MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº33 – dezembro 2002 – pp.65–82

Resíduos: de Abel a Grothendieck

Marcio G. Soares

1 Introdução

Esse texto versa sobre uma verdadeira jóia da Matemática, um teorema de Abel no qual uma visão geométrica do conceito de resíduo é apresentada. Julguei oportuno escrever sobre esse assunto por três razões: a primeira é a beleza do resultado em si, a segunda é sua utilidade e, por fim, prestar uma modesta homenagem a esse genial matemático norueguês, nascido há exatos duzentos anos.

Me permito iniciar com uma curta biografia de Niels Henrik Abel (1802-1829) que conviveu, ao longo de sua curta vida, com um ambiente de pobreza e de discriminação profissional. Quando seu pai faleceu, Abel tinha dezoito anos e se viu face ao desafio de sustentar sua mãe e seus seis irmãos. Apesar das adversidades, conseguiu terminar seus estudos universitários e logrou obter um financiamento junto ao governo norueguês para viajar pela Europa, em busca de contatos com seus colegas matemáticos e da consolidação de sua reputação como matemático. Essa viagem foi uma enorme desilusão para Abel, pois muito de seu trabalho foi ignorado e mesmo repudiado por grandes matemáticos da época, entre eles Gauss e Cauchy. Retornou a Christiania (como Oslo era chamada na época) tuberculoso e pobre e não obteve, em seu próprio país, o reconhecimento que lhe garantiria uma posição como professor universitário. Ironicamente, pouco antes de sua morte, aos 27 anos de idade, recebeu a notícia de sua nomeação como professor da Universidade de Berlim. Houve quem disse que a contribuição por ele legada motivaria pesquisas em Matemática por pelo menos 500 anos e, de fato, isso ocorreu durante os séculos XIX e XX. Ainda restam três séculos pela frente; quem viver verá!

A referência para a obra matemática de Abel é [A1] [A2]. Já o leitor interessado em sua biografia deve consultar [Stu].

Essas notas pressupõem alguma familiaridade com a teoria elementar de funções de uma variável complexa, em nível de um curso básico de graduação. Elas estão assim organizadas: inicialmente realizo uma rápida jornada pelos resultados básicos necessários à compreensão do teorema de Abel; em seguida passo ao resultado propriamente dito e, ao final, discorro sobre uma generalização extremamente importante do teorema de Abel, devida a A. Grothendieck, que na década de 50 do século XX introduziu o conceito de resíduo pontual em dimensões superiores.

Finalmente, agradeço aos organizadores dessa primeira Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática por seu trabalho de excelente qualidade.

2 Resultados básicos

Nessa seção simplesmente apresento, sem demonstrações, os resultados elementares que serão utilizados. Esse material pode ser encontrado em, por exemplo, [Sc].

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. A derivada de f no ponto $p \in U$, denotada por $f'(p)$, é o número complexo

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

desde que esse limite exista. f é *holomorfa* em U se $f'(p)$ existe em todos os pontos $p \in U$.

Recorde que um *domínio* é um subconjunto de $\mathbb{C}$ que é aberto e conexo. O teorema seguinte é uma versão simplificada do teorema de Cauchy mas, por abuso, me refiro a ele como tal.

Antes disso uma breve definição. Um caminho suave por partes e fechado, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, é *simples*, se a aplicação γ que o define é injetiva, exceto pelos pontos 0 e 1, ou seja, $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma(t) \neq \gamma(0)$, $0 < t < 1$ e $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ se $0 < t_1 \neq t_2 < 1$. Isso quer dizer que o caminho não possui auto-interseções. Uma *curva de Jordan suave por partes* é um caminho suave por partes, fechado e simples. Um teorema não trivial, devido inicialmente a Jordan, que deu uma demonstração incompleta, mais tarde corrigida por Veblen, afirma que uma curva de Jordan divide o plano em exatamente duas componentes conexas, uma limitada e a outra ilimitada, sendo a curva a fronteira comum a ambas.

