MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº36 – junho 2004 – pp. 39–49

Ensino[1]

O Método da Bisseção

Francisco Satuf

1 Introdução

Para fins de motivação considere um casal de crianças que brinca de adivinhar números inteiros entre 1 e 100. O Menino pensa um número e a menina deve descobrí-lo. Inicialmente, a menina pergunta se o número é 50 e o menino responde que o número é maior do que 50. A menina então pergunta se o número é 75 e o menino responde que o número é menor do que 75. Em seguida, a menina pergunta se o número é 67 e o menino responde que o número é menor do que 75. Observemos que a menina escolhe números que estão próximos do ponto médio dos intervalos possíveis. Com esse procedimento, em poucas tentativas, a menina irá descobrir o número que o menino pensou. O Método da Bisseção consiste em aproveitar a idéia dessa brincadeira para se resolver equações que contenham apenas uma variável.

Esse trabalho inicia-se descrevendo o Método da Bisseção, estudando sua convergência e analisando as classes de problemas que esse método resolve. Confrontamos o Médoto da Bisseção com o Método de Newton devido ao grande sucesso desse último. Também estudamos o Teorema do Valor Intemediário, aos olhos do Método da Bisseção. O Teorema do Valor Intermediário é um teorema de existência de soluções de equações com uma incógnita. Porém, ao analisarmos o Método da Bisseção sob as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário, vemos que esse método,

[1]Seção coordenada por Walcy Santos

não só implica nesse teorema, como exibe uma seqüência que converge para uma solução de tal equação. Outro fato notável é a equivalência do Método da Bisseção com o Postulado de Dedekind.

2 A convergência no Método da Bisseção

Vamos imaginar uma função como no gráfico da Figura 1. O Método da

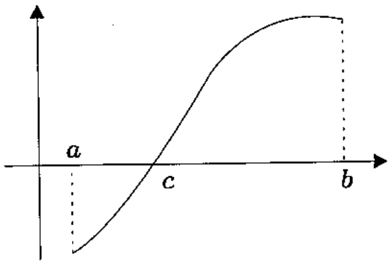

Figura 1: $f(a)f(b) < 0$.

Bisseção consiste em: dados uma função e três números a, b e *tolerância*, com $f(a)f(b) < 0$, encontrar c, tal que $|f(c)| <$*tolerância*. Vejamos o seguinte esquema.

$x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(y_2)$
(*) $x_3 = (x_1 + x_2)/2$, $y_3 = f(x_3)$
se $|y_3| <$*tolerância* então resposta é x_3
se $y_2 y_3 < 0$ então $x_1 = x_3$, $y_1 = y_3$
se não $x_2 = x_3$, $y_2 = y_3$
repita o processo a partir de (*).

Observemos que, inicialmente, x_3 é o ponto médio do intervalo $[a, b]$. No passo seguinte, uma das metades do segmento $[a, b]$ é desprezada e a outra é, então, dividida ao meio num novo ponto x_3. O processo prossegue de forma iterativa.

Vejamos, agora, que o Método da Bisseção gera duas seqüências (a_n) e (b_n), com as seguintes propriedades:

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b$$
$$b = b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \cdots \geq a$$
$$f(a_n)f(b_n) < 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Para tanto, iniciamos, definindo $a_1 = a$ e $b_1 = b$.

Vamos reescrever o algoritmo introduzindo as seqüências (a_n) e (b_n), em que n representa a n-ésima iteração. Se $f(b_1)f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$ defina $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$, caso contrário defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Prosseguimos o processo de maneira iterativa, isto é, se $f(b_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ defina $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1} = b_n$, caso contrário defina $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Veja a figura 2. Observamos que o

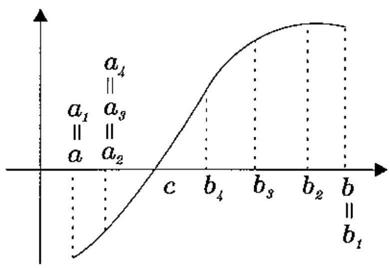

Figura 2: O Médoto da Bisseção.

