}u_t + k}{mv^{m-1}} - (u^m)_{xx} =$$

$$(\frac{mu^{m-1}}{mv^{m-1}} - 1)u_t + \frac{k}{mv^{m-1}} + u_t - (u^m)_{xx} = (\frac{mu^{m-1}}{mv^{m-1}} - 1)u_t + \frac{k}{mv^{m-1}}.$$

Como, num ponto crítico p_c de v, sabemos que $0 = mu^{m-1}(p_c)u_t(p_c)+k$, obtemos:

$$v_t(p_c) - (v^m)_{xx}(p_c) = (\frac{mu^{m-1}}{mv^{m-1}} - 1)(-\frac{k}{mu^{m-1}}) + \frac{k}{mv^{m-1}}\frac{k}{mu^{m-1}} > 0.$$

Por outro lado, calculando (10) num ponto de mínimo, onde $v_{xx}(p_c) \leq 0$, obtemos $v_t(p_c) - (v^m)_{xx}(p_c) \leq 0$, uma contradição com o exposto acima. Então concluímos que não há ponto de mínimo interior. Da mesma maneira concluímos que não há ponto de mínimo no topo. Se M é o mínimo de u na base e nas laterais, então $v^m \geq$ (min de v sobre a base e as laterais)$^m \geq min(u^m) + 0 = M^m$, isto é, $u \geq M$ em $\overline{\mathcal{R}}$.

$\square$

Observação O teorema (6.1) admite uma extensão para soluções positivas de equações do tipo $u_t = [f(u)]_{xx}$, onde f é uma função positiva com derivada positiva para valores de u positivos. A prova do teorema é similar à dada acima. A função auxiliar v será igual à função $f^{-1}(.)$ calculada no ponto $f(u(x,t)) + \epsilon x^2$, no caso de um ponto de máximo local. Para um ponto de mínimo, use como v o valor de $f^{-1}(.)$ no ponto $f(u(x,t)) + kt$.

7 Apêndice A

Na seção 3 concluímos que o princípio do máximo não se aplica à equação (4). Portanto, o procedimento usado na segunda seção não se aplica às soluções dessa equação. Neste apêndice procuramos entender a razão porque tal procedimento não pode funcionar. Dessa maneira seremos capazes de estender os resultados da seção 2. Então, supondo que alguma solução u de (4) tenha pelo menos um ponto de máximo interno ao retângulo $\overline{\mathcal{R}}$, teremos, em tal ponto crítico:

$$\begin{cases} 0 = u_t - xu_{xx} = -xu_{xx} \geq 0 & se \quad x \leq 0 \\ 0 = u_t - xu_{xx} = -xu_{xx} \leq 0 & se \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

Concluímos daí que se existe tal ponto de máximo interior, então u_{xx} é necessariamente nulo para valores de x não nulos. Neste caso, um ponto de máximo só poderia ser "sentido" através de derivadas de ordem superior a dois. Além disto, fazendo-se $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$, teremos $v_t - xv_{xx} = u_t - xu_{xx} - 2\varepsilon x = -2\varepsilon x$, pois $u_t - xu_{xx} = 0$. Assim, em qualquer ponto (x,t) do retângulo $\mathcal{R}$:

$$v_t - xv_{xx} \begin{cases} < 0, & \text{se} \quad x > 0 \quad (1) \\ > 0, & \text{se} \quad x < 0 \quad (2) \\ = 0, & \text{se} \quad x = 0 \quad (3) \end{cases} \tag{16}$$

Supondo que $v(x,t)$ atingisse um máximo num ponto interior (x_0, y_0), então $v_t = 0$ e $v_{xx} \leq 0$ no ponto. Assim:

$$v_t - xv_{xx} \begin{cases} \leq 0, & \text{se} \quad x < 0 \quad (4) \\ \geq 0, & \text{se} \quad x > 0 \quad (5) \\ = 0, & \text{se} \quad x = 0 \quad (6) \end{cases} \tag{17}$$

Concluímos que (4) contradiz (2) e (5) contradiz (1), isto é, se x é estritamente maior do que 0 ou se x é estritamente menor do que 0, somos levados às mesmas conclusões da seção 2, mas ainda pode acontecer de x ser igual a 0 e aí nada podemos afirmar. Isto é, temos um problema na reta $x = 0$ onde a função $k(x) = x$ troca de sinal, mas se $k(x) > 0$ ou $k(x) < 0$ não há nenhuma contradição. Por outro lado, se k é uma constante negativa, sabemos que a equação do calor (1) não tem solução para valores positivos de t. Então somos levados à seguinte conclusão: se quisermos usar o mesmo raciocínio da seção 2 para provarmos o princípio do máximo para equações mais gerais do que a equação do calor, é necessário que $k(x)$ seja estritamente positivo.

Referências

[1] Boyce e DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno*, sexta edição, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, (1998).

[2] Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley, New York, (1992).

[3] Fritz John, *Partial Differential Equations*, fourth edition Springer-Verlag, New York, (1982).

[4] M. Protter and H. Weimberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1969).

[5] R. C. Buck, *Advanced Calculus*, third edition, McGraw Hill, New York, (1978).

[6] F. Black and M. Sholes, *The price of options and corporate liabilities* , Journal of Political Economy, **81**, 637-659, (1973).

[7] P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howinson, *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*, Cambridge University Press, (1995).

[8] Gastão A. Braga and Fred Furtado, *Scale Invariant Solutions to the Valuation of European Options*, artigo em preparação.

[9] Antônio Aguirre e Gastão A. Braga, *A Equação do Calor e sua Utilização em Matemática Financeira*, artigo em preparação.

[10] Aronson, D. G., *The Porous Media Equation*, in Lecture Notes in Mathematics **1224** (*Nonlinear Diffusion Problems*, Montecantini Terme 1985), edited by A. Fasano and M. Primiciero, Springer Verlag, Berlin, (1986).

[11] A. Bertozzi, *The Mathematics of Moving Contact Lines in Thin Films*, Notices of AMS, 689-697, June/July (1998).

Departamento de Matemática-UFMG
Caixa Postal 702
Belo Horizonte, MG, Brazil
gbraga@mat.ufmg.br