Teorema 2.1 (Cauchy) *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Seja $V \subset U$ um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, $\partial V = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$, e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Oriente os caminhos que compõem a fronteira de V de tal modo que V esteja sempre à esquerda ao se percorrer esses caminhos. Então*

$$\int_{\partial V} f(z)dz = 0.$$

Outro resultado que admite um enunciado bem mais geral é o

Teorema 2.2 (Fórmula Integral de Cauchy) *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que o disco fechado $\overline{\mathbb{D}}_\epsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \| z - p \| \leq \epsilon\}$ está inteiramente contido em U. Se $\mathbb{S}_\epsilon(p)$ denota sua fronteira, o círculo $\mathbb{S}_\epsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \| z - p \| = \epsilon\}$, orientada no sentido anti-horário, e se z é um ponto qualquer no interior de $\overline{\mathbb{D}}_\epsilon(p)$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_\epsilon(p)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

□

Esses dois resultados constituem a base para o estudo de funções holomorfas. Por exemplo, segue da Fórmula Integral de Cauchy (2.2) o

Corolario 2.3 *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, onde U é um domínio. Então f tem derivadas de todas as ordens em todos os pontos de U e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_\epsilon(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dz \qquad \forall z \in U,$$

onde $\mathbb{S}_\epsilon(z)$ *é qualquer círculo centrado em* z*, percorrido no sentido anti-horário e tal que o disco* $\overline{\mathbb{D}}_\epsilon(z)$ *está contido em* U*.* □

Uma função é *analítica* se, para cada ponto de seu domínio, pode ser expressa através de uma série de potências centrada nesse ponto e convergente num disco aberto. Uma propriedade notável das funções analíticas é a seguinte: *se* f *é analítica numa vizinhaça de um ponto* p *e* $f(p) = 0$*, então* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \neq p$ *numa vizinhança de* p*, a menos que* f *seja a função identicamente nula.* Em outras palavras, *os zeros de uma função analítica não identicamente nula são isolados.*

Usando a Fórmula Integral de Cauchy (2.2) e o corolário acima pode-se concluir que uma função holomorfa é analítica, mais precisamente:

Teorema 2.4 *Sejam* $f : U \to \mathbb{C}$ *uma função holomorfa, onde* U *é um domínio e* $z_0 \in U$ *um ponto qualquer. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ou seja, f *é dada por sua série de Taylor de centro em* z_0 *e portanto é uma função analítica. Além disso, essa série converge em qualquer disco (aberto)* $\mathbb{D}_r(z_0) \subset U$*, isto é, o raio de convergência* R *da série acima é a menor entre as distâncias de* z_0 *aos pontos da fronteira de* U*.* □

Por outro lado, uma vez que uma série de potências pode ser derivada termo a termo e que a série assim obtida converge no domínio de convergência da série original, concluímos que uma função analítica é holomorfa.

Recorde que, se f é uma função holomorfa, um ponto a é uma *singularidade* (isolada) de f se existe um disco $\mathbb{D}_r(a)$, centrado em a, tal que f é holomorfa em todo o disco, exceto no ponto a. A Fórmula Integral de Cauchy (2.2) permite obter uma descrição do comportamento de f em torno de um tal ponto, através do conceito de série de Laurent.

Primeiro um pouco de notação. Se ρ_1 e ρ_2 são números reais satisfazendo $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ e a é um número complexo, o *anel* $A(a, \rho_1, \rho_2)$ é o conjunto aberto definido por

$$A(a, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < \| z - a \| < \rho_2\}.$$

$A(a, \rho_1, \infty)$ denota o anel ilimitado $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < \| z - a \|\}$. Observe que $A(a, 0, \rho_2) = \mathbb{D}_{\rho_2}(a) \setminus \{a\}$. O anel fechado $\bar{A}(a, \rho_1, \rho_2)$ é o conjunto fechado

$$\bar{A}(a, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq \| z - a \| \leq \rho_2\}$$

e $\bar{A}(a, \rho_1, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq \| z - a \|\}$.

O teorema a seguir é muito útil pois é o primeiro passo no estudo das singularidades isoladas de funções complexas.

