MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº33 – dezembro 2002 – pp. 83–95

O Ensino do Cálculo e da Análise

Geraldo Ávila

Quando introduzida na hora errada ou no lugar errado, a boa lógica pode ser o pior inimigo do bom ensino. (G. Pólya)

Muitas das atuais teorias matemáticas surgiram da ciência aplicada e só depois adquiriram aquele aspecto axiomático que tanto dificulta seu aprendizado. (V. I. Arnold)

1 Panorama do ensino até 1960

Até aproximadamente 1960 o ensino do Cálculo em nossas escolas superiores — fossem Faculdades de Filosofia (cursos de Matemática e Física) ou Escolas de Engenharia — seguia os moldes dos livros europeus, como o de autoria do francês Édouard Goursat ou o do italiano Francesco Severi. Os cursos então estruturados incorporavam o que hoje costumamos distribuir em disciplinas separadas, como o Cálculo propriamente e a Análise Matemática. Era o modelo dos famosos "Cours d'Analyse" das escolas francesas, nos quais se ensinava tudo o que hoje incluímos nas disciplinas de Cálculo de uma ou mais variáveis, e mais ainda funções de uma variável complexa, boa parte das equações diferenciais ordinárias e um tanto das parciais, geometria diferencial de curvas e superfícies e um pouco de análise de Fourier. A geometria analítica figurava em disciplina à parte como acontece até hoje.

O autor destas linhas, por exemplo, quando cursou a faculdade de 1953 a 1956, teve um curso de três anos de Análise Matemática, incluindo todos os tópicos aqui descritos. E o curso começava, logo no primeiro ano, com a teoria dos números reais, noções de topologia na reta, funções contínuas em intervalos fechados, conjuntos compactos, etc.; juntamente com derivada e aplicações, máximos e mínimos, comportamento das funções, e assim por diante. Aprendia-se o Cálculo juntamente com a Análise. E o curso não incluía nenhuma recordação de trigonometria, logaritmos e exponencias, ou quaisquer outros tópicos que figuravam no ensino médio.

2 As mudanças

A partir de 1960 as coisas mudaram rapidamente. Os livros americanos tomaram o lugar dos livros europeus. E assim surgiu entre nós o costume de ensinar o Cálculo primeiro, ficando a Análise Matemática para depois, numa disciplina separada. Nos Estados Unidos já era hábito corrente ministrar um primeiro curso de Análise numa disciplina de "Cálculo Avançado". Era assim também no ITA de S. J. dos Campos, desde o início dessa instituição; isso por influência dos professores americanos que lá organizaram o ensino.

Não obstante essas mudanças, aquela insistência numa apresentação rigorosa do Cálculo desde o primeiro ano, que se havia instalado nas escolas do Rio e São Paulo por influência dos professores europeus, essa insistência persistiu por algum tempo, e persiste até os dias de hoje em certas escolas, como se vê em alguns livros de Cálculo de autores brasileiros. A marca mais visível disso é a introdução, logo no início do curso, da definição de limite em termos de ε e δ, e conseqüente dedução das propriedades do limite. Um livro assim "rigoroso", que usamos logo no começo da Universidade de Brasilia no início dos anos sessenta, foi o texto de Johnson e Kiokemeister. Também nos Estados Unidos esse livro foi usado em várias escolas, tanto nos anos sessenta como na década seguinte.

3 Os novos textos

O primeiro autor a marcar mudança significativa no modo de ensinar Cálculo foi Serge Lang, cujo livro apareceu pela primeira vez em meados dos anos sessenta, logo seguido pelo de Bob Seeley. Esses autores reconheciam que não era realista ensinar a teoria rigorosa do limite no início de um curso de Cálculo, e seus textos, principalmente o primeiro, influenciaram muitos dos livros que têm sido escritos desde então. Os livros desses dois autores foram traduzidos e publicados no Brasil.