Método da Bisseção gera uma seqüência de intervalos encaixantes

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots .$$

Como o comprimento de cada intervalo é sempre a metade do intervalo anterior, podemos concluir que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, concluímos que o Método da Bisseção é um caso particular do Teorema dos Intervalos Encaixantes, que pode ser encontrado em [2]. Este Teorema nos diz que se os intervalos são encaixantes e seus comprimentos tendem a zero, então existe um único $c \in [a, b]$, tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\},$$

ou equivalentemente, $c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$.

Retornando ao algoritmo, observamos que x_3 é, em cada passo, dado por $\frac{a_n + b_n}{2}$. Daí, temos que o Método da Bisseção define uma seqüência (c_n) dada por $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ que converge para c. Não é difícil verificar que

$$|c_n - c| < \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

3 Funcionalidade e Aplicabilidade do Método da Bisseção

Inicialmente, vamos responder a seguinte pergunta:

O Método da Bisseção funciona?

Resposta: Nem sempre.

O resultado abaixo nos dá uma condição para a funcionalidade do método.

Teorema 3.1 *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Bisseção gera uma seqüência (c_n) que converge para $c \in [a,b]$ e $f(c) = 0$.*

Demonstração: Tomemos (a_n), (b_n) e (c_n) como no §2. Suponhamos que $f(c) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(c) > 0$, pois caso contrário, bastaria analisarmos a função $(-f)$. Como $f(c) > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in [c-\delta, c+\delta]$. Como (a_n) é uma seqüência não decrescente convergindo para c, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $c - \delta < a_r \leq c$. Analogamente, existe $s \in \mathbb{N}$, tal que $c \leq b_s < c - \delta$. Tomando $N = \max\{r, s\}$, temos que a_N, $b_N \in [c-\delta, c+\delta]$, o que implica que $f(a_N) > 0$ e $f(b_N) > 0$, donde $f(a_N)f(b_N) > 0$, o que é uma contradição (veja figura 3).

□

Este Teorema pode ser visto como conseqüência do seguinte resultado.

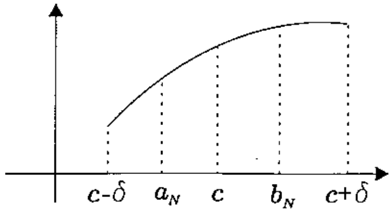

Figura 3: $f(a_r) > 0$, $f(a_s) > 0$, $f(b_N) > 0$ e $f(b_N) > 0$.

Teorema 3.2 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer. Se $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Bisseção gera uma seqüência (c_n) que converge para $c \in [a,b]$ e, além disto, ou algum dos limites laterais em c não existe, ou são diferentes, ou $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = 0$.*

A demonstração deste teorema é análoga à do teorema 3.1.

Do teorema 3.2, podemos ter outra utilidade para o Método da Bisseção, além a de encontrar zeros de funções. O teorema 3.2 nos diz que o Método da Bisseção serve para localizar pontos de descontinuidade de funções. Para tanto, basta introduzirmos no algoritmo outro mecanismo de parada através da limitação do número de iterações, caso a tolerância não seja alcançada.

4 A convergência no Método de Newton

Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$. No caso $n = 1$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, o Método de Newton consiste em acharmos a interseção da reta tangente da figura 4 com o eixo das abscissas. Pondo $y = 0$ na equação da reta tangente, temos que $x = x_{n+1}$, isto é,

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

o que nos fornece

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n).$$

Para generalizarmos o Método de Newton para $n > 1$, basta observarmos que x_{n+1}, x_n e $f(x_n)$ são vetores e $[f'(x_n)]^{-1}$ é o inverso da matriz

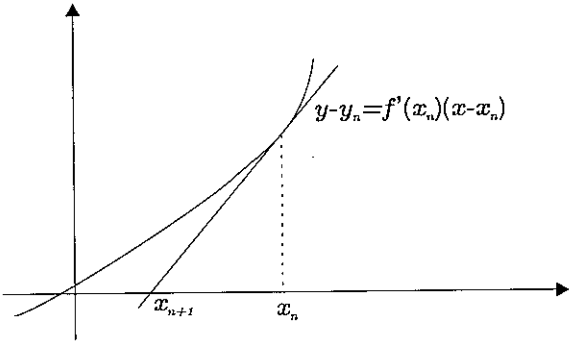

Figura 4: O Método de Newton.

jacobiana de f em x_n. As características da convergência são similares ao caso $n = 1$.