Teorema 2.5 (Expansão de Laurent) *Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$. Então*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sendo que a série $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m}$ converge absolutamente fora do disco fechado $\overline{\mathbb{D}}_{\rho_1}(a)$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge absolutamente no disco $\mathbb{D}_{\rho_2}(a)$. Além disso, essa expansão é única e os coeficientes b_m e a_n são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{m-1}\, dz \quad , \quad m \geq 1$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \quad , \quad n \geq 0$$

onde γ é um círculo de centro em a, orientado no sentido anti-horário e contido em $A(a, \rho_1, \rho_2)$. □

A expansão de Laurent permite dividir as singularidades isoladas em três categorias radicalmente distintas. Suponha que f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$ e considere sua série de Laurent em torno de a:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Definição 2.6 *a é singularidade removível de f se $b_m = 0$ para $m \geq 1$. a é polo de ordem k de f se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m > k$. a é singularidade essencial de f se $b_m \neq 0$ para uma infinidade de valores de m.*

Os resultados seguintes elucidam o comportamento de uma fun-ção em torno de uma singularidade isolada:

Proposição 2.7 *Suponha que f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*
(i) a é singularidade removível de f.
(ii) existe o $\lim_{z \to a} f(z)$.
(iii) $|f|$ é limitado em algum anel $A(a, 0, \delta) \subset A(a, 0, \rho)$. □

Corolario 2.8 *Se $b_m \neq 0$ para algum $m \geq 1$, então $|f|$ é ilimitado em qualquer disco de centro em a.* □

Quanto aos polos vale a

Proposição 2.9 *Suponha que f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$. Então, a é um polo de ordem k de f se, e somente se, $\lim_{z \to a} (z - a)^k f(z)$ existe e é um número complexo não nulo.* □

Corolario 2.10 *Se f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$ e a é polo de ordem k de f então $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$.* □

Já em torno de uma singularidade essencial, o comportamento de uma função holomorfa é incontrolável. Para se ter uma idéia, um teorema devido a Picard afirma que, *se a é singularidade essencial de f, holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$ então, dado qualquer $0 < r \leq \rho$, a imagem por f do anel $A(a, 0, r)$, $f(A(a, 0, r))$, é todo o plano $\mathbb{C}$, com a possível exceção de no máximo um ponto!*

Exemplos dos três tipos de singularidades isoladas são dados por:

$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, $z \neq 0$. $f(z)$, em princípio, não está definida apenas em $z = 0$ porém, lembrando que

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2iz + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(iz)^n - (-iz)^n}{n!}\right) = z + \frac{1}{2i}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(iz)^n - (-iz)^n}{n!}$$

temos, para $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 + \frac{1}{2i}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(iz)^{n-1} - (-iz)^{n-1}}{n!}.$$

Agora, a série de potências acima representa f para $z \neq 0$ e também está definida em 0. Dessa forma, f admite uma extensão holomorfa a todos os pontos de $\mathbb{C}$ e 0 é singularidade removível de f. Observe que é perfeitamente lícito escrever $f(0) = 1$.

Considere agora $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$. f tem duas singularidades isoladas, 2 e i e ambas são polos de f, sendo 2 um polo de ordem 2 e i um polo de ordem 1.

Por outro lado, $e^{1/z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}$ exibe uma singularidade essencial em 0.

3 Resíduos: o ponto de vista de Cauchy

O Teorema de Cauchy (2.1) afirma que, se o disco fechado $\overline{\mathbb{D}}_\epsilon(a)$ está inteiramente contido no domínio da função holomorfa f, então $\int_{\mathbb{S}_\epsilon(a)} f(z)\,dz = 0$. Como se modifica esse resultado caso f tenha singularidade isolada em a? Essa questão motiva a

Definição 3.1 *Se f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$, o resíduo de f em a, denotado por* $\operatorname{Res}_a(f)$, *é o coeficiente b_1 do termo $\dfrac{1}{z-a}$ de sua série de Laurent com centro em a.*

Essa definição é, à primeira vista, um tanto sêca. Veremos adiante que Abel forneceu uma visão geométrica do resíduo, no caso particular de polos.

O enunciado do Teorema dos Resíduos apresentado a seguir não é o mais geral, porém é suficiente para os objetivos dessas notas.

