

Acerca de um problema encontrado numa exposição de divulgação Matemática

Daniel Ferreira,¹
Carla Gageiro¹, António Guedes de Oliveira, Joana
Pereira¹ e Clara Ribeiro¹

Resumo

Apresenta-se a solução do seguinte problema: Considerando a distância entre dois pontos de um prisma recto de base quadrada como o comprimento do caminho mais curto à superfície do prisma, qual é o ponto mais afastado de um vértice dado? Esta solução obtém-se partindo de uma dada planificação do prisma, através de um resultado muito simples.

1 O Problema da Formiga

Reproduz-se à frente o enunciado de um problema que pode ser encontrado numa exposição patente no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, e que foi retirado da página da internet de endereço <http://www.atractor.pt/matviva/geral/PF/PF.html>.

A página foi criada e é mantida pela entidade que organizou a exposição, a *Associação Atractor - Matemática Interactiva*, que tem por finalidade essencial a criação, manutenção e o desenvolvimento de um

¹Finalista da Licenciatura em Matemática da Universidade do Porto – Ramo Educacional, em estágio na Escola Secundária Almeida Garrett no ano 2001/02.

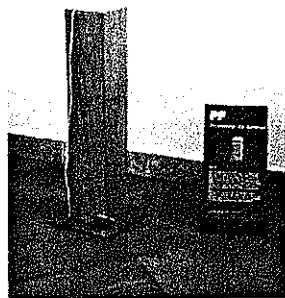
centro interactivo, o *Centro de Ciência Viva de Ovar*, dedicado à Matemática; todo o material exposto virá a integrar o futuro Centro.

Aqui apresentamos a resolução (sob a forma encontrada pelo terceiro autor) que foi já objecto de duas comunicações realizadas pelos restantes autores, a primeira inserida no *Ciclo de Divulgação Matemática*, organizado pelo Centro de Matemática da Universidade do Porto para um público geral, a segunda no *Encontro Regional do Norte e Centro* da Sociedade Portuguesa de Matemática, realizado no Porto em Maio de 2002. É nossa intenção aqui alargar o âmbito desta divulgação, porque se, por um lado, o problema tem em si (como têm em geral os módulos daquela exposição) os encantos de ser baseado numa situação física e de ser simples de formular e de entender, a que se acrescenta o facto de parecer ter uma óbvia solução — que facilmente se verifica *fisicamente* que não o é afinal —, por outro lado também a “verdadeira solução” encontra aqui uma explicação que não deixa de surpreender pela sua simplicidade, uma vez encontrada a “linguagem” certa, neste caso a planificação que se define à frente.

Eis o enunciado:

A superfície do bloco de madeira mostrado na fotografia é “o mundo” onde vive uma formiga imaginária, que, quando se desloca entre dois pontos quaisquer, escolhe sempre, de entre todos os caminhos possíveis, um mais curto.

Uma ponta do fio está presa junto de um dos vértices - A - da base do paralelepípedo. Tente, com a ajuda do fio e para vários pares de pontos, encontrar os caminhos mais curtos unindo os dois pontos de cada par. Descubra, em particular, um caminho mais curto unindo o vértice A ao vértice que lhe é diametralmente oposto, na face de cima e note que esse caminho não atravessa a face superior.



Tente imaginar qual é, para a formiga, o ponto P mais afastado de A e verifique, com a ajuda do fio, se a sua resposta está correcta. Para isso, comece por apertar com os dedos o fio (esticado) junto ao ponto P ; se a sua resposta estiver correcta, deve poder chegar com esse bocado de fio a todos os outros pontos da superfície (porque estão mais perto de A).

O presente texto é acompanhado de figuras criadas quer pelo programa *The Geometer's Sketchpad* quer pelo *Mathematica*, e existe uma versão abreviada, interactiva, ligada à página referida do Projecto Atractor, em <http://www.atractor.pt/matviva/geral/formiga/formi2/frames.html>.