É muito comum se ouvir de estudantes e curiosos perguntas seguidas de uma exclamação:

O Método da Bisseção funciona?
O Método da Bisseção é bom?
Bom é o Método de Newton!

A primeira pergunta está respondida no parágrafo 3. Vamos comentar a exclamação e deixar a outra pergunta para depois. De [3] obtemos que se $f(c) = 0$ e existem $\delta > 0$ e $k > 0$, tais que

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}\right| \leq k < 1,\ \forall x \in [c-\delta, c+\delta], \tag{1}$$

então o Método de Newton gera uma seqüência (x_n), com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Ainda de [3], temos que o Método de Newton não é somente bom, na realidade, ele é ótimo: se existem $A, B, \delta > 0$, tais que

$$|f''(x)| \leq A \text{ e } |f'(x)| \geq B,\ \forall x \in [c-\delta, c+\delta],$$

então

$$|x_n - c| \leq \frac{A}{2B}|x_n - c|^2, \tag{2}$$

que é chamada de convergência quadrática. Pondo $K = \frac{A}{2B}$, em (2), temos que

$$|x_n - c| \leq K^{2^{n-3}-1}|x_1 - c|^{2^{n-2}},$$

o que nos dá uma convergência rapidíssima, se K e $|x_1 - c|$ são pequenos.

5 Bisseção versus Newton

Do §4, temos que no Método de Newton

$$|x_n - c| \leq K^{2^{n-3}-1}|x_1 - c|^{2^{n-2}},$$

e, portanto, ele é, em geral, bem mais rápido que o Método da Bisseção, pois de acordo com o §2

$$|c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Por outro lado, o Método da Bisseção pode ser aplicado para funções não diferenciáveis e, além disto, pode ser utilizado para localizar pontos de descontinuidade de uma função. Mas ressaltamos que uma comparação mais detalhada desses Métodos nos parece muito difícil. Esclarecemos que só procedemos a tal comparação devido à grande popularidade do Método de Newton, que, como veremos, pode ser facilmente generalizado, em contraposições ao Método da Bisseção.

Exemplo: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 2$ no Método de Newton e intervalo $[-9, 2]$ no Método da Bisseção.