Já faz mais de uma década que se desencadeou nos Estados Unidos um movimento de reforma do ensino do Cálculo, e, pelo menos um texto que essa reforma produziu já foi traduzido e publicado no Brasil. Afora isso esse movimento ainda não teve influência significativa entre nós; de certo modo isso é bom, pois inovações desse tipo levam algum tempo para corrigir rumos e se impor pelas vantagens que realmente oferecem, o que nem sempre é o caso; haja vista a famigerada reforma da "matemática moderna" dos anos sessenta, que foi um fracasso, não obstante os muitos ilustres nomes dos que a defendiam.

4 As melhores inovações

As pessoas mais velhas, quando se referem aos hábitos de seu tempo costumam apresentar as virtudes desses hábitos, mas nem sempre falam de suas desvantagens. Não há de ser esse o nosso caso aqui. Aliás, é por causa das dificuldades que enfrentamos como estudante do nosso velho curso de Análise Matemática que reconhecemos o erro pedagógico da orientação então usada e das virtudes das mudanças que vieram com a separação entre o ensino do Cálculo e da Análise. E temos plena convicção de que os fundamentos da Análise, como a definição ε-δ de limite, não deve figurar no início do ensino do Cálculo.

As coisas devem ser assim, não somente porque os alunos que ingressam nos cursos superiores ainda trazem muitas deficiências de formação básica, mas principalmente porque, só depois de terem entendido bem o conceito de derivada e visto algumas de suas aplicações, é que estarão devidamente preparados para prosseguir no estudo dos fundamentos. Para bem entender essa "ordem natural das coisas" é conveniente fazer uma digressão histórica.

5 Uma retrospectiva histórica

Sabemos que Arquimedes (287–212 a.C.) lidou com as idéias do Cálculo Integral em seus estudos de áreas e volumes (a propósito veja o excelente livro de C. H. Edwards, Jr [E], o capítulo 2 é sobre Arquimedes), no entanto o Cálculo não se desenvolveu na antigüidade, ficou esperando mais de dezoito séculos para desabrochar por inteiro, o que só aconteceu nos tempos modernos. Foi se desenvolvendo aos poucos durante todo o século XVII; e foi só no final desse século que o Teorema Fundamental foi claramente reconhecido como elemento importante de ligação entre a derivada e a integral.

Uma das razões por que o Cálculo não se desenvolveu com Arquimedes, ou seus sucessores imediatos, foi a insistência exagerada no rigor das demonstrações e na preocupação em evitar o infinito a todo custo. Arquimedes lidou com situações que sugeriam claramente passagem ao limite com um certo parâmetro n tendendo a infinito; mas recusava-se a fazer essa passagem. Contornava a situação com o complicado método de "dupla redução ao absurdo", graças ao qual conseguia provar seus resultados (veja [A], onde descrevemos esse método). Mas como descobria seus resultados? Ele se valia de passagens ao limite, ainda que não as pudesse justificar rigorosamente. Em outras oportunidades recorria a raciocínios físicos. O fato é que, feitas as descobertas, ele as apresentava com demonstrações rigorosas, como explicamos em [A].

A mais significativa característica da Matemática grega era precisamente essa insistência no rigor e no cuidado em não utilizar o conceito do infinito, pelas contradições que poderia acarretar. Como vários abalizados historiadores da ciência já observaram, esse traço do pensamento grego foi a causa principal que levou a Matemática da época a uma completa estagnação. De fato, a descoberta dos incomensuráveis no século IV a.C. marcou a primeira crise de fundamentos, pois foi interpretada como significando morte certa ao ideal pitagórico de tudo explicar no mundo dos fenômenos em termos do número.

