MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$34 – junho 2003 – pp. 101–104

Ensino[1]

Os Zeros Reais da Equação $p^x = x^p$, p Primo

G. G. Bastos

Resumo

Estudamos os zeros reais da equação $p^x = x^p$, onde p é um número primo. Mostramos que os zeros racionais são da forma $\pm\, p^n$, onde n é um número inteiro. Para $p = 2$, além dos zeros óbvios $x = 2$ e 4, existe somente mais um zero $\alpha \in (-1, -1\,/\,2)$. No caso $p > 2$, não há zeros negativos e, além do óbvio $x = p$, existe mais um único zero $\alpha \in (1, p)$. Portanto, em ambos os casos, α é irracional. Ademais, usando o teorema de Gelfond-Schneider da teoria analítica dos números, podemos concluir que esses zeros excepcionais são números transcendentes.

1 Introdução

Queremos estudar os zeros da função $f(x) = p^x - x^p$ no eixo real. Notemos que f é diferenciável em cada $x \in \mathbb{R}$. Claramente, x é um zero positivo de f se e somente se $x \ln p = p \ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln p}{p}$, onde $\ln x = \int_1^x dt\,/\,t = \log_e x$ é o logaritmo neperiano, $e = 2,71828....$ Usamos somente conceitos e resultados elementares de cálculo para estudar o comportamento das das funções $f(x)$ e $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, e mostramos que os zeros racionais de $f(x) = p^x - x^p$ são potências inteiras de p. Temos, então:

[1] Seção coordenada por Walcy Santos

- Para $p = 2$, f tem exatamente três zeros : $2, 4$ e um número irracional no intervalo $(-1, -1/2)$.

- Quando $p > 2$, não há zeros reais negativos, e f tem exatamente dois zeros: p e um número irracional entre 1 e p.

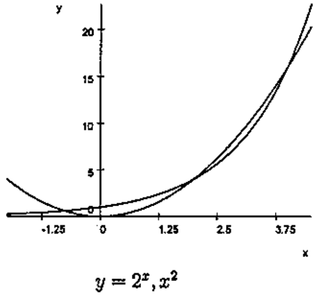
A questão que ora abordamos generaliza o estudo sobre a equação $2^x = x^2$ publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM) N.º3, secção Conceitos e Controvérsias, por Elon Lages Lima.

2 A Equação $2^x = x^2$

Temos $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, para cada $x > 0$, $g'(e) = 0$, $g'(x) > 0$, se $0 < x < e$ e $g'(x) < 0$, se $x > e$. Portanto, g é (estritamente) crescente em $(0, e)$ e decrescente em (e, ∞). Como $2 \in (0, e)$, segue-se que $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2}{2}$, se $0 < x < 2$, e $\dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln 2}{2}$, se $2 < x < e$. Para $e < x < 4$, $\dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{2 \ln 2}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$, e $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2}{2}$, se $x > 4$.

Assim, os únicos zeros positivos de $f(x) = 2^x - x^2$ são $x = 2$ e $x = 4$. Se $x < 0$, tem-se $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x > 0$, logo f é estritamente crescente em $(-\infty, 0)$. Também, $f(-1) = 1/2 - 1 < 0$ e $f(-1/2) = 2^{-1/2} - 1/4 = 1/\sqrt{2} - 1/4 > 0$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, f tem um zero $\alpha \in (-1, -1/2)$.

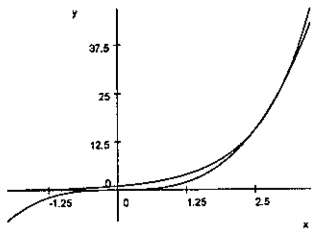
Segue-se que f tem exatamente 3 zeros no eixo real, a saber: $\alpha, 2$ e 4. Olhemos para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = x^2$.



$y = 2^x, x^2$

3 O Caso $p > 2$

Temos $f(x) = p^x - x^p$, onde p é um número primo ímpar. Logo, $f(x) > 0$, para cada $x < 0$. Logo, os zeros de f ocorrem no semi-eixo positivo, p. ex., $x = p$. Por outro lado, sendo g contínua crescente em $(0, e)$ e decrescente em (e, ∞), então g passa por um máximo absoluto em $x = e$. Assim, existe um único $\alpha \in (0, e)$ tal que $g(\alpha) = g(p) = (\ln p)\,/\,p > 0 = g(1)$, e portanto $\alpha > 1$. Então, neste caso, f tem exatamente dois zeros, a saber: $x = \alpha \in (1, p)$ e o óbvio $x = p$.



$y = 3^x, x^3$

4 Os Zeros Racionais

Seja x um zero racional de f, digamos $x = \dfrac{m}{n}$, com m, n inteiros primos entre si, $n \geq 1$. Tem-se $p^{m/n} = (m/n)^p \Leftrightarrow n^{np}p^m = m^{np}$.

Se $m > 0$, então: $(m\,|\,p^m$ e $p\,|\,m) \Rightarrow (m = p^k,\ k \geq 1) \Rightarrow n^{np} = p^{knp - p^k} \Rightarrow n = p^l,\ l \geq 0 \Rightarrow x = m\,/\,n = p^{k-l}$, onde $k - l$ é um número inteiro.

Se $m < 0$, então $n^{np} = m^{np}p^{-m} \Rightarrow n = p^k$, onde $k \geq 1$. Logo, $m^{p^{k+1}} = (p^k)^{p^{k+1}+m} = p^{k(p^{k+1}+m)}$. Como $m < 0$, segue-se $p = 2$, senão $p^{k(p^{k+1}+m)} < 0$, absurdo. Logo, $m = -2^j$, onde j é um número inteiro > 0. Logo, $x = m\,/\,n = -2^{j-k}$, onde $j - k$ é um número inteiro.

Em suma: Se $p = 2$, os zeros racionais de $2^x - x^2$ são potências $x = \pm 2^r$, onde r é um número inteiro. Se $p > 2$, então os zeros de $p^x - x^p$ são da forma $x = p^r$, onde r é um número inteiro.

Portanto, em ambos os casos $x = \alpha$ é um número irracional. Com efeito, para $p = 2$, $\alpha \in (-1, -1/2)$; para $p > 2$, tem-se $\alpha \in (1, p)$, o que mostra que α não é da forma $\pm p^r$, com r inteiro.

Nossa identidade algébrica-transcendente, nos permite ver a transcendência de α a partir de sua irracionalidade, usando, como fez Lima, o teorema de Gelfond-Schneider: "Se a, b são números algébricos e b é irracional, então a^b é um número transcendente (salvo, obviamente, os casos $a = 0, 1$)". De fato, sendo p – como de resto todo número racional – algébrico, e a raiz extraordinária α irracional, ter-se-ia α transcendente; senão, como o produto de dois números algébricos é algébrico, o número algébrico $\alpha^p = p^\alpha$ seria (por Gelfond-Schneider) transcendente, o que é impossível, pela própria definição de número transcendente como número não algébrico. Em particular, o número α não é "construtível", i. e. não pode ser "marcado" na reta numérica usando apenas régua e compasso, pois como se sabe todo número construtível é algébrico [com grau uma potência de 2].

UFC/Depto. de Matemática
Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici Bloco 914
60455-760 Fortaleza, CE
Email: ggbastos@ufc.br