MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº36 – junho 2004 – pp. 1–22

O Método da Fase Estacionária Integrais Oscilantes e Séries não-convergentes

Artur O. Lopes e Marcos Sebastiani

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados conhecidos sobre o Método da Fase Estacionária, Integrais Oscilantes e Séries não-convergentes. Nossa exposição será elementar e visa descrever o assunto para estudantes ou pesquisadores que não estão familiarizados com este tópico. Daremos alguns exemplos ao longo do texto. O caso mais simples será a análise dos valores assintóticos de certas $F(\tau)$ tomando valores reais. A variável real τ será tomada bem grande, ou seja, $\tau \to \infty$. Um exemplo coberto por esta teoria:

$$F(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x}}{1+x} dx.$$

A idéia central aqui é que, de alguma forma, esta função F é tal que para valores grandes de τ ela pode ser aproximada por uma série de potências que tem uma expressão bem simples:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}.$$

Note que esta série não converge! De qualquer modo uma análise matemática rigorosa pode ser considerada aqui e este é o objeto do presente texto.

Outros exemplos bem mais complexos serão também considerados.

Uma ótima apresentação sobre o "Método da Fase Estacionária" encontra-se no número 9/10 de "Matemática Universitária" (1989), de autoria de G. Ávila. Nossa exposição de qualquer modo é auto-suficiente.

Importantes problemas aplicados que envolvem o Método da Fase Estacionária, Integrais Oscilantes e Séries não-convergentes aparecem em Ótica ([2] e [3]) e também em Mecânica Quântica [5].

Vamos considerar aqui funções C^∞ definidas em semi-reta reais e tomando valores complexos $F(\tau) : (d, +\infty) \to \mathbb{C}$ onde d é uma constante real.

Definição 1.1 *$H(\tau)$ é de decrescimento rápido se para todo $N \in \mathbb{N}$ vale que $H(\tau)\tau^N \to 0$ quando $\tau \to \infty$ e o mesmo é válido para as derivadas de ordem k de H, ou seja para todo N vale que $\frac{d^k H(\tau)}{d\tau^k}\tau^N \to 0$, quando $\tau \to \infty$.*

Definição 1.2 *$F(\tau)$ e $G(\tau)$ têm o mesmo comportamento assintótico se $F(\tau) - G(\tau)$ é de decrescimento rápido e utiliza-se a notação $F(\tau) \sim G(\tau)$.*

Duas funções F e G que têm o mesmo comportamento assintótico são quase que indistingüíveis para valores de τ grandes.

O τ tem o significado de freqüência em Ótica e no Eletromagnetismo. Estamos interessados então apenas em situações em que a freqüência τ vai a infinito, ou seja, quando ela é muito grande. Neste contexto, se $H(\tau)$ tem decrescimento rápido, podemos dizer que para τ grande podemos substituir ela pela função nula ($H(\tau) \sim 0$).

Nosso objetivo principal é analisar o assintótico de expressões da forma
$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$$
quando τ vai para infinito [1][5][6][7][8].

Para se ter uma breve idéia da complexidade do problema, considere $\phi(x) = x$. Note que neste caso quando τ está fixo, mas é muito grande, o termo $e^{i\tau x}$ oscila muito com x, ou seja, uma pequena variação de x faz variar bastante $e^{i\tau x}$. A idéia heurística básica aqui é que essas oscilações irão produzir cancelamentos e um comportamento bem definido aparece disto tudo quando τ vai a infinito.

Em Ótica o $f(x)$ representa a amplitude, τ a freqüência e o $\phi(x)$ a fase de uma onda que é descrita pela expressão acima [3][4][8]. O limite quando τ vai a infinito conduz a assim chamada Ótica Geométrica (ver [2], seção 9-8).

Vamos assumir em todo o texto que f é de classe C^∞.

O método que usaremos para estudar o assintótico de tais integrais oscilantes é o **método da fase estacionária**, que mostraremos nas seções a seguir. Essencialmente este método significa que apenas os pontos críticos de ϕ (pontos estacionários) contribuem para o comportamento assintótico de $F(\tau)$ quando $\tau \to +\infty$.

Uma outra importante aplicação do cálculo do assintótico de tais integrais é no estudo do limite semi-clássico da Mecânica Quântica. Neste caso $\tau = 1/h$ e h vai a zero, onde h é a constante de Planck [2][3][5].

Como decorrência natural do que iremos analisar no texto, vamos apresentar brevemente a fundamentação matemática da teoria das séries não convergentes. H. Poincaré foi o primeiro matemático a introduzir tais séries.