2 Notação e resultados básicos

Fixemos a notação que vamos utilizar:

Representamos em geral os pontos (do espaço ou de um plano) por letras latinas maiúsculas, A , B , P , etc. O segmento que tem por extremidades os pontos A e B será denotado $[AB]$ e o seu comprimento \overline{AB} . Admitimos que A seja igua a B (sendo então $[AB] = \{A\}$). Por definição, $[P_1P_2 \cdots P_k] = \cup_{i=1}^{k-1} [P_iP_{i+1}]$, \overline{AB} representa a semi-recta de origem A que passa por B e $\text{Med}[AB]$ designa a *mediatriz do segmento* $[AB]$, isto é, a recta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

Já os outros elementos, como as rectas e os comprimentos, serão em geral representados por uma letra latina minúscula, com excepção das amplitudes dos ângulos, representadas por uma letra grega minúscula. Em particular, p é o prisma considerado, h e l a altura e o lado da base quadrada de p , respectivamente. *Só consideramos neste artigo o caso em que $h > l$.* Para o caso em que $h \leq l$ pode-se consultar a secção 5.

Finalmente, como é habitual, por caminho numa superfície dada entendemos a imagem de uma *função contínua, injectiva, de $[0, 1]$ na superfície*, sendo as imagens de 0 e 1 as extremidades do caminho.

Basearemos a nossa prova no seguinte resultado elementar:

Proposição 2.1 *Dados dois pontos distintos, A e B , e os dois semi-planos definidos pela mediatriz do segmento $[AB]$, um ponto P pertence ao mesmo semi-plano que A se e só se dista de A menos do que de B .*

Sem provar o resultado completamente (partindo de uma axiomática do plano) vejamos como justificá-lo utilizando alguns resultados cuja prova se encontra facilmente em manuais e utilizando directamente o seguinte:

Princípio (de Pasch) 2.2 *O complementar de uma recta r no plano consiste em duas regiões (chamadas semi-planos de r) tais que dois pontos pertencem à mesma região se e só se o segmento que os une não intersecta a recta.*

Suponhamos então provado que:

- (1) a mediatriz de um segmento de recta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos ($P \in \text{Med}[AB]$ se e só se $\overline{AP} = \overline{BP}$);
- (2) $\overline{RS} \leq \overline{RQ} + \overline{QS}$ em geral e $\overline{RS} = \overline{RQ} + \overline{QS}$ se e só se $Q \in [RS]$.

Dado um ponto P no mesmo semi-plano de $\text{Med}[AB]$ que A , existe um ponto de intersecção de $[BP]$ com a dita mediatriz, pelo referido princípio — uma vez que B pertence ao outro semi-plano. Seja I esse ponto. Temos que:

$$\overline{AP} \stackrel{(2)}{<} \overline{AI} + \overline{IP} \stackrel{(1)}{=} \overline{BI} + \overline{IP} \stackrel{(2)}{=} \overline{BP}.$$

Por outro lado, se P não pertence ao semi-plano que contém A então ou está na mediatriz ou pertence ao semi-plano que contém B . No primeiro caso, $\overline{AP} = \overline{BP}$, por (1); no segundo, $\overline{BP} < \overline{AP}$, pelo que vimos. Ou seja, se $\overline{AP} < \overline{BP}$ então P pertence ao semi-plano que contém A . Assim se conclui o raciocínio.

Chamamos Princípio de Pasch ao princípio referido, embora este não seja exactamente o axioma apresentado por Pasch na sua obra "Vorlesungen über neuere Geometrie" [5], que esteve na origem das modernas axiomáticas ditas euclidianas, tendo influenciado tanto Hilbert como Peano [3]. Por exemplo, Hilbert incluiu o axioma de Pasch (na sua versão original) na sua obra fundamental *Grundlagen der Geometrie* (Cf. [1]) — sob a seguinte forma: *Sejam três pontos, A , B e C , não colineares e seja a uma recta do plano ABC que não passa por nenhum dos três pontos; se a recta a intersecta $[AB]$ então também intersecta um dos segmentos $[AC]$ ou $[BC]$.*

