MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº36 – junho 2004 – pp. 23–32

O Lema de Seleção da Curva e o Teorema de Morse-Sard

Carlos Gustavo Moreira e
Maria Aparecida Soares Ruas

1 Introdução

O *Teorema de Morse-Sard* é um dos resultados centrais de topologia diferencial. É o resultado fundamental que faz a teoria de transversalidade funcionar, e tem muitas aplicações importantes, em particular em sistemas dinâmicos. A prova clássica do teorema de Morse- Sard é baseada em um resultado fundamental conhecido como o lema de decomposição de Morse, segundo o qual, dada uma função de classe C^k $f : U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, é possível decompor o conjunto crítico de f, $\text{crit}(f) = \{x \in U \mid df(x) = 0\}$, em uma união enumerável de conjuntos A_j de tal forma que, se x é um ponto de A_j e x_n é uma seqüência de pontos de A_j distintos de x convergindo para x, então $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{|x_n-x|^k} = 0$. No artigo original de Morse, o argumento da prova deste resultado usa uma indução dupla, em n (a dimensão do domínio), e k (a classe de diferenciabilidade de f).

Neste artigo, mostramos que não é preciso decompor o conjunto crítico de f para que o resultado de Morse seja verdadeiro: na situação descrita acima, se x é um ponto de $\text{crit}(f)$ e x_n é uma seqüência de pontos de $\text{crit}(f)$, distintos de x, convergindo a x então $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{|x_n-x|^k} = 0$. Para provar este fato, utilizamos um resultado de geometria algébrica real, denominado por Milnor *lema de seleção da curva*, segundo o qual se a origem pertence ao fecho de um conjunto semi-algébrico X então existe uma curva analítica p definida em $[0,1)$ com $p(0) = 0$ tal que $p(t)$ pertence a X para todo t em $(0,1)$. Mostraremos como obter a partir desse lema uma desigualdade devida a Bochnak e Lojasiewicz (o Teorema (2.3)), que parece bastante a desigualdade do valor médio, exceto pelo fato de estimarmos o módulo da diferença de uma função em dois pontos em termos da distância entre eles e da norma da derivada em um desses pontos (e não, como na desigualdade clássica do valor médio, em todo o segmento que os liga).

2 O Lema de Seleção da Curva

O *Lema de Seleção da Curva,* que apresentamos nesta seção, é um resultado fundamental sobre a estrutura local dos conjuntos semi-algébricos, enunciado e demonstrado por Milnor em [6]. As primeiras versões deste lema apareceram na década de 50, nos trabalhos de Bruhat e Cartan ([1], Theorem 1) e de Wallace ([7], Lemma 18.3).

Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico, isto é, o conjunto dos zeros de um número finito de equações polinomiais, e $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto definido por um número finito de desigualdades polinomiais, ou seja,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n |\, g_1(x) > 0, \ldots, g_l(x) > 0\}.$$

O conjunto $U \cap V$ definido por um número finito de equações e inequações polinomiais é um conjunto semi-algébrico.

Lema 2.1 (Lema de Seleção da Curva) *Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, $0 \in fecho(U \cap V)$, então existe uma curva real analítica $p : [0,\epsilon) \to \mathbb{R}^n$, com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in U \cap V$, para $t > 0$.*

A demonstração dada por Milnor consta de duas etapas principais: (1) dim V=1. Neste caso o argumento é simples: a curva algébrica V tem um número finito de ramos pela origem, um dos quais contém necessariamente pontos de U arbitrariamente próximos de 0. Seja $x = p(t)$, $|t| < \epsilon$ uma parametrização real analítica deste ramo. Para cada g_i, a função $g_i(p(t))$ deve ser > 0 para todo t em um intervalo $0 < t < \epsilon'$, ou ≤ 0 para todo $0 < t < \epsilon'$. Portanto o semi-ramo $p(0,\epsilon')$ ou está contido em

U, ou é disjunto de U para todo ϵ' suficientemente pequeno. Da mesma forma, o semi-ramo $p(-\epsilon', 0)$ está contido em U ou é disjunto de U. Mas, por hipótese, $p(-\epsilon', \epsilon)$ contém pontos de U arbitrariamente próximos de 0, portanto um dos semi-ramos está necessariamente contido em U.