Teorema 3.2 (Resíduos de Cauchy) *Seja f uma função holomorfa num domínio $U \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Suponha que $\gamma \subset U \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada contém todos os pontos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \mathrm{Res}_{a_1}(f) + \mathrm{Res}_{a_2}(f) + \cdots + \mathrm{Res}_{a_m}(f).$$

□

Note que o teorema acima contém uma versão do Teorema de Cauchy (2.1), pois se f é holomorfa em todo o domínio U então não existem singularidades, portanto todos os resíduos são forçosamente nulos e concluímos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

A demonstração do teorema de Abel apresentada nessas notas não é a originalmente devida a ele. Optei por uma demonstração "moderna", que faz uso essencial da seguinte versão simplificada do chamado *Princípio do argumento*:

Teorema 3.3 (Princípio do argumento.) *Sejam f e h funções holomorfas num domínio $U \subset \mathbb{C}$. Seja $\gamma \subset U$ uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em U. Suponha que f não se anula ao longo de γ. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\xi_j} h(\xi_j)\, m_{\xi_j}(f)$$

onde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\ell$ são os zeros de f na região interior a γ e $m_{\xi_j}(f)$ é a multiplicidade de ξ_j como zero de f.

Prova: Antes de mais nada observe que o número de zeros de f na componente limitada determinada por γ é necessariamente finito. Pelo Teorema dos Resíduos (3.2), a integral acima é a soma dos resíduos da função $h(z)\,\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ na região interior a γ. Dado um ponto a nessa região temos duas possibilidades: (i) $f(a) \neq 0$, (ii) a é zero de multiplicidade m de f. O caso (i) fornece nada à integral acima pois o integrando possui resíduo nulo nesse ponto. Resta investigar (ii). Suponha então que a é zero de multiplicidade m de f, localizado no interior da região limitada determinada por γ. Nesse caso, num disco $\mathbb{D}_\delta(a)$, $0 < \delta << 1$, vale que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ onde $g(a) \neq 0$ e g é holomorfa. Por outro lado, $f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)$. Daí vem que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ é holomorfa em $\mathbb{D}_\delta(a)$ temos que essa é dada por uma série de potências $\dfrac{g'(z)}{g(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ e portanto

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Por outro lado, a função h tem expansão centrada em a dada por $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^n$. Multiplicando a igualdade acima ficamos com:

$$\begin{aligned} h(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{b_0\, m}{z-a} + m\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(z-a)^n + \\ &+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right]. \end{aligned}$$

Portanto, o resíduo de $h(z)\,\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ em a é $b_0\, m = h(a)\, m_a(f)$. □

4 Resíduos: o ponto de vista de Abel

Abel se dedicou, entre outros assuntos e falando um tanto vagamente, ao estudo de corpos de funções. Exemplos de tais objetos são as funções racionais (quocientes de polinômios) e, mais geralmente, quocientes de funções holomorfas.

Algumas considerações são necessárias para se trabalhar com quocientes de funções holomorfas. Antes de mais nada temos a

Definição 4.1 *Uma função f é meromorfa num domínio U se existe um subconjunto $\mathcal{P}$ de U tal que:*

(i) $\mathcal{P}$ é discreto.

(ii) f é holomorfa em $U \setminus \mathcal{P}$.

(iii) f possui um polo em cada ponto de $\mathcal{P}$.

Observe que essa definição exclui as singularidades essenciais, portanto, uma função meromorfa é aquela que possui apenas polos ou singularidades removíveis (como essas últimas são "falsas"singularidades, podemos ignorá-las e considerar apenas polos).

Proposição 4.2 *Localmente, uma função é meromorfa se, e somente se, é o quociente de duas funções holomorfas.*

Prova: O significado do termo "localmente"ficará claro ao longo da demonstração. Suponha que tenhamos uma função meromorfa f e seja a um de seus polos, digamos de ordem k. A expansão de Laurent centrada em a é

$$\frac{b_k}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{onde} \quad b_k \neq 0,$$

válida num pequeno anel $\mathbb{D}_\epsilon(a) \backslash \{a\}$. Como temos apenas um número finito de termos com potências negativas, reduzimos ao mesmo denominador e ficamos com:

$$\frac{b_k + b_{k-1}(z-a) + \cdots + b_1(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+k}}{(z-a)^k}.$$

Mas isso é o quociente $\frac{g(z)}{f(z)}$, em $\mathbb{D}_\epsilon(a)$, das funções holomorfas $g(z) = b_k + b_{k-1}(z-a) + \cdots + b_1(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+k}$ e $f(z) = (z-a)^k$.