2 Fase estacionária

Proposição 2.1 *Seja $f \in C_0^\infty(I\!R)$, ou seja uma função C^∞ com suporte compacto, então*

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x} dx$$

é de decrescimento rápido.

Prova: De fato, segue de propriedades de Séries de Fourier (apenas integração por partes) que

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x} dx \frac{-1}{i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\tau x} dx$$

e repetindo a integração por parte n vezes, obtemos

$$F(\tau) = \frac{(-1)^n}{(i\tau)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{d^n x} e^{i\tau x} dx.$$

Então $|\tau^n F(\tau)| \leq (b-a)\mathrm{Max}_{a \leq x \leq b} \frac{d^n f(x)}{d^n x}$, onde o intervalo (a,b) contém o suporte de f e a, b são constantes reais.

Logo $F(\tau)\tau^n$ é limitada para todo n, portanto

$F(\tau)\tau^{n-1}$ tende a zero para todo n quando τ vai a infinito. O resultado análogo vale para as derivadas k-ésimas. Logo, tal $F(\tau)$ tem decrescimento rápido. □

Utilizando o ponto de vista de equivalência $\sim$, podemos dizer, do ponto de vista da definição 1.2, que podemos substituir $F(\tau)$ por 0 para τ grande, ou seja

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x} dx \sim 0.$$

Vamos agora analisar em geral outros tipos de funções $F(\tau)$, como por exemplo

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$$

onde $\phi(x)$ é uma função qualquer que supomos doravante analítica.

No exemplo anterior $\phi(x) = x$.

É possível mostrar mais geralmente que:

Proposição 2.2 *Se $\phi'(x)$ não tem zeros no suporte de f então vale que*

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx \sim 0.$$

Prova: Para cada τ tal que $\phi'(\tau) = 0$, podemos escolher um intervalo aberto $U_\tau = (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ disjunto do suporte de f. Por outro lado, para cada τ tal que $\phi'(\tau) \neq 0$ podemos escolher um intervalo aberto $U_\tau = (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ tal que $\phi'(x) \neq 0, \forall x \in \overline{U_\tau}$. Tomando uma partição da unidade subordinada ao recobrimento assim obtido, basta provar que

$$\int_b^a f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx \sim 0,$$

quando (a,b) contém o suporte de f e $\phi'(x) \neq 0$ em $[a,b]$. O resultado segue da proposição 2.1 pela mudança de coordenadas $\phi(x) = y$. □

Se $\phi^{'}(a) = 0, \phi^{''}(a) \neq 0$ dizemos que a é ponto estacionário ordinário (é crítico não degenerado para ϕ). Se $\phi^{'}(a) = 0, \phi^{''}(a) = 0$ dizemos que a é ponto de cáustica.

Um caso importante foi estudado por Fresnel, que corresponde a $\phi(x) = x^2$. Neste caso $x = 0$ é ponto estacionário ordinário para ϕ.

Lembre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2\tau} dx \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} dy \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} e^{i\pi/4}$$

Desejamos calcular

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^2} dx$$

Ora

$$F(\tau) - f(0)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^2} dx - f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x^2} dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} (f(x) - f(0)) e^{i\tau x^2} dx.$$

Seja $g(x)$ tal que $f(x) - f(0) = xg(x)$, onde $g \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ e $g^{'} = \frac{c}{x^2}$ para x fora do suporte de f.

Ora

$$\int_{-R}^{R} (f(x) - f(0)) e^{i\tau x^2} dx = \int_{-R}^{R} xg(x) e^{i\tau x^2} dx =$$

$$\frac{e^{i\tau x^2} g(x)}{2i\tau} |_{x=-R}^{x=R} - \frac{1}{2i\tau} \int_{-R}^{R} g^{'}(x) e^{i\tau x^2} dx.$$

Se R é grande, $g(R) = -\frac{f(0)}{R}$ e $g(-R) = \frac{f(0)}{R}$.

Decorre daí que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} (f(x) - f(0)) e^{i\tau x^2} dx = -\frac{1}{2i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g^{'}(x) e^{i\tau x^2} dx.$$

Sendo assim,

$$F(\tau) = e^{i\pi/4} f(0)\sqrt{\pi}\tau^{-1/2} + \frac{i}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{i\tau x^2}dx.$$

Note que por hipótese de g, para cada τ fixo

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{i\tau x^2}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|\, dx$$

é uniformemente limitado; logo, a integral

$$\frac{i}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{i\tau x^2}dx$$

vai a zero quando τ vai a infinito.

Como τ^{-1} vai a zero mais rápido que $\tau^{-1/2}$ quando τ vai a infinito, o termo $f(0)\sqrt{\pi}\tau^{-1/2}$ domina o termo $\frac{i}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{i\tau x^2}dx$ na convergência a zero de $F(\tau)$ quando τ vai a infinito.