(2) $\dim V \geq 2$. O argumento neste caso, bem mais elaborado, consiste em construir um subconjunto algébrico próprio $V_1 \subset V$ tal que $0 \in \text{fecho}(U \cap V_1)$. Uma vez determinado tal subconjunto V_1, o procedimento pode então ser iterado indutivamente até que seja determinado um conjunto algébrico V_q de dimensão ≤ 1 tal que $0 \in \text{fecho}(U \cap V_q)$.

Observação 2.2 *É possível reparametrizar a curva analítica* $\{x = p(t) : 0 \leq t < \epsilon\}$ *da prova acima para obter uma curva de classe* C^1*:* $\{x = \gamma(s) : 0 \leq s < \epsilon\}$, $\gamma(0) = 0$ *e* $|\gamma'(s)| = 1$. *De fato, seja* k *o grau do primeiro termo não nulo na série de Taylor em* 0 *de* $x = p(t)$. *A mudança de parâmetros* $\lambda = h(t) = t^k$ *é um homeomorfismo para* $0 \leq t < \epsilon$ *e é fácil verificar que* $\gamma(\lambda) = p \circ h^{-1}(\lambda)$ *é de classe* C^1 *em* $[0, \epsilon)$. *É suficiente agora reparametrizar* γ *pelo comprimento de arco.*

Sugerimos ao leitor a leitura da demonstração elegante e detalhada do lema de seleção da curva apresentada por Milnor no capítulo 3 de [6].

Uma prova mais recente do lema pode ser encontrada em [4]. Nesse livro, Coste obtém a prova do lema como uma conseqüência simples do teorema de triangulação de conjuntos semi-algébricos.

Muitas são as aplicações conhecidas do lema de seleção da curva, que também é verdadeiro na categoria analítica, isto é, quando o conjunto V e as funções g_i são analíticos em uma vizinhança de 0. O resultado seguinte, demonstrado por Bochnak e Lojasiewicz em [2] para funções analíticas, é uma conseqüência do Lema (2.1).

Teorema 2.3 (Lemma 2, [2]) *Seja* $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função polinomial com* $f(0) = 0$. *Dado* $C > 1$ *existe uma vizinhança* V *de* 0 *tal que* $|f(x)| \leq C|x||df(x)|$, $\forall x \in V$.

Prova: Esta é a prova dada por Bochnak e Lojasiewicz em [2]. Suponhamos que 0 pertença ao fecho do conjunto $\{C|x||df(x)| < |f(x)|\}$; este conjunto é semi-algébrico e portanto, pelo Lema de Seleção da Curva, contém um arco de classe C^1: $\{x = \gamma(t) : 0 < t \leq \epsilon\}$, $\gamma(0) = 0$ e $|\gamma'(t)| = 1$. Seja $\phi = f \circ \gamma$; temos então $|t||\phi'(t)| \leq \rho|\phi(t)|$ em $[0, \delta]$ para algum ρ tal que $1/C < \rho < 1$ e $\delta \in (0, \epsilon)$. Se $g(t) = log|\phi(t)|$, para $t \in (0, \delta)$, temos $g'(t) = \frac{<\phi'(t), \phi(t)>}{|\phi(t)|^2}$, e portanto $|g'(t)| \leq \frac{\rho}{t}$, $t \in (0, \delta)$. Dado s em $(0, \delta)$, integrando $g'(t)$ entre s e δ e usando a desigualdade acima, obtemos $\log(\frac{|\phi(\delta)|}{|\phi(s)|}) = g(\delta) - g(s) \leq \rho \log(\frac{\delta}{s})$, e portanto $|\phi(s)| \geq (\frac{s}{\delta})^\rho |\phi(\delta)|$, para todo s em $(0, \delta)$, o que é impossível. □