Suponha agora que tenhamos um quociente de funções holomorfas $\frac{g(z)}{f(z)}$ e seja a um ponto em torno do qual f e g estão definidas. Escreva $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, expansões válidas simultaneamente num pequeno disco $\mathbb{D}_\epsilon(a)$. Se a_k é o primeiro coeficiente não nulo na série que define f, então

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^k \left[a_k + a_{k+1}(z-a) + \cdots + a_{k+m}(z-a)^m + \cdots\right] \\ &= (z-a)^k \phi(z) \end{aligned}$$

onde $\phi(z) = a_k + a_{k+1}(z-a) + \cdots + a_{k+m}(z-a)^m + \cdots$ é holomorfa em $\mathbb{D}_\epsilon(a)$. Análogamente temos que $g(z) = (z-a)^m \psi(z)$, com ψ holomorfa em $\mathbb{D}_\epsilon(a)$. Portanto,

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^m \psi(z)}{(z-a)^k \phi(z)} = (z-a)^{m-k} \frac{\psi(z)}{\phi(z)}.$$

Agora, $\frac{\psi(a)}{\phi(a)} = \frac{b_m}{a_k} \neq 0$ e concluímos que a função $\Theta(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$ é holomorfa num disco $\mathbb{D}_\delta(a) \subseteq \mathbb{D}_\epsilon(a)$. Seja então

$$\Theta(z) = \sum_{n=\ell}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sua expansão em série de potências em $\mathbb{D}_\delta(a)$. Ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{f(z)} &= (z-a)^{m-k} \Theta(z) \\ &= (z-a)^{m-k} \sum_{n=\ell}^{\infty} c_n (z-a)^n \\ &= \sum_{n=\ell}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m-k}. \end{aligned}$$

Essa é a expansão de Laurent de $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ em torno de a. Observe que temos um polo em a caso $\ell + m - k < 0$. $\square$

A demonstração acima deixa claro que, *se uma função tem uma singularidade essencial no ponto a, então ela não pode ser dada na forma $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ em nenhuma vizinhança de a, onde f e g são holomorfas.*

Vamos passar agora à preparação para se enunciar o Teorema de Abel. Como se trata de um resultado de natureza local, trabalharemos em vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}$.

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo 0 e h uma função meromorfa em U, com um polo de ordem k em 0, ou seja, $h : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $\lim\limits_{z \to 0} z^k\, h(z)$ existe e é um número complexo não nulo. Pela Expansão de Laurent (2.5), existe um disco de raio ρ centrado em 0, $\mathbb{D}_\rho(0) \subset U$ tal que, em $\mathbb{D}_\rho(0) \setminus \{0\}$ h se escreve:

$$h(z) = \frac{b_k}{z^k} + \cdots + \frac{b_1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \quad \text{onde} \quad \lim_{z \to 0} z^k\, h(z) = b_k \neq 0.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, como na Proposição 4.2, temos

$$h(z) = \frac{b_k + b_{k-1}\, z + \cdots + b_1\, z^{k-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{n+k}}{z^k} = \frac{g(z)}{f(z)} \tag{1}$$

com

$$\begin{aligned} &g(z) = b_k + b_{k-1}\, z + \cdots + b_1\, z^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{n+k} \\ &\text{e} \\ &f(z) = z^k. \end{aligned} \tag{2}$$

Como a expansão de Laurent de h é válida em $\mathbb{D}_\rho(0)$, vamos considerar $f(z) = z^k$ apenas nesse disco. Temos então que f satisfaz

$$f : \mathbb{D}_\rho(0) \to \mathbb{D}_{\rho^k}(0)$$

é sobrejetiva e aberta (essa última é uma propriedade satisfeita por qualquer função holomorfa de *uma* variável complexa). Seja $\zeta \in \mathbb{D}_{\rho^k}(0)$ um número complexo não nulo. Escreva ζ na forma polar, $\zeta = \varrho\, e^{i\theta}$. A pré-imagem de $\zeta \neq 0$ por f consiste de exatamente k pontos distintos, $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, que são as soluções da equação $z^k = \zeta$, dadas explicitamente por

$$\xi_j = \sqrt[k]{\varrho}\; e^{i\left(\dfrac{\theta + 2\pi(j-1)}{k}\right)}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Também temos que $f'(z) = k\, z^{k-1}$ e portanto, em cada um dos pontos ξ_j, $f'(\xi_j) = k\, \xi_j^{k-1} \neq 0$.

Recorde que $\mathrm{Res}_0(h) = b_1$.