Fazendo o mesmo procedimento m vezes obtemos:

Proposição 2.3 *Para todo m vale que se $F(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\tau x^2}dx$, então existe h_m tal que*

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{m} e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}(i/2)^k \frac{f^{2k}(0)}{(2k)!!}\tau^{-k-1/2} +$$
$$(i/(2\tau))^{m+1}\int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)e^{i\tau x^2}dx,$$

onde $h_m(x)$ é uma função em C^∞ tal que $h_m(x)x^2$ é limitada e onde $(2k)!! = 2\,4\,6...(2(k-1))\,(2k)$.

A função h_m acima é obtida recursivamente seguindo o procedimento do caso $m = 1$. O termo dominante na convergência a zero da expressão acima é de ordem $\tau^{-1/2}$. Podemos afirmar que em primeira aproximação o termo dominante de $F(\tau)$ é $e^{i\pi/4}f(0)\sqrt{\pi}\tau^{-1/2}$.

Gostaríamos de fazer m tender a infinito para se ter então uma expressão completa de $F(\tau)$ em série, mas este procedimento pode incorrer em problemas de convergência da série. Esta é a razão para introduzir a seguir o conceito de uma série convergir assintoticamente a uma função $F(\tau)$.

Definição 2.4 *Dizemos que* $\sum_0^\infty g_k(\tau)$ *converge assintoticamente a* $F(\tau) \in \mathbb{C}$ *se fixados quaisquer* r, s, *existe* M *tal que para* m *fixo,* $m \geq M$

$$(\frac{d^r F(\tau)}{d^r \tau} - \sum_{k=0}^{m} \frac{d^r g_k(\tau)}{d^r \tau})\tau^s$$

é limitada quando $\tau \to \infty$.

Usaremos a notação $F(\tau) \sim \sum_0^\infty g_k(\tau)$ que estende a notação anterior.

Note que a série acima não converge na maioria dos casos pelo teorema de E. Borel [8]; os termos $\frac{f^{2k}(0)}{(2k)!!}$ podem ser qualquer coisa!!!

A expressão acima, no entanto, faz completo sentido matemático, se interpretada de acordo com a última definição.

Observamos que por definição $F(\tau)' \sim \sum_0^\infty g_k'(\tau)$.

Usando a notação acima, podemos concluir das considerações anteriores que

$$F(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}(i/2)^k \frac{f^{2k}(0)}{(2k)!!}\tau^{-k-1/2} \tag{1}$$

Quando na definição acima falamos em derivada r-ésima de F estamos pensando na expressão formal da derivada, ou seja, por exemplo para $r = 1$ usamos que

$$F'(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} ix^2 f(x) e^{i\tau x^2} dx$$

quando

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^2} dx.$$

Mais geralmente, por indução

$$F^{(j)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix^2)^j f(x) e^{i\tau x^2} dx.$$

Note que dependendo de f o termo $\sqrt{\pi}(i/2)^k \frac{f^{2k}(0)}{(2k)!!}$ pode ser qualquer coisa. De qualquer modo, através de (1), no caso $\phi(x) = x^2$, fomos capazes de caracterizar o comportamento assintótico de F para τ grande.

Vamos apresentar a seguir, a título de ilustração, um exemplo que embora não seja exatamente o caso considerado acima, dá a idéia exata das questões que desejamos analisar aqui.

O caso que vamos apresentar abaixo (tomado de [7]) tem a vantagem de utilizar apenas resultados elementares de Cálculo Diferencial e Integral.

Considere a função $F(\tau)$ tomando valores reais como função da variável τ (vamos estar interessados apenas em valores grandes de τ):

$$F(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x}}{1+x} dx.$$

Note que $F(\tau)$ vai a zero quando τ vai a infinito.

Note que a principal diferença do caso acima para o caso anteriormente considerado da fase estacionária (consideramos agora o caso particular que corresponde na notação anterior a $f(x) = 1/(1+x)$ e $\phi(x) = x$), é que consideramos $e^{-\tau x}$ e não $e^{-i\tau x}$; no entanto as idéias básicas que funcionam num caso funcionam no outro.

Vamos mostrar que tal função F para valores grandes de τ pode ser aproximada por uma série de potências que tem uma expressão bem simples:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}.$$

Observe que tal série não é convergente!!! A utilidade de considerar tal série deriva do seguinte fato: $F(2)$ é mal aproximado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}},$$

mas $F(10)$ (neste caso $\tau = 10$ pode ser considerado grande) é aproximado com erro percentual de menos de $0,0006$ por $\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n n!}{10^{n+1}}$, ou seja os primeiros três termos de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{10^{n+1}}$ são tais que $|\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n n!}{10^{n+1}} - F(10)| \leq F(10)0,0006$.