Esclareçamos um pouco porque é que o nosso Princípio decorre deste Axioma (consultar também, numa perspectiva diferente, [2], Introdução e Apêndice). Note-se que por “região do plano” se entende um subconjunto não-vazio do plano qualquer; aqui será cada uma das classes de equivalência da relação \mathcal{R} definida no complementar da recta r pela condição:

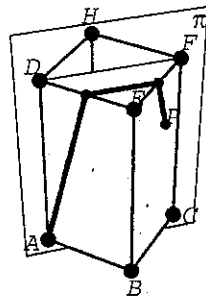
$$A \mathcal{R} B \text{ se e só se } [AB] \cap r = \emptyset.$$

Como esta relação é claramente reflexiva e simétrica, e é transitiva por força do axioma citado de [1], define de facto classes de equivalência. Há pelo menos duas classes, porque, dados um ponto A numa classe e um ponto B em r , um ponto C da recta definida por A e B tal que B está entre A e C (que existe pelos axiomas de ordem) não está em relação com A , por definição. Finalmente, não há mais do que duas classes porque se pode provar que r não pode intersectar simultaneamente $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$ (ver [1], p. 5 e Suplemento I.1, de P. Bernays).

Vejamos agora como é que o Axioma decorre do Princípio (Cf. [4]): Suponhamos que a recta a intersecta $[AB]$ mas não $[AC]$ nem $[BC]$. Então A pertence à mesma região do plano definida por a que C ; mas também B pertence a essa região. Mas então A e B pertencem à mesma região, o que contradiz o facto de que a recta a intersecta $[AB]$.

3 Uma planificação diferente do prisma

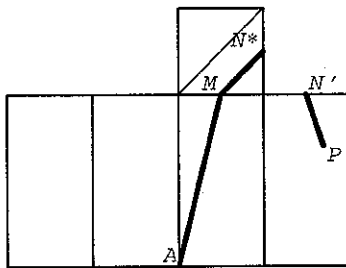
Fixemos um vértice da base inferior de p . Será este o ponto correspondente àquele onde se prendeu a corda no modelo — o ponto A relativamente ao qual se procura outro, S , na superfície do prisma, com a seguinte propriedade: *dados um caminho c entre A e S e um ponto P , quaisquer, na mesma superfície, existe um caminho de A a P que tem o comprimento de c ou que é mais curto*. Considere-se ainda o plano π que passa por A , é perpendicular à base inferior e bissecta p . Na figura ao lado representamos solidamente uma das partes iguais em que π divide p .



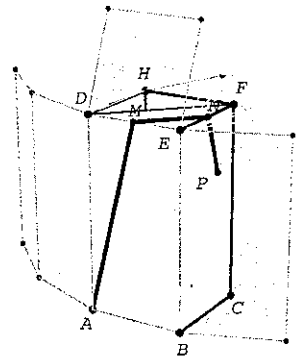
Vamos então resolver este problema com base em *planificações* da superfície s composta pelas faces laterais e pela face superior de p . Vejamos o que entendemos por isso: Consideremos um par, (F, ϕ) , em que:

- $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ é um conjunto finito de polígonos (fechados) no espaço, cujas intersecções, dois a dois, consistem ou numa aresta ou num vértice ou no conjunto vazio. Além disso, $f = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$ é uma figura (poligonal) conexa *plana*. Chamamos a f um planificação de s ;
- $\phi : f \rightarrow s$ é uma função (*a função da planificação*) tal que a restrição de ϕ a f_i , $\phi|_{f_i}$, é um deslocamento no espaço para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Na figura em baixo, à esquerda, representa-se a primeira planificação da superfície s de p (excluída a face inferior), que designaremos precisamente por f . Aqui $k = 5$, sendo F composto por quatro rectângulos e um quadrado.