Observação 2.4 *Esse teorema não é verdadeiro sem alguma hipótese de analiticidade da função f, pois é possível construir funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: existe uma seqüência de pontos críticos, nos quais f não se anula, tendendo a um ponto onde f se anula (exercício!). Nesse caso nenhuma desigualdade como a do Teorema* (2.3) *se verifica.*

3 O Teorema de Morse-Sard

Vamos nesta seção usar o Teorema (2.3) acima para dar uma demonstração do Teorema de Morse-Sard. Começaremos pelo Teorema de Morse:

Teorema 3.1 *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n. Então $f(crit(f))$ tem medida nula em $\mathbb{R}$, onde $crit(f) := \{x \in U \mid df(x) = 0\}$.*

Prova: A prova clássica de Morse decompõe crit(f) em uma união de conjuntos A_i de forma que para todo i e todo

$$x \in A_i' \cap A_i,$$

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A_i}} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^n} = 0.$$

Vamos usar o Teorema (2.3) para mostrar (sem necessidade de decompor crit(f)) que $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \text{crit}(f)}} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^n} = 0$, para todo $x \in \text{crit}(f)' \cap U$.

Faremos isso por contradição: suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(y_k) - f(x)| \geq \varepsilon |y_k - x|^n$ para alguma seqüência (y_k) convergindo a x com $df(y_k) = 0$ para todo k. Seja agora $\tilde{f}$ o polinômio de Taylor de grau n de f no ponto x, $\tilde{f}(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (y - x)^k$. Temos $f(y) = \tilde{f}(y) + o(|y - x|^n)$, e portanto temos $|\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)| \geq \varepsilon/2 \cdot |y_k - x|^n$ para

k suficientemente grande. Por outro lado, $df(y) = d\tilde{f}(y) + o(|y-x|^{n-1})$ (pois $d\tilde{f}$ é o polinômio de Taylor de grau $n-1$ de df no ponto x), logo, como $df(y_k) = 0$ para todo k, $d\tilde{f}(y_k) = o(|y_k - x|^{n-1})$. Pelo Teorema (2.3), $|\tilde{f}(y_k)| \leq 2|y_k - x||d\tilde{f}(y_k)|$ para k suficientemente grande, e portanto $|\tilde{f}(y_k) - \tilde{f}(x)| = o(|y_k - x| \cdot |y_k - x|^{n-1}) = o(|y_k - x|^n)$, absurdo.

Como U é uma união enumerável de conjuntos limitados, e uniões enumeráveis de conjuntos de medida nula têm medida nula, podemos supor sem perda de generalidade que U é limitado (e portanto de volume finito).

Vamos agora usar o seguinte resultado, que é um caso particular do Lema de recobrimento de Vitali:

Lema 3.2 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de volume $V < +\infty$, e seja $X \subset U$ um subconjunto de modo que a todo $x \in X$, é associada uma bola $B(x, \delta_x) \subset U$. Então existe um conjunto (finito ou) enumerável $(x_i) \subset X$ tal que $X \subset \bigcup_i B(x_i, \delta_{x_i})$ e $\sum_i$ vol$(B(x_i, \delta_{x_i})) \leq 3^n \cdot V$.*