Desejamos enfatizar que estamos dizendo acima que $F(\tau)$ é aproximado por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}$ apenas para valores grandes de τ!!!

A seguinte definição para F tomando valores reais é análoga à anteriormente considerada para F tomando valores complexos.

Definição 2.5 *Dizemos que* $\sum_0^\infty g_k(\tau)$ *converge assintoticamente a* $F(\tau) \in \mathbf{R}$*, quando* τ *vai a infinito, se fixados quaisquer* r, s*, existe* M *tal que para* m *fixo,* $m \geq M$

$$|\frac{d^r F(\tau)}{d^r \tau} - \sum_{k=0}^{m} \frac{d^r g_k(\tau)}{d^r \tau}|\tau^s$$

é limitada quando $\tau \to \infty$.

Neste caso dizemos que

$$F(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\tau)$$

Existe uma diferença fundamental entre **séries convergentes**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n = G(\tau)$$

e **séries assintóticas, quando** τ **vai a infinito,** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n \sim F(\tau)$.

No primeiro caso, dado ϵ e τ, existe N tal que

$$|\sum_{n=0}^{N} a_n \tau^n - G(\tau)| < \epsilon,$$

enquanto no segundo caso, dado ϵ e N existe $K > 0$ tal que

$$|\sum_{n=0}^{N} a_n \tau^n - F(\tau)| < \epsilon \tau^{-N}$$

para $\tau > K$. Note que o K depende de ϵ e N; estamos considerando na aproximação um erro percentual que leva em conta a grandeza do valor de τ utilizado.

Sendo assim, o que ocorre de fato no caso das séries assintóticas é que para τ fixo a aproximação é boa para N pequeno, mas fica ruim para N de ordem maior que τ.

No nosso caso $g_n(\tau) = \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}$ e afirmamos que

$$F(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}},$$

Vamos elaborar um pouco sobre o sentido do $\sim$; mais exatamente vamos considerar a questão apenas para $r = 0$.

Ora,

$$\frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{N-1} x^{N-1},$$

portanto, para todo x

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{N-1} (-1)^n x^n + \frac{(-1)^N x^N}{1+x}.$$

Usando a expansão acima na forma integral de F obtemos

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}} + (-1)^N \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x} x^N}{1+x} dx, .$$

Note que a parte esquerda do somatório acima coincide com os primeiros N termos de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}$, sendo assim o erro na aproximação de F por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}$ é

$$E_N(\tau) = (-1)^N \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x} x^N}{1+x} dx,$$

logo

$$|E_N(\tau)| = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x} x^N}{1+x} dx < \int_0^\infty \frac{e^{-\tau x} x^N}{1} dx \frac{N!}{\tau^{N+1}},$$

Visto de outro modo

$$|F(\tau) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}}| \tau^{N+1} \leq N!$$

e $N!$ é uma constante.

Sendo assim, na definição 2.4, dado $s = N + 1$ devemos escolher $M = N$. Note que para $s = N + 1$ fixado, a constante $N!$ é muito grande (se N é grande) mas fixa.

Acreditamos que com o exemplo acima ficou claro o sentido da afirmação

$$F(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\tau^{n+1}},$$

3 Fase não degenerada

Voltamos agora a considerar o caso em que F toma valores complexos.

Vamos considerar agora o caso em que $\phi(x)$ possui vários pontos críticos isolados $p_1, p_2, \ldots$. Sejam V_i respectivamente vizinhanças duas a duas disjuntas dos pontos p_i.

Considere U_m coleção de abertos tal que $\cup_{m,i} U_m \cup V_i = \mathbf{R}$, tal que p_i não está em nenhum U_m e ainda que a cobertura de $\mathbf{R}$ seja localmente finita.

Seja θ_m, ϵ_j uma partição da unidade subordinada a partição. Estamos usando a notação que θ_m tem suporte em U_m e ϵ_j tem suporte em V_j.

Sendo assim

$$F(\tau) = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \theta_m(x) f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx + \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_j(x) f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx.$$

Observamos que ambas as somas são finitas e que basta pela proposição 2 examinar

$$\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_j(x) f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx.$$

Ou seja, basta examinar individualmente

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$$

quando o suporte de f está em um intervalo $(-\delta, \delta)$ e 0 é ponto crítico isolado de ϕ (podemos transladar o problema e colocar o ponto crítico no ponto 0).