$\phi \rightarrow$



Note-se que, em geral, não havendo confusão — isto é, sendo único o ponto com determinada imagem por ϕ — denotamos do mesmo modo o ponto e a imagem, isto é, P e $\phi(P)$, para $P \in f$. Em geral, também, a imagem por ϕ de um caminho em f é um caminho em s com o mesmo comprimento, uma vez que é a soma dos comprimentos dos subcaminhos contidos em cada $\phi(f_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, e $\phi|_{f_i}$ é uma isometria. Mas pode haver caminhos em s que não sejam imagens por ϕ de caminhos em f . Na figura, este é o caso do caminho poligonal $[A M N P]$, que tem como imagem inversa por ϕ o conjunto $[A M N^*] \cup [N' P]$ (em f) — que não contém nenhum caminho de A a P . Em f o caminho mais curto entre

A e outro ponto é o segmento de recta; poderá haver em s um caminho através da face superior mais curto do que $\phi([AP])$? Veremos mais tarde que não, sendo $h > l$; entretanto, vejamos que o caminho mais curto pela face lateral é de facto $\phi([AP])$:

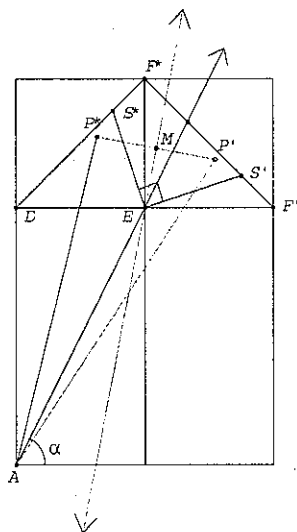
Seja f' a união dos quatro rectângulos de f , que dividimos em f'_e e f'_d , constituídos respectivamente pelos dois rectângulos à esquerda e pelos dois rectângulos à direita de A , seja $s' = \phi(f')$ a superfície lateral de p e $\phi' : f' \rightarrow s'$ tal que $\phi'(P) = \phi(P)$ para todo $P \in f'$. f' é uma planificação de s' , claro. Vejamos que a podemos usar para *medir distâncias em s'* : Os únicos caminhos em s' que não são imagens de caminhos em f' são os que atravessam a aresta vertical de p oposta à de A , isto é, os que não estão contidos em $\phi'(f'_e)$ nem em $\phi'(f'_d)$. Dos outros, o mais curto é $\phi[AP]$: se $\phi(c)$ fosse mais curto para um determinado caminho c em f' de A a P , c seria igualmente mais curto que $[AP]$, o que é absurdo. Mas para todo o caminho que atravessa a referida aresta existe outro de igual comprimento integralmente contido em $\phi'(f'_d)$, que pode ser obtido reflectindo no plano π a parte do caminho contida em $\phi'(f'_e)$.

Vamos criar uma nova planificação de s , \tilde{f} , que tem esta propriedade de *medir distâncias em s* . Antes, vamos trabalhar com uma terceira, \tilde{f} (a partir da qual criaremos \tilde{f}), usando de novo a reflexão em π . Seja \tilde{s} a superfície de um dos semi-prismas (de novo sem a base inferior) em que π divide p , e t a face superior de \tilde{s} , um triângulo rectângulo. \tilde{f} , que será uma planificação de \tilde{s} , é composta de t^* e t' , duas cópias de t , e dos dois rectângulos que constituíam f'_d . Cada triângulo partilha um cateto com um rectângulo e o outro com o outro triângulo. A função de planificação $\tilde{\phi}$ fica bem determinada por enviar as hipotenusas de t^* e t' na hipotenusa de t , e os rectângulos adjacentes nas faces laterais adjacentes. Então, um ponto P de t tem dois representantes em \tilde{f} , um em t^* , denotado P^* , o outro em t' , P' , e cada um destes pontos pode ser obtido do outro através de uma rotação de 90° em torno de E , correspondente ao vértice oposto à hipotenusa de t (ver figura em baixo).