Para provar o lema acima, para cada $i \geq 1$, escolhemos um ponto $x_i \in X$ tal que $B(x_i, \delta_{x_i}/3) \cap \bigcup_{j<i} B(x_j, \delta_{x_j}/3) = \emptyset$ e $\delta_{x_i} > \frac{1}{2}\sup\{\delta > 0 \mid \exists\, x \in X, \delta_x = \delta$ e $B(x, \delta/3) \cap \bigcup_{j<i} B(x_j, \delta_x/3) = \emptyset\}$. Como as bolas $B(x_i, \delta_{x_i}/3)$ são disjuntas, temos que $\sum_i \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i}/3)) \leq V$, e logo $\sum_i \mathrm{vol}(B(x_i, \delta_{x_i})) \leq 3^n \cdot V$. Afirmamos que $X \subset \bigcup_i B(x_i, \delta_{x_i})$. De fato, dado $x \in X$, devemos ter $B(x, \delta_x/3) \cap \bigcup_i B(x_i, \delta_{x_i}/3) \neq \emptyset$, senão deveríamos incluir x no conjunto $\{x_i\}$ em algum momento. Mais ainda: se i_0 é o menor i tal que $B(x, \delta_x/3) \cap B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}/3) \neq \emptyset$, devemos ter $\delta_{x_{i_0}} > \delta_x/2$, pela escolha de x_{i_0}. Assim, $|x - x_{i_0}| < \delta_x/3 + \delta_{x_{i_0}}/3 < 2\delta_{x_{i_0}}/3 + \delta_{x_{i_0}}/3 = \delta_{x_{i_0}}$, ou seja, $x \in B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$.

Para concluir a prova do Teorema de Morse, notamos que para todo $x \in \mathrm{crit}(f)$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que $y \in \mathrm{crit}(f) \cap B(x, \delta_x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon \cdot C_n}{2 \cdot 3^n \mathrm{vol}(U)} \cdot |y - x|^n$, onde $C_n = \mathrm{vol}\, B(0,1)$. Assim, $f(\mathrm{crit}(f) \cap B(x, \delta_x)) \subset I_x$, onde $I_x = \left(f(x) - \frac{\varepsilon \cdot C_n}{2 \cdot 3^n \cdot \mathrm{vol}(U)} \cdot \delta_x^n, f(x) + \frac{\varepsilon \cdot C_n}{2 \cdot 3^n \cdot \mathrm{vol}(U)} \cdot \delta_x^n\right)$ é um intervalo cujo comprimento é $|I_x| = \frac{\varepsilon \cdot C_n}{3^n \cdot \mathrm{vol}(U)} \cdot \delta_x^n = \frac{\varepsilon}{3^n \cdot \mathrm{vol}(U)} \cdot \mathrm{vol}\, B(x, \delta_x)$. Pelo lema acima, existe um conjunto enumerável $(x_i) \subset \mathrm{crit}(f)$ com $\mathrm{crit}(f) \subset \bigcup_i B(x_i, \delta_{x_i})$ e $\sum_i \mathrm{vol} B(x_i, \delta_{x_i}) \leq 3^n \mathrm{vol}(U))$. Temos então

$$f(\mathrm{crit}(f)) = \bigcup_i f(\mathrm{crit}(f) \cap B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \bigcup_i I_{x_i},$$

mas $\sum_i |I_{x_i}| < \frac{\varepsilon}{3^n \text{vol}(U)} \cdot \sum_i$ vol $B(x_i, \delta_{x_i}) \leq \frac{\varepsilon}{3^n \text{vol}(U)} \cdot 3^n$ vol$(U) = \varepsilon$.

Isso mostra que $f(\text{crit}(f))$ tem medida nula em $\mathbb{R}$. $\square$

Vamos agora mostrar (como fez Sard) que o Teorema de Morse implica o teorema geral de Morse-Sard:

Teorema 3.3 (Morse-Sard) *Seja $m \geq n$ e f: crit(f) $:= \{x \in U \mid Df(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não é sobrejetiva$\}$. Então $f(\text{crit}(f))$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.*

Prova: Seja $C_p = \{x \in U \mid Df(x)$ tem posto $p\}$. Temos então $\text{crit}(f) = \bigcup_{p=0}^{n-1} C_p$. Basta mostrar que $f(C_p)$ tem medida nula para todo $p \leq n-1$. Fixemos $p \leq n-1$. Basta mostrar que para todo $x \in C_p$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta) \cap C_p)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (podemos cobrir C_p por uma quantidade enumerável dessas bolas $B(x,\delta)$). Se temos posto $Df(x)) = p$ existe uma vizinhança V de x tal que posto $(Df(y)) \geq p$ para todo $y \in V$. Podemos escrever (talvez trocando a ordem dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^m$) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de modo que $\pi_1(Df(x))\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ seja sobrejetiva.