No caso em que 0 é não degenerado ($\phi'(0) = 0, \phi''(0) \neq 0$), existe uma mudança de coordenadas local $x = x(y)$ tal que $\phi(x(y)) = y^2$. Neste caso recaímos na proposição 2.3, pois

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x(y))e^{i\tau y^2}x'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{i\tau y^2}dy. \tag{2}$$

Vamos considerar com mais detalhe agora o caso em que todos os pontos críticos de ϕ são não-degenerados. Neste caso, temos que escolher com mais cuidado os intervalos abertos U_m, V_j.

É claro que $\phi(x) - \phi(p_j) = (x - p_j)^2\psi_j(x)$, onde ψ_j é analítica e $\psi_j(p_j) = \frac{1}{2}\phi''(p_j)$. Seja $\mu_j = sgn(\phi''(p_j))$. Definimos a nova variável

$$y = (x - p_j)\sqrt{\mu_j\psi_j(x)}$$

na vizinhança de p_j. Temos

$$\frac{dy}{dx}(p_j) > 0.$$

Tomamos $V_j = (p_j - \delta_j, p_j + \delta_j)$ tal que seja válida a mudança de variável neste intervalo. Depois escolhemos os U_m tais que

$$U_m \cap \left(p_j - \frac{\delta_j}{2}, p_j + \frac{\delta_j}{2}\right)$$

seja vazio para todos m e j. Nestas condições:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_j(x)f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx = \int_{p_j-\delta_j}^{p_j+\delta_j} \epsilon_j(x)f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx =$$

$$= e^{i\tau\phi(p_j)}\int_{p_j-\delta_j}^{p_j+\delta_j} \epsilon_j(x)f(x)e^{i\tau(\phi(x)-\phi(p_j))}dx =$$

$$= e^{i\tau\phi(p_j)}\int_{x(p_j-\delta_j)}^{x(p_j+\delta_j)} \epsilon_j(x(y))f(x(y))e^{i\mu_j\tau y^2}\frac{dx}{dy}dy =$$

$$= e^{i\tau\phi(p_j)}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\epsilon_j(x(y))f(x(y))\frac{dx}{dy}\right]e^{i\mu_j\tau y^2}dy$$

onde $\epsilon_j(x(y)) = 1$ na vizinhança de 0. Seja:

$$c_{jk} = \frac{d^{2k}\left[f(x(y))\frac{dx}{dy}\right]}{dy^{2k}}(0).$$

Observamos que os c_{jk} podem ser efetivamente calculados porque as derivadas de $x(y)$ calculam-se derivando sucessivamente a identidade $y = (x - p_j)\sqrt{\mu_j \psi_j(x)}$ respeito de y.

1º caso) $\phi''(p_j) > 0$. Neste caso, $\mu_j = 1$. Pelo que vimos antes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_j(x(y)) f(x(y)) \frac{dx}{dy} e^{i\tau y^2} dy \sim \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{c_{jk}}{(2k)!!} \tau^{-k-\frac{1}{2}}.$$

2º caso) $\phi''(p_j) < 0$. Neste caso, $\mu_j = -1$. Observemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\tau y^2} dy = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(y) e^{i\tau y^2} dy}$$

para toda $g \in C_0^\infty(I\!R)$. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_j(x(y)) f(x(y)) \frac{dx}{dy} e^{-i\tau y^2} dy \sim$$
$$\sim \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^k \frac{c_{jk}}{(2k)!!} \tau^{-k-\frac{1}{2}}.$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx \sim$$
$$\sim \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k$$
$$\left[e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{\phi''(p_j)>0} e^{i\tau\phi(p_j)} c_{jk} + (-1)^k e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{\phi''(p_j)<0} e^{i\tau\phi(p_j)} c_{jk}\right] \times \frac{\tau^{-k-\frac{1}{2}}}{(2k)!!}.$$

Por definição

$$c_{j0} = f(p_j)\frac{dx}{dy}(0) = f(p_j)\left[\frac{dy}{dx}(p_j)\right]^{-1} = \frac{f(p_j)}{\sqrt{\mu_j\psi_j(p_j)}}\frac{\sqrt{2}f(p_j)}{\sqrt{|\phi''(p_j)|}}.$$

Logo, da anterior resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx =$$

$$\left[\sqrt{2\pi}\sum_{\phi''(p_j)>0} f(p_j)\frac{e^{i(\tau\phi(p_j)+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|\phi''(p_j)|}} + \right.$$

$$\left. +\sqrt{2\pi}\sum_{\phi''(p_j)<0} f(p_j)\frac{e^{i(\tau\phi(p_j)-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|\phi''(p_j)|}}\right]\tau^{-\frac{1}{2}} + 0(\tau^{-1})$$

para $\tau \to +\infty$.