Vejamos como calcular em \tilde{f} a distância de A a um ponto P qualquer de t . Primeiro, note-se que um caminho que cruze duas vezes a mesma aresta pode claramente ser encurtado, substituindo o caminho entre dois cruzamentos sucessivos pela parte da aresta entre eles, e qualquer

caminho numa mesma face (incluindo arestas) pelo segmento de recta entre os extremos. Assim, um caminho de comprimento mínimo entre A e P cruza uma única vez uma única das arestas superiores, partilhadas com t^* e t' , respectivamente, dos rectângulos de f ; só pode então ser $\tilde{\phi}([AP^*])$ ou $\tilde{\phi}([AP'])$ — só se considerando o segundo caso se $[AP']$ não cruzar a aresta superior à esquerda. Assim, o comprimento mínimo de um caminho de A a P é o menor de entre $\overline{AP^*}$ e $\overline{AP'}$, comprimentos de $\tilde{\phi}([AP^*])$ e $\tilde{\phi}([AP'])$, respectivamente. Note-se que, pela Proposição 2.1, $\overline{AP^*} < \overline{AP'}$ se A estiver do lado da mediatriz de $[P^*P']$ de P^* , e que $\overline{AP^*} > \overline{AP'}$ se A estiver do lado da mediatriz de $[P^*P']$ de P' .

Já $\overline{AP^*} = \overline{AP'}$ quando A está exactamente na mediatriz. Seja α a amplitude do ângulo orientado que a semi-recta \overrightarrow{AE} faz com $\overrightarrow{EF'}$; $\alpha > 45^\circ$ já que $h > l$. Seja ainda M o ponto médio de $[P^*P']$ e β a amplitude do ângulo orientado $\angle MEF'$. Então $\overline{AP^*} \leq \overline{AP'} \iff \beta \geq \alpha$, correspondendo a igualdade à igualdade. Sejam S^* e S' os pontos nas hipotenusas de t^* e t' , respectivamente, tais que quer a recta ES^* quer a recta ES' formam com a diagonal $[AE]$ ângulos de 45° ; como é recto o ângulo $\angle S^*ES'$, estes pontos são os representantes de um determinado ponto S de t . Além disso, neste caso é $\beta = \alpha$, já que M estará na recta AE . Finalmente, seja D o vértice da aresta vertical que termina em A .



Em conclusão, $\overline{AP^*} \leq \overline{AP'}$ se e só se $P^* \in [DS^*E]$ e $\overline{AP^*} \geq \overline{AP'}$ se e só se $P' \in [ES'F']$; ou seja, dos dois pontos que representam um ponto dado em t , o que indica o caminho mais curto do ponto A é o que está na zona mais escura da figura.

Para finalizar, concluamos a prova de que o comprimento mínimo de um caminho em s de A a um ponto P de uma face lateral de p é o comprimento do segmento de recta que une A a P na planificação. Para isso, como vimos, basta ver que os caminhos de A a P que passam

pela face superior são mais longos do que este; isto é óbvio se a face lateral em causa for a que contém o próprio A . Para a outra face, o que há é que comparar \overline{AP} com o comprimento do segmento de recta que une A a \hat{P} , sendo \hat{P} o ponto que forma com P um ângulo de vértice E de 90° , medidos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio: De facto, qualquer caminho nas condições referidas pode ser medido numa planificação que, relativamente a f , substitua o triângulo à direita por outra cópia da face lateral em questão, rodada 90° conforme indicado atrás. Sendo $h > l$, é fácil ver, atendendo à posição de A relativamente à mediatriz de $[P\hat{P}]$, que o ponto P está mais próximo de A que o ponto \hat{P} .