	Newton		Bisseção	
n	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
1	$-3,535743590$	$-1,295169059$	$-3,500000000$	$-1,292496668$
2	$13,95095909$	$1,499239053$	$-0,7500000000$	$-0,6435011088$
3	$-279,3440666$	$-1,567216527$	$0,6250000000$	$0,5585993153$
4	$122016,9989$	$1,570788131$	$-0,6250000000$	$-0,06241881000$
5	$-0,2338600418\ 10^{11}$	$-1,570796327$	$0,2812500000$	$0,2741674511$
6	$0,8590766658\ 10^{21}$	$1,570796327$	$0,1093750000$	$0,1089419570$
7	$-0,1159267666\ 10^{43}$	$-1,570796327$	$0,02343750000$	$0,02343320988$
8	$0,2110995573\ 10^{85}$	$1,570796327$	$-0,01953125000$	$-0,01952876704$
9	$-0,6999943298\ 10^{169}$	$-1,570796327$	$0,001953125000$	$0,001953122516$
10	$0,7696777310\ 10^{338}$	$1,570796327$	$-0,008789062500e$	$-0,008788836199$
11	$-0,9305457284\ 10^{676}$	$-1,570796327$	$-0,003417968750$	$-0,003417955440$
12	$0,1360176655\ 10^{1353}$	$1,570796327$	$-0,0007324218750$	$-0,0007324217440$
13	$-0,2906099706\ 10^{2705}$	$-1,570796327$	$0,0006103515625$	$0,0006103514867$
14	$0,1326602765\ 10^{5410}$	$1,570796327$	$-0,00006103515625$	$-0,00006103515617$
15	$-0,2764405023\ 10^{10819}$	$-1,570796327$	$0,0002746582031$	$0,0002746581962$
16	$0,1200392363\ 10^{21638}$	$1,570796327$	$0,0001068115234$	$0,0001068115230$
17	$-0,2263426126\ 10^{43275}$	$-1,570796327$	$0,00002288818359$	$0,00002288818359$
18	$0,8047343251\ 10^{86549}$	$1,570796327$	$-0,00001907348633$	$-0,00001907348633$
19	$-0,1017243513\ 10^{173099}$	$-1,570796327$	$0,1907348633\ 10^{-5}$	$0,1907348633\ 10^{-5}$
20	$0,1625435480\ 10^{346197}$	$1,570796327$	$-0,8583068848\ 10^{-5}$	$-0,8583068848\ 10^{-5}$
21	$-0,4150107514\ 10^{692393}$	$-1,570796327$	$-0,3337860107\ 10^{-5}$	$-0,3337860107\ 10^{-5}$
22	$0,2705444149\ 10^{1384786}$	$1,570796327$	$-0,7152557373\ 10^{-6}$	$-0,7152557373\ 10^{-6}$
23	$-0,1149733069\ 10^{2769572}$	$-1,570796327$	$0,5960464478\ 10^{-6}$	$0,5960464478\ 10^{-6}$
24	$0,2076413878\ 10^{5539143}$	$1,570796327$	$-0,5960464478\ 10^{-7}$	$-0,5960464478\ 10^{-7}$
25	$-0,6772479871\ 10^{11078285}$	$-1,570796327$	$0,2682209015\ 10^{-6}$	$0,2682209015\ 10^{-6}$
26	$0,7204690397\ 10^{22156570}$	$1,570796327$	$0,1043081284\ 10^{-6}$	$0,1043081284\ 10^{-6}$
27	$-0,8153621044\ 10^{44313140}$	$-1,570796327$	$0,2235174179\ 10^{-7}$	$0,2235174179\ 10^{-7}$
28	$0,1044289527\ 10^{88626281}$	$1,570796327$	$-0,1862645149\ 10^{-7}$	$-0,1862645149\ 10^{-7}$
29	$-0,1713017194\ 10^{177252561}$	$-1,570796327$	$0,1862645149\ 10^{-8}$	$0,1862645149\cdot 10^{-8}$
30	$0,4609388578\ 10^{354505121}$	$1,570796327$	$-0,8381903172\ 10^{-8}$	$-0,8381903172\ 10^{-8}$
31	$-0,3337386614\ 10^{709010242}$	$-1,570796327$	$-0,3259629011\ 10^{-8}$	$-0,3259629011\ 10^{-8}$
32	$0,1749576418\ 10^{1418020484}$	$1,570796327$	$-0,6984919310\ 10^{-9}$	$-0,6984919310\ 10^{-9}$

Solicitamos ao leitor se convencer geometricamente que as retas tangentes no Método de Newton estão tendendo a horizontais e, portanto, $|x_n|$ fica muito grande, vide (1). Por outro lado, o Método de Newton com $x_0 = 1$ com 4 iterações fornece $f(x_4)$ da ordem de 10^{-9}. Já o Método da Bisseção vai convergir para uma raiz, uma vez que as hipóteses do teorema 3.1 são atendidas.

6 O Método da Bisseção e o Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário é um dos pilares do estudo de funções contínuas. O Método da Bisseção fornece uma demonstração simples para o Teorema do Valor Intermediário, o qual enunciaremos a seguir.

Teorema 6.1 *Se $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e y está entre $F(a)$ e $F(b)$, então existe um único $c \in [a, b]$, tal que $F(c) = y$.*

Para demonstrar este teorema basta aplicar o teorema 3.1 à função $f(x) = F(x) - y$.

Ressaltamos que o Método da bisseção não só implica no Teorema do Valor Intermediário, como fornece uma seqüência que converge para o número c da tese deste teorema.

7 O Método da Bisseção e o Postulado de Dedekind

Este assunto foi deixado para o final, porque ele não possui um caráter numérico visando o cálculo de soluções de equações.

Devemos dizer o que é o Postulado de Dedekind, mas antes necessitamos de definir cota superior e supremo de um conjunto. Uma cota superior de um conjunto $A \neq \emptyset$ é um número m, tal que $x \leq m$, $\forall x \in A$. O supremo de um conjunto A é a menor das cotas superiores de A e é denotado por $\sup A$.

Exemplos:

$$A = [1,3] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \leq 3\}.$$

3, π, $\sqrt{10}$, 4, 5, 7/2, etc. são cotas superiores de A. Mas o supremo de A é 3 ou, simplesmente,

$$\sup A = 3.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$
$$\sup B = \sqrt{2}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$
$$\sup C = \sqrt{2}$$

Note que no último exemplo $C \subset \mathbb{Q}$, mas $\sup C \notin \mathbb{Q}$.