Fica então determinado o termo dominante de $F(\tau)$ como o termo à esquerda da última linha (vai a zero como $\tau^{-\frac{1}{2}}$).

4 Aplicação às integrais de Airy generalizadas

Seja

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\phi(x)}dx$$

onde $\phi(x)$ é um polinômio, a coeficientes reais, do qual todos os pontos críticos são não degenerados e cujo grau é $n \geq 2$.

Lema 4.1 *A integral precedente converge para todo $\tau \in I\!R$, $\tau > 0$ e define uma função C^∞ de τ em $(0, +\infty)$.*

Seja I um intervalo que contém no seu interior todas as raízes de $\phi(x)$, $\phi'(x)$ e $\phi''(x)$. Seja $f \in C_0^\infty(I\!R)$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in I$. Seja $g(x) = 1 - f(x)$.

Então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\phi(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx.$$

Como f tem suporte compacto o Lema 4.1 segue imediatamente do lema seguinte, que provaremos depois.

Lema 4.2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx,$$

$\tau > 0$, converge e define uma função C^∞ de τ que tem decrescimento rápido para $\tau \to +\infty$.

O Lema 4.2 nos diz também, que para ter o desenvolvimento assintótico de $F(\tau)$ basta ter o de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\tau\phi(x)}dx.$$

Mas este último se calcula como antes, observando ainda que $f = 1$ na vizinhança de cada ponto crítico de ϕ.

Vamos aplicar o anterior à função de Airy

$$Ai(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}\omega^3 + t\omega\right)d\omega$$

e estudar seu comportamento para $t \to \pm\infty$.

Consideremos primeiro para $t \to -\infty$.

Então, consideramos para $t \to +\infty$, a função:

$$G(t) = Ai(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}\omega^3 - t\omega\right)d\omega.$$

Mudando de variável: $t = \tau^{\frac{2}{3}}$ obtemos

$$F(\tau) = G(\tau^{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}\omega^3 - \tau^{\frac{2}{3}}\omega\right)d\omega.$$

Mudemos agora a variável de integração: $\omega = \tau^{\frac{1}{3}}(1 + x)$:

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[\frac{1}{3}\tau(1+x)^3 - \tau(1+x)\right]dx \\ &= \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[\tau\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}\right)\right]dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(\tau) = \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{2\pi} Re\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}\right)}dx$$

e estamos no caso anterior com:

$$\phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}.$$

Os pontos críticos são $p_1 = -2$ e $p_2 = 0$. Temos que:

$$\phi(p_1) = \frac{2}{3}, \quad \phi''(p_1) = -2, \quad \phi(p_2) = -\frac{2}{3}, \quad \phi''(p_2) = 2.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{2\pi} Re\left[\left(\sqrt{2\pi}\frac{e^{i\left(-\frac{2}{3}\tau+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\pi}\frac{e^{i\left(\frac{2}{3}\tau-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}\right)\tau^{-\frac{1}{2}} + 0(\tau^{-1})\right] \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{2}{3}\tau - \frac{\pi}{4}\right) + 0(\tau^{-\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

Logo,

$$G(t) = \pi^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + 0(t^{-1})$$

resultado que melhora o de Olver, página 103, mas que resulta também de Olver, página 392.

O mesmo método aplicado a $Ai(t)$ para $t \to +\infty$ mostra que $Ai(t) \sim 0$ para $t \to +\infty$.

Prova do Lema 4.2 Vamos denotar por $C_k^\infty(I\!R)$ o espaço das funções $f : I\!R \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ tais que para todo $j = 0, 1, \ldots,$ vale

$$\frac{d^j f}{dx^j} = 0(|x|^{-k})$$

para $x \to \pm\infty$.

Por exemplo, se $f \in C^\infty(I\!R)$ e se existe $K > 0$ tal que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se $|x| \geq |K|$, onde p, q são polinômios e (grau(q) $-$ grau(p))$\geq k$, então $f \in C_k^\infty(I\!R)$.

Além disso, se $f \in C_k^\infty(I\!R)$ e $p(x)$ é um polinômio de grau $m \leq k$ então $p(x)f(x) \in C_{k-m}^\infty(I\!R)$. □

Afirmação: Para cada $k = 1, 2, \ldots$ existe $h \in C_k^\infty(I\!R)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx = \mu(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{i\tau\phi(x)}dx$$

$(\tau > 0)$ onde $\mu(\tau) = c\tau^{-r}$, onde c é uma constante, e $r \geq k$.