Vejam agora em que consiste a planificação *final* \hat{f} : consiste nos dois rectângulos inferiores de \tilde{s} , nos dois triângulos $[DS^*E]$ e $[ES'F']$ (mais escuros, na figura), e nas cópias destes quatro polígonos obtidas por reflexão na recta vertical que passa por A . Pelo que vimos, \hat{f} tem a seguinte propriedade: *Dado um ponto qualquer do prisma, a sua distância a A — o comprimento de um caminho mais curto — é o comprimento do segmento de recta que une os representantes de A e do ponto na planificação, isto é, é a distância que se mede nesta.*

4 Solução do problema

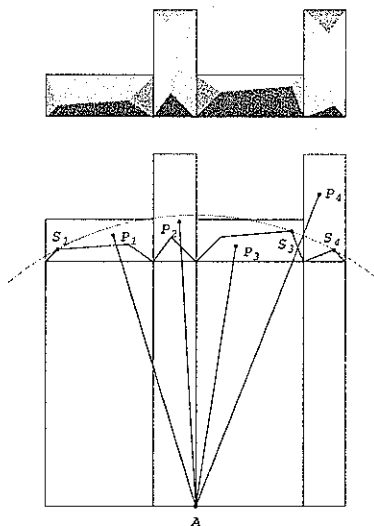
A solução do problema é agora muito simples, bastando decidir qual dos pontos da planificação está mais distante de A . Antes notemos que, dado um ponto exterior a um polígono, O , o ponto do polígono mais afastado de O é necessariamente um vértice. De facto, se r é a distância de O ao vértice do polígono que lhe está mais afastado, a circunferência de centro O e raio r contém todos os vértices do polígono e por isso contém todo o polígono. Assim, os candidatos a ponto mais afastado de A em \hat{f} serão D , S^* ou S' , E e F' (e os seus simétricos pela reflexão atrás definida).

Notando a posição de A e desses pontos relativamente às mediatrizes dos lados dos triângulos $[DS^*E]$ e $[ES'F']$, concluímos que: *O ponto do prisma mais afastado de A é F ou S , conforme A esteja acima ou abaixo da mediatriz de $[S'F']$ — ou seja, conforme $l < h \leq 2l$ ou $h \geq 2l$, respectivamente.*

5 Aplicações do mesmo método

Podemos também resolver de forma análoga outros problemas do mesmo tipo. Se, por exemplo, considerarmos o problema inicial para um paralelepípedo qualquer, não necessariamente de base quadrada, podemos proceder de modo semelhante: fixamos uma base, aquela que tem as duas menores dimensões. Uma vez que deixa de haver a simetria inicial (por reflexão no plano), teremos de considerar à partida quatro representantes para cada ponto da face superior (Ver figura em baixo).

Isto significa que teremos que considerar, para cada par de faces laterais, as duas cópias da face superior que partilham a respectiva aresta superior, e decidir qual é em cada cópia a parte que contém o representante a menor distância. Se as duas cópias diferem de uma rotação de α em torno de um ponto X , essas partes são determinadas na cópia da face superior por uma recta que passa por X e que faz com $[AX]$ um ângulo com amplitude $\frac{\alpha}{2}$. Note-se que duas cópias adjacentes diferem de novo numa rotação de 90° , mas duas não adjacentes diferem numa rotação de 180° .



No fim, em cada cópia, só se considera a parte que contém os representantes a menor distância relativamente a todas as outras cópias, por intersecção das figuras obtidas pelo método descrito atrás.

Apresentamos em cima a solução de um problema deste tipo — S , o ponto do paralelepípedo correspondente aos pontos da planificação na intersecção das figuras das faces superiores com o arco marcado — obtida pelo processo atrás descrito.

Referências

- [1] Hilbert, D.: *Foundations of Geometry*, traduzido do alemão por L. Unger, Open Court, La Salle, Ill., 1997.
- [2] Iversen, B.: *Hyperbolic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, **25**, Cambridge University Press, (1992).
- [3] Kennedy, H.C.: "The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano", *Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 133-136.
- [4] Moise, E.E.: *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 3^a Ed., Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., (1990).
- [5] Pasch, M.: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2^a Ed., com "Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung", de M. Dehn, Verlag von Julius Springer, Berlin (1926).

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Praça Gomes Teixeira
P-4099-002 Porto
e-mail: agoliv@fc.up.pt