MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº37 – dezembro 2004 – pp. 1–8

Um Teorema bem conhecido

Felipe Acker

1 Introdução

O Teorema do Valor Médio é, sem dúvida, um dos pilares do Cálculo Infinitesimal e, é claro, velho conhecido de todos nós. O propósito deste artigo é mostrar que há algo de novo a ser dito sobre o assunto. Mais especificamente, rompendo com a tradicional demonstração que começa com o Teorema de Rolle, apresento aqui uma abordagem que vai diretamente ao Teorema do Valor Médio Generalizado (ou de Cauchy) e se baseia em um lema simples e geométrico. [1]

Para não dar ao leitor falsas esperanças, deixo claro que a demonstração utiliza, também, resultados fundamentais de Análise Real (um teorema deste porte não pode ser demonstrado sem que lancemos mão de propriedades que distinguem os reais dos racionais). Recorreremos, na demonstração, ao Teorema do Valor Intermediário e ao Princípio dos Intervalos Encaixantes, cujos enunciados recordaremos quando entrarem em cena.

[1]Uma demonstração diferente pode ser interessante, sem dúvida, mas a que aqui apresento é também um aperitivo para uma remexida em idéias bastante arraigadas com relação à possibilidade de generalizar o Teorema do Valor Médio, sob forma de igualdade, para dimensões maiores; isto vem a ter implicações sobre a visão que costumamos ter sobre os teoremas de Green e de Cauchy-Goursat. A este respeito, sugiro uma olhada no que diz Dieudonné na introdução do capítulo VIII de seu clássico *Foundations of Modern Analysis* [4] e em meu artigo *The Missing Link* [1].

Teorema 1.1 *Se γ é uma curva plana diferenciável ligando os pontos A e B, então existe um ponto P de γ em que a tangente é paralela à corda AB.* [2]

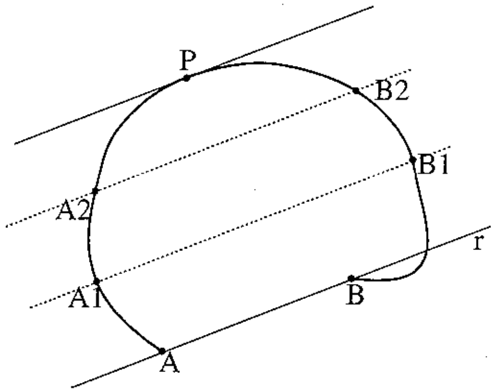

Figura1: Idéia Geométrica

A demonstração está baseada no método que todos usaríamos, com um par de esquadros, para obter, num desenho, o ponto P: começamos com a reta r passando por A e B e vamos tirando paralelas a r, obtendo, em cada caso, um par de pontos de γ (na interseção da nova reta com γ), até que o par de pontos *feche* em P. O lema abaixo vai nos garantir a possibilidade de obtermos uma seqüência de pares de pontos A_n e B_n convergindo para P.

Lema 1.2 *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva plana contínua, então existem α e β em $]a, b[$, com $\beta - \alpha = \frac{b-a}{3}$, tais que a corda ligando $\gamma(\alpha)$ a $\gamma(\beta)$ é paralela a que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.* [3]

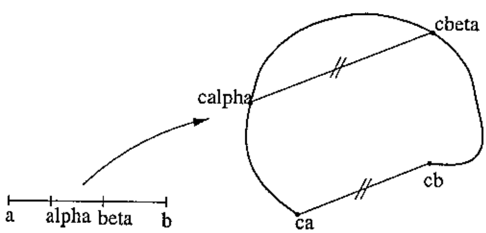

Figura 2: Enunciado do Lema

[2]Discutiremos mais à frente os detalhes técnicos do enunciado.

[3]A escolha $\beta - \alpha = \frac{b-a}{3}$ é arbitrária: poderíamos trabalhar com $\beta - \alpha = \frac{b-a}{n}$, sendo n qualquer inteiro igual ou superior a três.

2 O Lema

Comecemos tentando entender por que o Lema é verdadeiro. Vamos discutir duas idéias.

Primeira idéia: Se $\gamma : [a,b] \to I\!R^2$ é uma curva plana e $h < b - a$, podemos acompanhar a mudança de direção do vetor $\gamma(t+h) - \gamma(t)$, quando t varia de a até $b - h$.

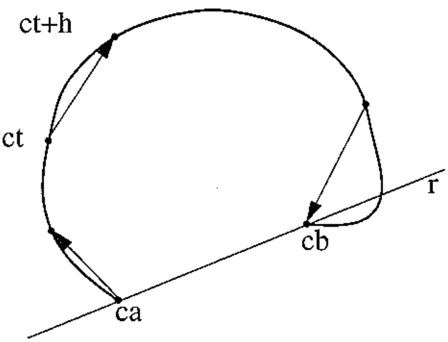

Figura 3: Primeira Idéia

O que queremos é achar t tal que $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ seja paralelo a $\gamma(b) - \gamma(a)$. Ora, o que acontece, pelo menos para h "pequeno"? Se $\gamma(a+h) - \gamma(a)$ começa apontando para um lado da reta r que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, fatalmente acabará apontando para o outro, depois de algum tempo, pois a curva precisa mudar de direção para voltar a cruzar r. Como essa direção varia continuamente, em algum momento $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ terá que ficar paralelo a r.