Com efeito,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx\frac{1}{i\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{\phi'(x)}e^{i\tau\phi(x)}i\tau\phi'(x)dx$$

(observe que $g(x)/\phi'(x) \in C^\infty(I\!R)$ porque g é nula sobre um aberto que contém os zeros de ϕ'). Logo, por integração por partes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx = \frac{1}{i\tau}\left[\frac{g(x)}{\phi'(x)}e^{i\tau\phi(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)e^{i\tau\phi(x)}dx$$

onde

$$g_1(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

para $|x|$ suficientemente grande, com p, q polinômios e grau$(q)-$grau$(p) = n$, uma vez que $g(x) = 1$ para $|x|$ bem grande. Pela mesma razão e dado que o grau $\phi' \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx\frac{i}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)e^{i\tau\phi(x)}dx$$

onde $g_1(x) \in C_n^\infty(I\!R)$. Iterando este procedimento, decorre a afirmação.

Da afirmação com $k = 2$, já resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\tau\phi(x)}dx$$

é convergente e define $G : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

Seja dado $m(= 0, 1, 2, \ldots)$. Tomamos $k > mn + 2$. Pela afirmação:

$$G(\tau) = \mu(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{i\tau\phi(x)}dx$$

onde a integral converge absolutamente, junto com todas as suas derivadas respeito de τ até a ordem m. Como $\mu(\tau) = c\tau^{-r}$ com $r \geq k$, decorre daí que $G(\tau)$ é derivável até a ordem m e

$$\frac{d^j G}{d^j \tau} = 0(\tau^{-k})$$

para $0 \leq j \leq m$. Como m é arbitrário, $G \in C^\infty(0, +\infty)$ e $G \sim 0$.

5 Fase com pontos de cáustica

O item anterior dá conta do caso em que os pontos críticos são não degenerados.

Supondo, por outro lado, que o ponto crítico seja degenerado (cáustica), existe uma mudança de coordenadas local tal que $\phi(x(y)) = y^m, m \geq 3$.

Vamos portanto analisar o caso $\phi(x) = x^m$, $m \geq 3$ (o caso $\phi(x) = -x^m$ é obtido a partir deste por conjugação).

Vamos assumir inicialmente, para simplificar, que f possa ser escrito como $f(x) = x^k g(x)$, onde g é constante igual a 1 numa vizinhança de 0.

Como $\phi(x) = x^m, m \geq 3$, temos então para cada k fixo que que

$$F_k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau x^m} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^m} dx$$

satisfaz

$$F_k'(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} i x^m f(x) e^{i\tau x^m} dx 1/(m\tau) \int_{-\infty}^{\infty} (x f(x)) \, (i x^{m-1} m\tau e^{i\tau x^m}) dx.$$

Integrando por partes,

$$F_k'(\tau) = -1/(m\tau) \int_{-\infty}^{\infty} (x f(x))' \, e^{i\tau x^m} dx$$

$$-1/(m\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^m} dx - 1/(m\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x f'(x) \, e^{i\tau x^m} dx$$

$$-1/(m\tau) F_k(\tau) - 1/(m\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x f'(x) \, e^{i\tau x^m} dx.$$

Ou seja,

$$m\tau F_k'(\tau) + F_k(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} x f'(x)\, e^{i\tau x^m}\, dx.$$

Ora,

$$xf'(x) = kx^k g(x) + x^{k+1}g'(x) = kf(x) + x^{k+1}g'(x).$$

Como 0 não está no suporte de $g'(x)$, a proposição 2.2 nos diz finalmente que $m\tau F_k'(\tau) + (k+1)F_k(\tau)$ é de decrescimento rápido.

Como F_k está implícito na última equação, não sabemos ainda determinar o assintótico de $F_k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau x^m} dx$, onde g é constante igual a 1 numa vizinhança de 0, mas sabemos que satisfaz $m\tau F_k'(\tau) + (k+1)F_k(\tau) \sim 0$. Vamos a seguir determinar o assintótico de $F_k(\tau)$, mas antes precisamos de uma definição que vai contemplar a possibilidade de termos o conceito de uma série não convergente como solução de uma equação diferencial (no sentido assintótico).

Definição 5.1 *Sejam $p_0(\tau), p_1(\tau), .., p_n(\tau)$ polinômios. Dizemos que a função C^∞, $y(\tau)$, é solução da equação diferencial assintótica linear*

$$p_n(\tau)\frac{d^n y(\tau)}{d\tau^n} + ... + p_1(\tau)\frac{dy(\tau)}{d\tau} + p_0(\tau)y(\tau) \sim 0,$$

se

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(\tau)\frac{d^j y(\tau)}{d\tau^j}$$

é de decrescimento rápido.