Existe uma vizinhança W de x em $\mathbb{R}^m$ tal que a função $g\colon W \to \mathbb{R}^n$, $g(W) = \pi_1 f(W)$ é uma submersão.

Pela forma local das submersões, existe um difeomorfismo local (de classe C^n) $h\colon U \times V \to \tilde{W}$ com $U \subset \mathbb{R}^p, V \subset \mathbb{R}^{m-p}$ e $\tilde{W} \subset W \subset \mathbb{R}^n$ abertos tal que $g \circ h(u,v) \equiv u$, e logo $f \circ h(u,v) = (u, \tilde{f}(u,v))$. Podemos então supor que f é dessa forma. Agora, $(u,v) \in C_p \Leftrightarrow D_v\tilde{f}(u,v) = 0$. Assim, dado $u \in \mathbb{R}^p$, $F_u := \{(u,v), v \in \mathbb{R}^{m-p}\}$, $f(F_u \cap C_p) \subset \{u\} \times \tilde{f}_u(N)$, onde $\tilde{f}_u(v) := \tilde{f}(u,v)$ e $N = \{v \in V \mid D\tilde{f}_u(v) = 0\}$. Seja π uma projeção (qualquer) de $\mathbb{R}^{n-p}$ em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Morse, $\pi \circ \tilde{f}_u(N)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-p}$, $\forall u \in U$, e logo $\tilde{f}_u(N)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-p}$, $\forall u \in U$. Pelo Teorema de Fubini, $f(C_p)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Observação 3.4 *Restringindo, no argumento acima, o domínio de f a um compacto (não há perda de generalidade: o domínio U é uma união enumerável de compactos), temos C_p compacto (estamos num aberto onde o posto de Df é sempre $\geq p$), e logo $f(C_p)$ também é compacto.*

Precisamos então, para o argumento final, apenas do seguinte resultado (que é um caso particular do Teorema de Fubini):

Lema 3.5 *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ *um compacto tal que para todo* $x \in \mathbb{R}^p$, $K_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (x,y) \in K\}$ *tem medida nula (em* $\mathbb{R}^{n-p}$*). Então* K *tem medida nula (em* $\mathbb{R}^n$*).*

Prova:

Existe $R > 0$ tal que $K \subset B(0,R) \times \mathbb{R}^{n-p}$. Para cada $x \in B(0,R)$, K_x tem medida nula, donde dado $\varepsilon > 0$ existem bolas $B(y_i, r_i) \subset \mathbb{R}^{n-p}$ com $K_x \subset \bigcup_i B(y_i, r_i)$ e $\sum_i \text{vol } B(y_i, r_i) < \varepsilon$. Como K é compacto, existe $\delta > 0$ tal que $K \cap (B(x,\delta) \times \mathbb{R}^{n-p}) \subset \bigcup_i B(x,\delta) \times B(y_i, r_i)$. De fato, se existisse uma seqüência $(u_n, v_n) \in K$ com $\lim u_n = x$ e $v_n \notin \bigcup_i B(y_i, r_i)$, tomando, se necessário uma subseqüência convergente, teríamos $\lim v_n = v \notin \bigcup_i B(y_i, r_i)$ e então $\lim(u_n, v_n) = (x, v) \in K$, donde $v \in K_x \setminus \bigcup_i B(y_i, r_i)$, absurdo.