Dizemos que um conjunto satisfaz ao Postulado de Dedekind, se todo subconjunto com cota superior possui supremo. O nome deste postulado é em homenagem a Richard Dedekind, que em 1901 formalizou a construção dos números reais, a qual pode ser encontrada na primeira parte de [1].

O que queremos analisar são as implicações abaixo

$$\begin{array}{c} \text{Postulado de Dedekind} \\ \Downarrow \\ \text{seqüência monótona limitada converge} \\ \Downarrow \\ \text{Teorema dos Intervalos Encaixantes} \\ \Downarrow \\ \text{Método da Bisseção} \\ \Downarrow \\ \text{Postulado de Dedekind} \end{array}$$

As duas primeiras implicações podem ser encontradas em [2] ou [3]. A terceira implicação já foi discutida nestas notas. Já a última implicação quer dizer que se num corpo ordenado K vale o teorema 3.2, então ele satisfaz o postulado de Dedekind. Um corpo ordenado pode ser entendido como um conjunto que tem todas as propriedades de $\mathbb{Q}$, e sua definição rigorosa pode ser vista em [2] ou [3].

Vejamos como o teorema 3.2 implica no Postulado de Dedekind. Seja A um subconjunto não vazio de K, que possua cota superior. Sejam b uma cota superior de A e a um elemento de A. Denotando

$$[a,b] = \{x \in K : a \leq x \leq b\},$$

definamos $f : [a,b] \longrightarrow K$, por

$$f(x) \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \text{ é cota superior de } A \text{ e } x \notin A \\ -1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $b \notin A$, e portanto $f(a)f(b) < 0$. Logo, o Método da Bisseção produz seqüências (a_n) e (b_n), com $f(a_n) = -1$ e $f(b_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas pelo teorema 3.2, ambas convergem para um número $c \in [a,b] \subset K$.

Vejamos, inicialmente, que c é uma cota superior de A, pois caso contrário existiria $x \in A$ com $c < x$, e portanto existiria $r \in \mathbb{N}$, tal que $c \leq b_r < x$, mas isto é uma contradição. De fato, como $f(b_r) = 1$, b_r seria uma cota superior de A, o que implicaria que $x \notin A$.

Vejamos, agora, que c é a menor cota superior. Suponha que $d < c$ fosse cota superior de A. Seja $s \in \mathbb{N}$, tal que $d < a_s \leq c$. Se $a_s \in A$, d não poderia ser cota superior de A. Logo, $a_s \notin A$. Como d é cota superior de A, a_s seria, também, cota superior de A. Portanto, $f(a_s) = 1$, o que é contradição.

8 Considerações Finais

Comparando o Método da Bisseção com o Método de Newton, observamos que este último possui implementação computacional tão simples quanto o primeiro. Vimos que o Método de Newton pode ser muito mais eficiente que o Método da Bisseção, porém este último também é rápido, uma vez que ele gera uma seqüência (c_n) que converge para a solução c na forma

$$|c_n - c| < \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

em que $[a, b]$ é o intervalo dado inicialmente.

Enquanto o Método de Newton necessita de funções diferenciáveis, o Método da Bisseção pode ser aplicado para funções contínuas. Além disto, o Método da Bisseção pode ser utilizado (veja teorema 3.2) para localizar o ponto de descontinuidade de uma função. Mas, por outro lado, enquanto a implementação computacional do Método de Newton para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é trivial, o mesmo não ocorre para o Método da Bisseção. Na realidade, isso nos parece uma tarefa difícil.

Do ponto de vista teórico, vimos que o Método da Bisseção fornece uma demonstração alternativa simples para o Teorema do Valor Médio. Finalizamos dizendo que embora o Método da Bisseção seja rudimentar e intuitivo, é gratificante saber que ele é equivalente ao Postulado de Dedekind, o qual é fundamental no entendimento dos números reais.

Referências

[1] Dedekind, R., *Essays on The Theory of Numbers: I Continuity and Irrational Numbers, II The Nature and Meaning of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.

[2] Figueiredo, D. G., *Análise I*, segunda edição, L.T.C., 1996.

[3] Lima, E. L., *Análise*, vol. 1, Coleção Matemática Universitária - IMPA, 1989.

UFMG
Departamento de Matemática
satuf@mat.ufmg.br