A partir da definição acima, note que as considerações feitas anteriormente mostram que $F_k(\tau)$ é solução de

$$m\tau\frac{dy(\tau)}{d\tau} + (k+1)y(\tau) \sim 0,$$

ou equivalentemente

$$m\tau\frac{dy(\tau)}{d\tau} + (k+1)y(\tau) = b(\tau)$$

onde $b(\tau)$ é de decrescimento rápido.

Uma solução particular da equação acima é

$$y(\tau) = \frac{-1}{m}\tau^{-(k+1)/m} \int_{\tau}^{\infty} x^{(k+1-m)/m} b(x)dx$$

que é de decrescimento rápido.

A solução geral é $c\tau^{-(k+1)/m} + y(\tau)$.

Decorre daí que existe constante c_k tal que $F_k(\tau)$ é assintoticamente equivalente a

$$c_k \tau^{-(k+1)/m}. \tag{3}$$

Concluímos portanto a análise do assintótico de

$$F_k(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau x^m} dx$$

no caso em que g é constante igual a 1 numa vizinhança de 0. O valor das contantes c_k devem ser determinados em cada caso.

Vamos agora analisar o caso um pouco mais geral de $f(x) = x^k g(x)$ (sem hipóteses sobre g) com g qualquer em C_0^∞, mas para isto precisamos antes avaliar a proposição abaixo:

Proposição 5.2 *Dado $g \in C_0^\infty$ e $N \geq 0$ existe $K \geq 0$ tal que*

$$\tau^N \frac{d^j}{d\tau^j} \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau x^m} dx = \tau^N \frac{d^j}{d\tau^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau x^m} dx$$

é limitada para $\tau \to \infty$ e para todo j se $k \geq K$.

Prova: Se $k \geq m$, integrando por partes temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau x^m} dx = 1/(mi\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-m+1} g(x) i\tau m x^{m-1} e^{i\tau x^m} dx =$$

$$-1/(mi\tau) \int_{-\infty}^{\infty} (x^{k-m+1} g(x))' e^{i\tau x^m} dx$$

e $(x^{k-m+1}g(x))' = x^{k-m}h(x)$ onde $h(x)$ está em C_0^∞, o que permite iterar o cálculo. O resultado segue de derivar a expressão várias vezes. □

O caso em que $\phi(x)$ é analítica (não só da forma x^m) é obtido a partir da proposição 5.2 e através de mudança de variável como em (2) acima. Isto dá conta do caso $F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$ com $g \in C_0^\infty$.

Vamos agora, finalmente, analisar o caso mais geral de um $f(x)$ qualquer e $\phi(x)$ analítica, isto é, o caso $F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$ com $f \in C_0^\infty$.

Escreva

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{k-1} x^{k-1} + x^k g(x)$$

onde $g \in C_0^\infty$.

Podemos substituir na análise $f(x)$ por $f(x)h(x)$ onde $h(x)$ tem suporte em uma pequena vizinhança de 0 (usando uma partição da unidade), ou seja, basta analisar o assintótico de

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{k-1} x^{k-1} + x^k g(x)) e^{i\tau\phi(x)} dx$$

Para o assintótico dos primeiros termos usamos (3) e para o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k h(x) g(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$$

usamos a proposição 5.2.

Resulta, portanto, que para $F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\tau\phi(x)} dx$ com $f \in C_0^\infty$. existe desenvolvimento assintótico da forma

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{-(k+1)/m}$$

O primeiro valor c_k não nulo do desenvolvimento acima, caracteriza o termo principal de decaimento de $F(\tau)$ quanto $\tau \to \infty$, ou seja $c_k \tau^{-(k+1)/m}$ é o termo principal do ponto de vista assintótico. O valor de tal k é denominado de expoente inicial ou invariante de Malgrange. Referimos o leitor para [8] onde são apresentadas considerações gerais sobre tal invariante.

O texto acima ilustra de maneira breve a fundamentação matemática da teoria das séries de potências não convergentes e sua relação com as integrais oscilantes.

Referências

[1] M. Fedoryuk, "Asymptotic Methods in Analysis", Springer Verlag.
[2] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison Wesley, (1972).
[3] V. Guillemin and S. Sternberg, "Geometric Asymptotics", AMS, (1977).
[4] R. Luneburg, "Mathematical Theory of Optics", Univ. of California Press, (1964).
[5] V. Maslov and M. Fedoryuk, "Semi-Classical Approximations in Quantum Mechanics", Dordrect: Reidel (1981).
[6] J. Murray, "Asymptotic Analysis", Claredon Press, Oxford (1974).
[7] F. Olver, "Asymptotics and Special Functions", Acad. Press, (1974).
[8] V. Arnold, S. Varshenko and L. Goussain Zade, "Singularites de Applications Differentiables", MIR.

Instituto de Matemática
UFRGS