Certamente era assim desde que por "número" se entendesse apenas os números naturais.[1] Tivessem eles tido a coragem de alargar o conceito de número, admitindo as frações e os irracionais, e tudo prosseguiria muito bem, com o próprio ideal pitagórico enriquecido em sua interpretação, ao invés de descartado. Mas não, dentro daquela orientação excessivamente rigorosa, os gregos encontraram uma saída para a crise na teoria das proporções de Eudoxo. Essa teoria, descrita no Livro V dos Elementos de Euclides (e que tratamos em artigo na RPM 7), é re-

[1]Os gregos nem consideravam 1 como número; 1 era apenas a unidade a partir da qual se formavam os números.

almente genial, mas acabou enveredando a Matemática grega para um caminho excessivamente geométrico. Em conseqüência, a Matemática numérica (Aritmética e Álgebra) só veio a aparecer no Ocidente europeu a partir do século XIII da nossa era, importada da Índia através dos árabes. E foi só em fins do século XVI que a Álgebra alcançou a maturidade necessária para o definitivo desenvolvimento do Cálculo no século seguinte.

É importante notar que esse desenvolvimento mais recente da Matemática se deveu a duas causas principais. De um lado as obras clássicas antigas, principalmente as de Euclides e Arquimedes, embora estivessem disponíveis em traduções latinas havia séculos, demoraram para ser devidamente assimiladas, coisa que só começou a acontecer plenamente em fins do século XVI. E a partir de então tiveram influência decisiva nos novos desenvolvimentos. Ao lado disso há que se considerar a atitude dos matemáticos da época, que não se pautavam pelos mesmos padrões de rigor dos matemáticos gregos. Bonaventura Cavalieri (1598–1647), que popularizou bastante as técnicas infinitesimais dos indivisíveis, cuidava de suas aplicações ao cálculo de áreas e volumes, deixando de lado qualquer preocupação com a demonstração rigorosa dos resultados, coisa que, segundo ele, deveria preocupar os filósofos, não os matemáticos.

Essa atitude prática, seguindo raciocínios intuitivos e de visualização geométrica, predominou por cerca de 200 anos, até o começo do século XIX. Leonhard Euler (1707–1783), considerado por muitos o maior gênio matemático de seu tempo, foi também o maior mestre dessa atitude prática, que fez dele um verdadeiro desbravador das mais diversas áreas da Matemática e da Ciência Aplicada.

6 Exemplos concretos

Vamos mostrar agora, através de exemplos concretos, como é mais sensato apresentar os conceitos através de situações em que eles são efetivamente solicitados. Começamos lembrando que o conceito de derivada antecede o de limite. Para Leibniz, ainda em fins do século XVII, a derivada era entendida como razão de quantidades infinitesimais, ou seja, quantidades positivas, porém inferiores a qualquer número positivo, uma concepção em si contraditória, mas que frutificou, e muito. Foi d'Alembert, em meados do século seguinte, o primeiro matemático a interpretar a derivada como limite de uma razão incremental. É por isso que ainda hoje continua sendo pedagogicamente mais adequado introduzir primeiro a derivada, o limite aparecendo de maneira natural através da derivada; só depois que o aluno assim se familiariza com limites é que ele estará preparado para bem compreender a definição precisa desse conceito e poderá estudar suas propriedades de maneira proveitosa.

Consideremos o problema de calcular o declive da reta tangente à curva $y = f(x) = x^2$ em $x = 3$. Começamos com o declive da reta secante pelos pontos (3, 9) e (x, x^2):

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3.$$

Esta última expressão mostra claramente que o limite da razão incremental é 6 quando $x \to 3$; e o aluno não tem dificuldade em compreender e aceitar isso. No entanto, se quisermos começar primeiro com a noção de limite, sem falar em derivada, e pusermos o problema de calcular o limite de

$$\frac{x^2 - 3^2}{x - 3}$$

com x tendendo a 3, aí não teremos como explicar ao aluno por que estamos considerando essa expressão, por que não começamos logo com ela em sua forma simplificada $x + 3$.