Pelo Lema (3.2), podemos cobrir $B(0,R)$ por bolas $B(x^{(j)}, \delta^{(j)})$ com

$$\sum \text{vol}(B(x^{(j)}, \delta^{(j)})) \leq 3^n \text{vol } B(0,R),$$

o que nos fornece uma cobertura de K pelas $B(x^{(j)}, \delta^{(j)}) \times B(y_i^{(j)}, r_i^{(j)})$ correspondentes. Como temos

$$\sum_{i,j} \text{vol}(B(x^{(j)}, \delta^{(j)}) \times B(y_i^{(j)}, r_i^{(j)})) <$$
$$\varepsilon \sum_j \text{vol} B(x^{(j)}, \delta^{(j)}) \leq 3^n \varepsilon \cdot \text{vol } B(0,R),$$

e ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno, K tem medida nula. □

4 Exemplos sobre o Teorema de Morse-Sard:

Vamos esboçar a construção de exemplos como os de [5] que mostram que a hipótese de diferenciabilidade do Teorema de Morse-Sard é necessária. Para isso, vamos definir, para $0 < \alpha < 1$ o *conjunto de Cantor homogêneo* K_α: retiramos inicialmente do intervalo $[0,1]$ o intervalo central $U_{11} = \left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right)$ de tamanho α. Após isso, retiramos dos dois intervalos que sobram $\left(\left[0, \frac{1-\alpha}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{1+\alpha}{2}, 1\right]\right)$ os dois intervalos centrais de proporção α, $U_{21} = \left(\left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2, \frac{1-\alpha^2}{2}\right)$ e $U_{22} = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2, \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha^2}{4}\right)$, respectivamente. Em geral, após a r-ésima etapa dessa construção, sobram 2^r intervalos de tamanho $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^r$. Retiramos do i-ésimo deles o intervalo aberto central $U_{(r+1)i}$ de proporção α (isto é, de tamanho $\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^r$) para $1 \leq i \leq 2^r$. O conjunto de Cantor K_α é o conjunto dos pontos que nunca são retirados em nenhuma etapa. Temos

$$K_\alpha = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n \mid \sigma_j \in \left\{0, \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right\},\ \forall j \right\}.$$

Note que $K_{1/3}$ é o conjunto de Cantor ternário usual.

Fixamos agora um homeomorfismo crescente de classe

$$C^\infty \psi \colon [0,1] \to [0,1]$$

tal que $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1) = 0$ para todo $j \geq 1$ (onde $\psi^{(j)}$ denota a j-ésima derivada de ψ). Dados α e β em $(0,1)$, podemos definir um homeomorfismo $f_{\alpha,\beta}$ de $[0,1]$ em $[0,1]$ tal que $f_{\alpha,\beta}(K_\alpha) = K_\beta$ da seguinte forma: definimos $f_{\alpha,\beta}(0) = 0$, $f_{\alpha,\beta}(1) = 1$ e, se $U_{ij}^{(\alpha)} = (a,b)$ e $U_{ij}^{(\beta)} = (c,d)$ são intervalos retirados correspondentes das construções de K_α e K_β, definimos $f_{\alpha,\beta}(x) = (d-c)\psi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)+c$, $\forall\, x \in (a,b)$. Estendemos $f_{\alpha,\beta}$ a K_α por continuidade. Não é difícil mostrar que, se $\left(\frac{1-\beta}{2}\right) / \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^k < 1$ então $\lim\limits_{r\to\infty} \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^r / \left(\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^r\right)^k = 0$, e, nesse caso, $f_{\alpha,\beta}$ é uma função de classe C^k, com $f_{\alpha,\beta}^{(j)}(x) = 0$, para todo $x \in K_\alpha$ e $1 \leq j \leq k$. Veja [BMPV] para mais detalhes.