Observação: Se $v = (v_1, v_2)$ é um vetor que tem a direção de r (como, no nosso caso, o vetor $\gamma(b) - \gamma(a)$) e $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ é um vetor que varia continuamente com t, a mudança do "lado de r para o qual $u(t)$ aponta" será captada pela mudança de sinal do determinante $v \otimes u(t) = v_1 u_2(t) - v_2 u_1(t)$, que varia continuamente com t. Assim, precisamos garantir, para $u(t) = \gamma(t+h) - \gamma(t)$, que o determinante $v \otimes u(t)$ assume valores positivos e negativos.

Segunda idéia: Se fizermos uma partição do intervalo $[a, b]$ em n pedaços, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, teremos

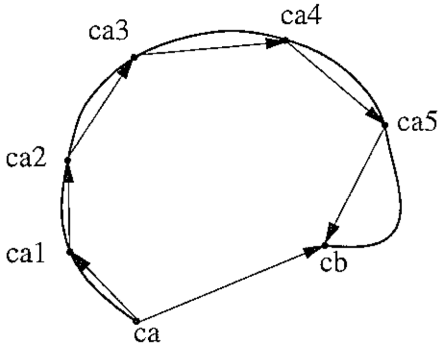

Figura4: Segunda Idéia

$$\gamma(b)-\gamma(a) = [\gamma(a_n)-\gamma(a_{n-1})]+\cdots+[\gamma(a_1)-\gamma(a_0)] = \sum_{i=1}^{n}[\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})],$$

de modo que, para $v = \gamma(b) - \gamma(a)$,

$$0 = v\otimes[\gamma(b)-\gamma(a)] = v\otimes\sum_{i=1}^{n}[\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} v\otimes[\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})].$$

Ora, se a soma de n números é zero, então ou bem todos são nulos, ou bem há pelo menos um positivo e um negativo (ou, o que vem a dar no mesmo: se a média de n números é m, então ou bem são todos iguais a m, ou bem há pelo menos um superior e um inferior a m).

Discutidas as idéias, podemos enunciar e demonstrar nosso Lema.

Lema 2.1 *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua e seja v um vetor*[4] *em $\mathbb{R}^2$. Então existe $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ tal que:*

$(i)\beta - \alpha = \frac{a-b}{3}$;

[4]A demonstração a seguir evidencia que não é preciso supor que v tenha a direção de $\gamma(b) - \gamma(a)$.

$(ii) v \otimes \frac{1}{\beta-\alpha}(\gamma(\beta)-\gamma(\alpha)) = v \otimes \frac{1}{b-a}(\gamma(b)-\gamma(a))$.[5]

Demonstração : Fazendo uma partição $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = b$ do intervalo $[a,b]$ em três pedaços iguais ($a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{3}$, $i = 1,2,3$), temos:

$$v \otimes \frac{1}{b-a}(\gamma(b)-\gamma(a)) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} v \otimes \frac{1}{a_i - a_{i-1}}(\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})).$$

Assim, ou bem os três termos do somatório são iguais (e está tudo resolvido com $\alpha = a_1$, $\beta = a_2$), ou bem há, no somatório, ao menos um termo superior e um inferior a

$$(*)\ v \otimes \frac{1}{b-a}(\gamma(b)-\gamma(a)).$$

Neste caso, a aplicação contínua $f : [a_0, a_2] \to I\!R$ dada por

$$f(t) = v \otimes \frac{1}{h}(\gamma(t+h)-\gamma(t)),$$

onde

$$h = \frac{b-a}{3},$$

assume valores superiores e inferiores a $(*)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário[6], existe α em $]a_0, a_2[$ tal que $f(\alpha) = (*)$, **cqd**.

Observação: A partição do intervalo em três pedaços é, claramente, arbitrária. Poderíamos ter escolhido, no lugar de 3, qualquer inteiro n, desde que $n \geq 3$. O leitor pode se divertir encontrando um exemplo que mostre que, para $n = 2$, o Lema é falso (não poderemos mais obter $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$).

[5]Recordamos que, dados dois vetores $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ em $I\!R^2$, estamos usando a notação $v \otimes u = v_1 u_2 - v_2 u_1$, de forma que $v \otimes u = 0$ se e somente se u e v são paralelos (linearmente dependentes, em termos mais eruditos).

[6]Teorema do Valor Intermediário: Se $f : [a,b] \to I\!R$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então existe α em $]a,b[$ tal que $f(\alpha) = 0$.