Exemplos como esse são frustrantes para quem inicia o ensino pelo conceito de limite e não o de derivada. Os primeiros limites interessantes que aparecem num curso de Cálculo são os limites de

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\cos x - 1}{x}$$

com x tendendo a zero. Eles são necessários no cálculo da derivada de $\operatorname{sen} x$. E só serão bem recebidos pelo aluno se foram apresentados nesse contexto de calcular a derivada de $\operatorname{sen} x$; do contrário o aluno não entenderá o rumo em que está sendo conduzido. E uma das piores coisas do ensino é isso de ensinar conceitos com a recomendação de que "você vai precisar disso mais tarde, não queira entender agora". Certamente há muitas coisas cujo aprendizado é difícil de ser explicado a cada momento; mas sempre que pudermos devemos preferir os caminhos que facilitam essas explicações.

7 A continuidade

A continuidade é um conceito que faz pouca falta num primeiro curso de Cálculo, enquanto não temos de lidar com funções descontínuas. A situação aqui é parecida com a noção de conjunto não enumerável; que falta faria tal conceito, enquanto todos os conjuntos encontrados fossem enumeráveis, como o conjunto dos inteiros e dos racionais. Foi só quando Cantor demonstrou que o conjunto dos números reais é não enumerável que ele sentiu necessidade do novo conceito.

A pouca necessidade do conceito de continuidade durante todo o século XVIII explica porque, naquele século, nunca ficou muito claro o que se entendia por função contínua ou descontínua. O próprio Euler ora encarava a continuidade de um ponto de vista geométrico, ora de um ponto de vista analítico. Por exemplo, seria contínua uma função que fosse dada por uma única expressão analítica, como

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2 dt}{x^2 + t^2}.$$

Mas essa mesma função possui também duas expressões analíticas,

$$f(x) = x \text{ se } x \geq 0; \qquad f(x) = -x \text{ se } x \leq 0,$$

sendo então descontínua!

A conceituação definitiva de continuidade só foi possível depois que funções descontínuas começaram a surgir naturalmente, como aconteceu nos trabalhos de Fourier sobre propagação do calor. Nesses seus estudos Fourier lidou muito com séries trigonométricas, que deram origem a funções descontínuas a partir de funções contínuas. Exemplo clássico disso é a série

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Os termos dessa série são todos eles funções contínuas; no entanto, a soma f é uma função descontínua, com saltos em todos os pontos $x = n\pi$ (figura 1), e pode ser assim descrita:

$$f(x) = x/2 \text{ se } -\pi < x < \pi; \quad f(-\pi) = f(\pi) = 0,$$

e f é periódica de período 2π.

É interessante notar que os matemáticos lidaram com séries infinitas desde o início do Cálculo no século XVII, como as séries

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots; \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Mas, como essas, eram todas elas séries de potências; e tais séries representam funções muito regulares, que não dão origem a descontinuidades em seus domínios de convergência, como ficaria claro nna segunda metade do século XIX, nos trabalhos de Karl Weierstrass.

Vemos assim que os conceitos de continuidade e descontinuidade de uma função só puderam ser devidamente compreendidos e formulados depois que os matemáticos começaram a encontrar funções descontínuas em suas investigações. Certamente não podemos ignorar esse fato histórico em nossas tarefas de ensino. É por isso que não é didaticamente aconselhável introduzir os conceitos de continuidade e descontinuidade de maneira artificial, sendo antes preferivel começar com exemplos concretos. Como a ilustração da descontinuidade não pode ser feita com séries trigonométricas num primeiro curso de Cálculo, os melhores exemplos que conheço envolvem a derivada e a função $\text{sen}(1/x)$.

7.1 Dois exemplos importantes

Apresentamos agora dois exemplos de funções definidas de maneira bem natural, o primeiro deles ilustrando uma função contínua sem derivada num ponto, o segundo o de uma função cuja descontinuidade surge naturalmente, sem qualquer artifício.