Teorema 4.3 (Abel) *Sejam $\zeta \in \mathbb{D}_{\rho^k}(0)$ um número complexo não nulo e $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. Então:*

$$\mathrm{Res}_0(h) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{j=1}^{k} \frac{g(\xi_j)}{f'(\xi_j)}.$$

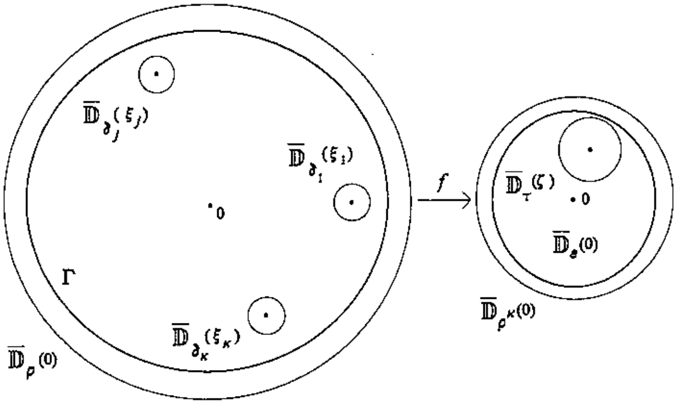
Observação: O ponto de vista de Cauchy é mais geral, no sentido que h pode ter singularidade essencial em 0 e o resíduo é dado por $\mathrm{Res}_0(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z)\, dz$, onde γ é um círculo centrado em 0 de raio menor que ρ. Entretanto, essa interpretação não se generaliza a dimensões superiores, ao passo que o ponto de vista de Abel sim, como será comentado mais adiante ao explorarmos a idéia de Grothendieck.

Prova: Comece escolhendo $0 < \epsilon << 1$ tal que o círculo $\Gamma = \{z : \| f(z) \| = \epsilon\}$ esteja contido em $\mathbb{D}_\rho(0)$ (observe que Γ é de fato o círculo $\mathbb{S}_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0)$, pois $f(z) = z^k$ e portanto $\| f(z) \| = \epsilon$ é o mesmo que $\| z^k \| = \epsilon$, ou seja, $\| z \| = \sqrt[k]{\epsilon}$). Em seguida escolha um ponto $\zeta \in \mathbb{D}_{\rho^k}(0) \setminus \{0\}$, de módulo pequeno o suficiente para que todas as suas pré-imagens, $\xi_1, \ldots, \xi_k$, estejam contidas no interior do círculo Γ. Para cada ponto ξ_j escolha um raio $\delta_j > 0$ tal que

(i) o disco fechado $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_j}(\xi_j)$ está inteiramente contido no interior do círculo Γ e $0 \notin \overline{\mathbb{D}}_{\delta_j}(\xi_j)$.

(ii) $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_i}(\xi_i) \cap \overline{\mathbb{D}}_{\delta_j}(\xi_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

A figura abaixo ilustra a situação.



A idéia genial de Abel aparece agora. Temos em mãos a função meromorfa $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$. Abel considerou uma *deformação holomorfa* de h, a saber, $h_w(z) = \dfrac{g(z)}{f(z) - w}$. Vamos trabalhar esse estalo de gênio.

Defina

$$\psi_j(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} \frac{g(z)}{f(z) - w}\, dz \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Aonde essas funções estão definidas? Observe que, se $w \neq 0$ então a equação $f(z) = w$ tem precisamente k soluções distintas e não nulas. Logo, se tomarmos w num disco suficientemente pequeno, $\mathbb{D}_\tau(\zeta)$, centrado em ζ, as soluções $z_1, \ldots, z_k$ de $f(z) = w$ satisfazem $z_j \in \mathbb{D}_{\delta_j}(\xi_j)$, portanto, o denominador do integrando que define ψ_j não se anula em $\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$ e ψ_j está bem definida. Além disso, as ψ_j são holomorfas em $\mathbb{D}_\tau(\zeta)$ já que podemos derivar sob o sinal de integral e obter

$$\psi_j'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} \frac{g(z)}{(f(z) - w)^2}\, dz.$$