3 A Derivada

Para melhor compreendermos como passar do Lema ao Teorema, vale a pena uma pequena digressão sobre o conceito de derivada. Consideremos uma função $f :]a, b[\to I\!R$ e x_0 em $]a, b[$.

Proposição 3.1 *São equivalentes:*

$$(i) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0);$$

$$(ii) \lim_{[\alpha,\beta] \to x_0} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x_0).$$

Demonstração : Comecemos esclarecendo o significado de (ii):

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \mid \alpha \leq x_0 \leq \beta,\ 0 < \beta - \alpha < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Daí segue imediatamente, fazendo $x_0 = \alpha$ e $x = \beta$ ou vice-versa, conforme o caso, que $(ii) \Rightarrow (i)$. Para a recíproca, a dica é escrever, para $\alpha < x_0 < \beta$,

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - x_0}{\beta - \alpha} . \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} + \frac{x_0 - \alpha}{\beta - \alpha} . \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - .\alpha},$$

e o resultado segue.

Sem entrar em detalhes, cabe observar que a definição alternativa dada em (ii) é bem mais do que mera curiosidade ou limitada às circunstâncias deste artigo. Sua versão para formas diferenciais é a definição "analiticamente correta" da derivada exterior, ausente da maioria dos textos que apresentam formas diferenciais (ver [1],[2] e[3]).

4 O Teorema

Dizemos que uma curva γ definida em um intervalo $]a,b[$ é derivável no ponto t de $]a,b[$ se existe o limite

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\gamma(t+h) - \gamma(t)].$$

Se γ é definida por $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, onde f e g são funções definidas em $]a,b[$ e tomando valores em $I\!R$, então γ é derivável em t se e somente se f e g são deriváveis em t, e $\gamma'(t) = (f'(t), g'(t))$.

Teorema do Valor Médio de Cauchy: Seja $\gamma : [a,b] \to I\!R^2$ uma curva contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe c em $]a,b[$ tal que

$$[\gamma(b) - \gamma(a)] \otimes \gamma'(c) = 0.$$

Estamos em condições de provar, pelo mesmo preço, um resultado um pouquinho mais geral.

Teorema 4.1 *Seja $\gamma : [a,b] \to I\!R^2$ uma curva contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$ e seja v em $I\!R^2$. Então existe c em $]a,b[$ tal que*

$$v \otimes \gamma'(c) = v \otimes \frac{1}{b-a}[\gamma(b) - \gamma(a)].$$

Observação: Note que o caso que nos interessa é $v = \gamma(b) - \gamma(a)$, que nos dá o Teorema do Valor Médio de Cauchy. Se $\gamma(b) = \gamma(a)$, o Teorema do Valor Médio de Cauchy é trivial. Neste caso obtemos, do Teorema acima, um resultado adicional: para cada vetor v do plano há pelo menos um valor de t para o qual $\gamma'(t)$ é paralelo a v.

Demonstração : Aplicando reiteradamente o Lema, obtemos uma seqüência $[\alpha_n, \beta_n]$ de intervalos encaixantes[7] contidos em $]a,b[$, tais que, para todo n:

[7] Princípio dos Intervalos Encaixantes: Se $[\alpha_n, \beta_n]_{n\in I\!N}$ é uma sucessão de intervalos encaixantes (isto é, tais que $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n] \forall n \in I\!N$), com $\lim_{n\to\infty}[\beta_n - \alpha_n] = 0$, então existe um único real c na interseção de todos os intervalos da sucessão.

$(i) \beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{3^n}$;

$(ii) v \otimes \frac{1}{\beta_n - \alpha_n}[\gamma(b_n) - \gamma(a_n)] = v \otimes \frac{1}{b-a}[\gamma(b) - \gamma(a)]$. [8]

Basta então tomar para c o ponto interseção dos intervalos encaixantes. Como c está obrigatoriamente em $]a, b[$, γ tem derivada em c. De acordo com a Proposição anterior, teremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\beta_n - \alpha_n}[\gamma(\beta_n) - \gamma(\alpha_n)] = \gamma'(c),$$

cqd.

Referências

[1] F. Acker, *The Missing Link*, The Mathematical Intelligencer, vol. **18** , 1996.

[2] F. Acker, *The Mean Value Theorem for Differential Forms*, preprint, Departamento de Matemática Aplicada, IMUFRJ, 1999.

[3] F. Acker, *Cálculo Avançado, vol. 2*, livro texto usado há anos no mestrado em Matemática Aplicada do IMUFRJ, mas ainda não publicado.

[4] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Caixa Postal 68530
Cep: 21945-970 - Rio de Janeiro - RJ
e-mail: acker@labma.urfrj.br

[8]Esta é uma sutileza da demonstração : como não temos como garantir que $\gamma(\alpha_n) \neq \gamma(\beta_n)$, precisamos de um vetor v que independa de n.