Exemplo 1. Vamos mostrar que a função

$$f(x) = x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

é contínua em $x = 0$, mas não é derivável nesse ponto. Com efeito, como o seno está multiplicado pelo fator x, é claro que $f(x) \to 0$ com $x \to 0$, e isto prova que f é contínua em $x = 0$. Para derivar f em $x = 0$, devemos considerar a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Ora, esta expressão não tem limite com $x \to 0$; logo, f não é derivável na origem. Geometricamente, o que se passa, quando $x \to 0$, é que a reta secante OA fica oscilando indefinidamente entre OA_+ e OA_- (figura 2), não existindo reta tangente ao gráfico na origem.

Exemplo 3. Consideremos agora a função

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 0,$$

que, como a anterior, é contínua, inclusive na origem; e que também é derivável nesse ponto, pois

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Então, $f'(0) = 0$, provando, como queríamos, que a derivada existe na origem. Geometricamente, vemos que, à medida que x tende a zero, a reta secante OA oscila infinitas vezes para cima e para baixo (figura 3), aproximando-se cada vez mais do eixo Ox, eixo este que é a reta tangente à curva na origem. Observe que essa tangente corta a curva numa infinidade de pontos em qualquer intervalo contendo a origem.

Observe também que, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Como esta última expressão não tem limite com $x \to 0$, f' é descontínua na origem (embora esteja definida para todo x, inclusive a origem!). Geometricamente, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ oscila infinitamente, sem ter limite com $x \to 0$, como ilustra a figura 3.

Com este último exemplo exibimos uma função f, definida, contínua e derivável para todo x real. No entanto, sua derivada $g = f'$, embora definida em toda a reta, é descontínua em $x = 0$. E esta descontinuidade surge de maneira natural, sem artificialismo, apenas porque derivamos a função f.

Esse exemplo ilustra o que dissemos antes: o conceito de "continuidade"só adquire importância com o surgimento natural de funções descontínuas, como é o caso da função g anterior. Uma das dificuldades do ensino da continuidade logo no início de um curso de Cálculo está justamente na impossibilidade de exibir uma função descontínua que não tenha sido construída artificialmente. Só depois de familiarizar o aluno com as funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(1/x)$ é que somos capazes de chegar, pelo processo natural de derivação, a uma função descontínua.

8 O conceito de função

Os estudos de Fourier se iniciaram em fins do século XVIII, e culminaram com a publicação de seu livro [F] em 1822. Já nesse livro aparece também, pela primeira vez, uma concepção de função desgarrada da idéia de que fosse preciso uma "fórmula" para definir uma função. Fourier escreve:

> *Uma função f representa uma sucessão de valores ou ordenadas arbitrárias. (...) Não supomos essas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem umas às outras de qualquer maneira, e cada uma é dada como se fosse uma grandeza única.*

Isso equivale praticamente à definição de função que adotamos hoje em dia, segundo a qual uma função f é uma correspondência que atribui, segundo uma lei qualquer, um valor y a cada valor x da variável independente. Foi no início do século XIX, depois de século e meio de desenvolvimento do Cálculo, quando suas técnicas já haviam sido bem dominadas, que os conceitos básicos de limite, derivada e integral puderam ser devidamente esclarecidos. A definição precisa de limite, por exemplo, tal como a conhecemos hoje, em termos de ε e δ, aparece pela primeira vez numa publicação de Weierstrass de 1874 (veja [H-W], p. 204). É verdade que ela surge nos escritos de Bolzano e Cauchy de 1817 e 1823, respectivamente, mas de forma ainda não muito clara. Não é, pois, razoável, esperar que os alunos possam tirar grande proveito de uma tal definição no início de um curso de Cálculo.

A nosso ver, um primeiro curso de Cálculo deve levar o aluno a se familiarizar logo com as idéias e técnicas da derivada e da integral, incluindo problemas de máximos e mínimos, integração por substituição e por partes, regras de l'Hôpital, comportamento das funções elementares, logaritmo e exponencial, suas aplicações, e exemplos simples de integrais impróprias. Esses tópicos devem objeto de um curso de um semestre, no máximo um ano. Após um tal curso os alunos deverão estar preparados para fazer com proveito um primeiro curso de Análise.