Agora, ao longo dos caminhos $\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, k$, a derivada $f'(z)$ não se anula e é lícito escrever

$$\frac{g(z)}{f(z) - w} = \frac{g(z)}{f'(z)} \frac{f'(z)}{f(z) - w}.$$

Ponha $F_w(z) = f(z) - w$ e $G(z) = \dfrac{g(z)}{f'(z)}$. A derivada de F_w em relação a z é $F'_w(z) = f'(z)$. Portanto,

$$\frac{g(z)}{f(z) - w} = \frac{g(z)}{f'(z)} \, \frac{f'(z)}{f(z) - w} = G(z) \, \frac{F'_w(z)}{F_w(z)}$$

e as ψ_j assumem a forma

$$\psi_j(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} \frac{g(z)}{f(z) - w} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} G(z) \, \frac{F'_w(z)}{F_w(z)} \, dz$$

para $1 \leq j \leq k$. Em particular,

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} G(z) \, \frac{F'_\zeta(z)}{F_\zeta(z)} \, dz.$$

Essa integral é igual a $\sum G(p_i) \, m_{p_i}(F_\zeta)$ (pelo Princípio do Argumento (3.3)), onde a soma é sobre todos os zeros de F_ζ no interior de $\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$. Mas $F_\zeta(z) = f(z) - \zeta$ e o único zero dessa função no interior de $\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$ é ξ_j, que tem multiplicidade 1 pois $f'(\xi_j) \neq 0$. Logo,

$$\psi_j(\zeta) = G(\xi_j) = \frac{g(\xi_j)}{f'(\xi_j)}. \tag{4}$$

Mostramos que

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} \frac{g(\xi_j)}{f'(\xi_j)}. \tag{5}$$

As k funções $\psi_1, \ldots, \psi_k$ estão definidas numa vizinhança $\mathbb{D}_r(\zeta)$ que não contém 0 e, individualmente, não admitem extensão holomorfa a nenhum domínio que contenha 0 e ζ. Isso vem do fato que, num tal domínio, é sempre possível encontrar um ponto w_0 tal que $\sqrt[k]{w_0} \in \mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$ e nesse caso, o denominador do integrando que define ψ_j se anula sobre o caminho de integração $\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)$. Outra maneira de ver isso é notar que $f(z) = z^k$ admite a inversa local $f^{-1}(w) = \sqrt[k]{w}$ em torno de cada ponto $z \neq 0$, mas não admite inversa local em nenhum domínio que contenha 0. Entretanto, *a soma* $\sum_{j=1}^{k} \psi_j(w)$ *admite extensão holomorfa a um domínio que contém* 0. Vamos mostrar isso.

Defina a função *traço* por

$$\operatorname{Tr}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z^k - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{f(z) - w}\, dz. \tag{6}$$

Essa função está definida para w no disco aberto $\mathbb{D}_\epsilon(0)$, pois nesse domínio $f(z) - w \neq 0$ qualquer que seja $z \in \Gamma = \mathbb{S}_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0)$, e ela é claramente holomorfa nesse disco (derive sob o sinal de integral). O teorema de Cauchy (2.1) fornece

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{f(z) - w}\, dz & (7)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}_{\delta_j}(\xi_j)} \frac{g(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_{j=1}^{k} \psi_j(w). & (8) \end{aligned}$$

Portanto, Tr é uma extensão holomorfa da função $\sum_{j=1}^{k} \psi_j$. A terminologia "traço" vem daí, pois somamos sobre todas as k raízes de $z^k - w = 0$, e esse teorema é também conhecido como o *Teorema do Traço* de Abel. O final da demonstração do teorema é o seguinte:

$$\begin{aligned} &\lim_{\zeta \to 0} \sum_{j=1}^{k} \frac{g(\xi_j)}{f'(\xi_j)} = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{j=1}^{k} \psi_j(\zeta) = \lim_{\zeta \to 0} \operatorname{Tr}(\zeta) \\ &= \lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{f(z) - \zeta}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{f(z)}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(z)\, dz = \operatorname{Res}_0(h). \end{aligned}$$

□

Espero que o leitor tenha apreciado a beleza desse resultado.

5 Resíduos: o ponto de vista de Grothendieck

O ponto de vista de Abel sobre o resíduo de uma função meromorfa se presta admiravelmente bem a uma generalização em dimensões superiores. Me limito aqui a apresentar, sem demonstrações, as idéias básicas dessa construção. O leitor interessado deve consultar [G] ou [S].