Seja agora $\beta = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Temos

$$K_\beta = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \cdot \frac{1}{2^{nj}},\ \sigma_j \in \{0, 2^n - 1\},\ \forall j \right\},$$

ou seja, K_β é o conjunto dos números em $[0,1]$ cuja representação em base 2^n usa apenas os algarismos 0 e 2^n-1. Note que

$$\begin{aligned}
&K_\beta + 2K_\beta + \cdots + 2^{n-1}K_\beta := \\
&= \{x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n \mid x_i \in K_\beta,\ 1 \le i \le n\} \\
&= (2^n-1)\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\sigma_j^{(1)} + 2\sigma_j^{(2)} + 4\sigma_j^{(3)} + \cdots + 2^{n-1}\sigma_j^{(n)}\right)}{2^{nj}} \sigma_j^{(i)} \in \{0,1\},\ \forall i,j \right\} \\
&= (2^n-1)\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{2^{nj}},\ \mu_j \in \{0,1,2,\ldots,2^n-1\},\ \forall j \right\} \\
&= [0, 2^n-1].
\end{aligned}$$

Escolhemos agora $\alpha \in (0,1)$ tal que $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)$. Então $f_{\alpha,\beta}\colon [0,1] \to [0,1]$ é uma função de classe C^{n-1} com $f_{\alpha,\beta}(K_\alpha) = K_\beta$ e $f'_{\alpha,\beta}(x) = 0$, $\forall\, x \in K_\alpha$. Estendemos $f_{\alpha,\beta}$ a $\mathbb{R}$ definindo $f_{\alpha,\beta}(x) = 0$, $\forall\, x \le 0$ e $f_{\alpha,\beta}(x) = 1$, $\forall\, x \ge 1$. Temos que $f_{\alpha,\beta}$ continua de classe C^{n-1}. Definimos agora $F_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$F_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} f_{\alpha,\beta}(x_j).$$

Temos claramente $K_\alpha \times K_\alpha \times \cdots \times K_\alpha = K_\alpha^n$ contido no conjuntos dos pontos críticos de $F_{\alpha,\beta}$, e $F_{\alpha,\beta}(K_\alpha^n) = K_\beta + 2K_\beta + \cdots + 2^{n-1}K_\beta = [0, 2^n-1]$, o que mostra que a conclusão do Teorema de Morse é falsa se supusermos apenas que F é de classe C^{n-1}.

Considerando $G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ definida por $G(x,y) = (F_{\alpha,\beta}(x), y)$, temos G de classe C^{n-1}, mas a imagem de seus pontos críticos contém $[0, 2^n-1] \times \mathbb{R}^p$, que obviamente não tem medida nula em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. Assim, não podemos baixar em nenhum caso a hipótese de diferenciabilidade do Teorema de Morse-Sard (que garante que, se essa função fosse de classe C^n, a imagem do conjunto de seus pontos críticos teria medida nula).

Referências

[1] F. Bruhat e H.Cartan, Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, *C. R. Acad. Sci. Paris*,**244**, (1957), 988–990.

[2] J. Bochnak e S. Lojasiewicz, A converse of the Kuiper-Kuo Theorem, *Lecture Notes in Math.*, **192**, (1070), 254–261.

[3] R. Bamón, C.G. Moreira, S. Plaza e J. Vera, Differentiable structures of central Cantor sets, *Ergodic Theory Dynam. Systems,* **17** (1997), 1027–1042.

[4] M. Coste, An introduction to semialgebraic geometry, Institut de Recherches Mathèmatique de Rennes.

[5] C.G. Moreira, Hausdorff measures and the Morse-Sard theorem, *Publ. Mat.* **45** (2001), 149–162.

[6] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Princeton Univ. Press* (1968).

[7] A. H. Wallace, Algebraic approximation of curves, *Canad. J. Math.*, **10**, (1958), 242–278.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110.
cep: 22460-320 Rio de Janeiro, R.J., Brasil
E-mail:gugu@impa.br

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos
Universidade de São Paulo
Departamento de Matemática.
Caixa Postal 668,
cep: 13560-970 São Carlos, SP, Brasil
E-mail:maasruas@icmc.usp.br