9 O desenvolvimento da Análise

A conceituação de função dada por Fourier foi ainda incipiente. Também as definições de limite e continuidade dadas por Bolzano e Cauchy não tinham a clareza encontrada em Weierstrass.

Foi Dirichlet o primeiro a dar uma definição satisfatória de função, como correspondência que leva elementos de um conjunto (o domínio) em elementos de outro conjunto (o contradomínio) É a definição que utilizamos até os dias de hoje.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1855) quando jovem esteve em Paris, que era o grande centro matemático (científico e cultural) da época. Aí ele se familiarizou com os problemas matemáticos que estavam na ordem do dia, como o do desenvolvimento de uma função arbitrária em séries de senos e co-senos. E em 1829 ele publicou um memorável trabalho sobre esse assunto [D1]. Esse trabalho de Dirichlet e um outro de Niels Abel [Ab] são, por assim dizer, os primeiros marcos do novo espírito da Análise Matemática que iria se desenvolver a partir de então.

É no trabalho citado de Abel que encontramos a função do nosso primeiro exemplo atrás ($\sum(\text{sen}\, nx)/x$). Abel utilizou esse exemplo justamente para mostrar que não era correta uma afirmação de Cauchy, segundo o qual uma série de funções contínuas seria contínua.

Dirichlet, por sua vez, deu a primeira demonstração satisfatória de que uma função satisfazendo certas condições, pode ser desenvolvida em série de senos e co-senos. Ele termina seu artigo (já citado) dando exemplo de uma função que não satisfazia essas condições. Essa função, bastante citada nos cursos de Análise, é aquela que assume um certo valor nos números racionais e um outro valor nos irracionais. Ainda nesse artigo ele fala da necessidade de se fazer uma teoria dos números reais, prometendo voltar ao assunto futuramente, o que nunca fez. Mas, em 1837, num outro artigo, ele dá uma definição mais explícita de função, que é a definição em termos de correspondência que mencionamos há pouco.

O desenvolvimento da Análise intensificou-se progressivamente durante todo o século XIX, não nos cabendo aqui continuar narrando esse desenvolvimento. O que dissemos já é suficiente para as considerações finais que desejamos fazer sobre o ensino.

10 O ensino do Cálculo e da Análise

Como já tivemos, após um primeiro curso de Cálculo, de um semestre ou um ano, os alunos já devem estar preparados para fazer um curso de Análise. É em tal curso que se deve ensinar a teoria da integral de Riemann, continuidade uniforme, convergência uniforme e aplicações. A nosso ver, tópicos como esses não caberiam num segundo curso de Cálculo, que deve se preocupar com os tópicos àdicioonais próprios do Cálculo, como polinômio e séries de Taylor e MacLaurin, convergência de integrais impróprias, funções vetoriais e aplicações, e uma introdução às equações diferenciais. É claro que esse curso necessitará da definição e propriedades de limite, continuidade e convergência de funções, seqüências e séries infinitas. Um terceiro curso de Cálculo se ocuparia das funções de várias variáveis.

Referências

[A] G. Ávila, *Arquimedes, o rigor e o método*, Matemática Universitária nº 4, Dezembro de 1986.

[Ab] N. H. Abel, *Recherche sur la série binomielle*, in Oeuvres Complétes, t. I, 219–50, Johnson Reprint Corporation.

[D1] P. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à representer une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal de Crelle, 4 (1829) 157–69, Werke, Chelsea Publishing Co.

[E] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer–Verlag.

[F] J. Fourier, *La Théorie Analytique de la Chaleur* (tradução inglesa da Editora Dover, em cuja página 430 aparece a definição de função que citamos).

[H-W] E. Hairer e G. Wanner, *Analysis by its History*, Springer-Verlag.