Suponha que tenhamos uma aplicação holomorfa $f : W \to \mathbb{C}^n$, onde $W \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto conexo contendo $0 \in \mathbb{C}^n$, satisfazendo: $f(0) = 0$ e $f^{-1}(0) = \{0\}$ (essa última condição nos diz que 0 é um zero isolado de f). Sejam $V = f(W)$ e $U = f^{-1}(V)$. A partir de agora consideramos a aplicação (sobrejetiva)

$$f : U \longrightarrow V.$$

É possível mostrar que f é *aberta* e *própria*. Seja Jf sua matriz jacobiana

$$Jf = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Considere um valor regular $\zeta \neq 0$ de f, suficientemente próximo de 0 (um valor regular é um ponto tal que, para todo ponto p em sua pré-imagem vale $\det Jf(p) \neq 0$. O teorema de Sard nos diz que tais pontos são abundantes). É possível mostrar que o conjunto $f^{-1}(\zeta)$ é finito e que sua cardinalidade não depende do valor regular escolhido ζ. Na realidade, o número de pontos de $f^{-1}(\zeta)$ é o grau de Brouwer, digamos μ, da aplicação

$$\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^{2n-1}(0) \longrightarrow S_1^{2n-1}(0)$$

entre esferas euclidianas, onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Escreva então $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \ldots, \xi_\mu\}$ e seja $g : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa.

O *resíduo de Grothendieck* de g relativo a f, em 0, denotado $\mathcal{R}es(g, f, 0)$, é definido por:

$$\mathcal{R}es(g, f, 0) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{g(\xi_j)}{\det Jf(\xi_j)}.$$

Observe que, em dimensão 1, essa definição é precisamente a descoberta por Abel. Òbviamente, é necessário mostrar que o resíduo $\mathcal{R}es(g, f, 0)$ está bem definido e, para isso, existem generalizações, em dimensões superiores, do teorema do Traço. Ao final se chega a uma representação integral de $\mathcal{R}es(g, f, 0)$ que é a seguinte:

Seja Γ_ϵ o n-ciclo real $\Gamma_\epsilon = \{z \in U : |f_i(z)| = \epsilon_i, 1 \leq i \leq n\}$, com orientação prescrita declarando a n-forma $d \arg f_1 \wedge \cdots \wedge d \arg f_n$ positiva, onde $0 < \epsilon_i << 1$. Então

$$\mathcal{R}es(g,f,0) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{g\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}.$$

A motivação de Grothendieck para definir esse objeto fica evidente através do teorema de *Dualidade Local*:
$\mathcal{R}es(gh, f, 0) = 0$ *para toda função holomorfa* $h : U \to \mathbb{C}$ *se, e somente se,* g *está no ideal gerado pelas componentes de* f *(isso quer dizer que existem funções holomorfas* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *tais que* $g = \phi_1 f_1 + \cdots + \phi_n f_n$*).*

Além dessa importante propriedade cito apenas mais uma. Se $g = \det Jf$, então $\mathcal{R}es(\det Jf, f, 0)$ é o índice de Poincaré-Hopf, em 0, do campo holomorfo $X = f_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_n \dfrac{\partial}{\partial z_n}$.

Referências

[A1] Niels Henrik Abel, *Oeuvres complètes, Tome I* (com prefácio por L. Sylow e S. Lie), Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, viii+621 pp. ISBN 2-87647-073-X.

[A2] Niels Henrik Abel, *Oeuvres complètes, Tome II* (seguido de *Niels Hnrik Abel: sa vie et son action scientifique*, por C.-A. Bjerknes; editado com notas de L. Sylow e S. Lie), Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, vi+716 pp. ISBN 2-87647-073-X.

[G] Phillip A. Griffiths, Variations on a Theorem of Abel, *Inventiones Math.* **35** (1976), 321-390.

[S] M.G. Soares, *Lectures on point residues*, Monografias del IMCA n^o 28, ISBN 9972-899-090-8, IMCA, Perú (2002).

[So] M.G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, 2^a edição, Coleção Matemática Universitária, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, ISBN 85-244-0144-3, Rio de Janeiro (2001).

[Stu] Arild Stubhaug, *Niels Henrik Abel and his times. Called too soon by flames afar*, Springer-Verlag, Berlin, 2000. x+580 pp. ISBN 3-540-66834-9.

Dep. Matemática - ICEx - UFMG
Av. Antonio Carlos 6627
31270-901 - Belo Horizonte - Brasil
msoares@mat.ufmg.br