MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº37 – dezembro 2004 – pp. 9–14

Um Exemplo (simples) de um Operador Auto-adjunto sem Autovetores e outros Exemplos

José F. Andrade

1 Introdução

Nos espaços vetoriais com produto interno de dimensão finita valem os seguintes resultados:

1. Todo operador linear auto-adjunto $T : V \to V$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.

2. Toda aplicação linear $T : V \to W$ possui uma adjunta $T^* : W \to V$.

3. Teorema da representação do funcional linear: Se $\alpha : V \to K$ é um funcional linear então existe um único vetor $u \in V$ tal que $\alpha(v) = < v, u >$, para todo $v \in V$.

Nosso objetivo principal é apresentar, num espaço vetorial de dimensão infinita, um exemplo simples de um operador auto-adjunto sem autovalores nem autovetores. Veremos também no mesmo espaço vetorial de dimensão infinita, um exemplo de um operador linear que não possui adjunto e de um funcional linear para o qual falha o teorema da representação do funcional linear.

Lembramos que, num espaço vetorial V sobre um corpo K, com um produto interno $< \ , \ >$, um operador linear $T : V \to V$ é auto-adjunto quando ele satisfaz a propriedade $< T(u), v > = < u, T(v) >$ para todos os vetores u e v em V. Se R é o corpo dos números reais, no caso do R^n com o produto interno canônico, $T : R^n \to R^n$ é auto-adjunto se e somente se sua matriz na base canônica for uma matriz simétrica. Se c é um escalar, um vetor não nulo v é um autovetor associado ao autovalor c se $T(v) = cv$. A aplicação adjunta T^* satisfaz a condição $< T(v), w > = < v, T^*(w) >$ para todo $v \in V$ e todo $w \in W$.

Tanto os livros de álgebra linear mais antigos voltados para o ensino de graduação – veja por exemplo [4], [5] ou [6] – quanto os mais novos – veja por exemplo [7], [2], [8] ou [1] – tratam de espaços vetoriais de dimensão finita. Algumas propriedades destes porém, não são válidas para os de dimensão infinita. Mas estes livros ou não mencionam estes fatos ou trazem contra-exemplos em espaços de funções com o produto interno dado por uma integral. Por exemplo, em [5], Hoffman e Kunze utilizam $V = \{\text{polinômios com coeficientes complexos}\}$, com o produto interno

$$< f, g > = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt,$$

para apresentar um exemplo onde o teorema da representação do funcional linear não é válido.

Para apresentar os nossos exemplos, utilizaremos o espaço vetorial R^∞, que será introduzido na próxima seção. Este espaço vetorial tem base enumerável, possui um produto interno análogo ao produto interno canônico do R^n e foi utilizado por N. Fowler em [3].

2 O espaço vetorial

Seja R^∞ o espaço vetorial das seqüências $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ tais que $a_i \in R$ e $a_i = 0$ para todo i suficientemente grande. Para $i \geq 1$, seja $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ com 1 na i-ésima posição. $B = \{e_i; i \geq 1\}$ é uma base para R^∞. Definindo $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, R^∞ é um espaço vetorial com produto interno e B é uma base ortonormal. Todo elemento de R^∞ é uma combinação linear finita $a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$.

Este produto interno generaliza o produto interno usual do R^n e, fixado n, identificando o subespaço $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots); a_i = 0\ \forall\, i > n\}$ com o R^n então $R^\infty = \cup_{n \geq 1} R^n$.

3 Um operador auto-adjunto sem autovetores

Seja $T : R^\infty \to R^\infty$ o operador definido por

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2, \\ T(e_i) &= e_{i-1} + e_{i+1}, \qquad \text{se } i > 1. \end{aligned}$$

Observamos que se existisse uma matriz quadrada infinita para representar este operador, os coeficientes desta matriz seriam 1 nas suas diagonais imediatamente abaixo e acima da diagonal principal e todos os outros coeficientes seriam nulos, o que daria uma matriz real simétrica, e desta forma, se ainda valessem as propriedades de espaços de dimensão finita, teríamos mostrado que nosso operador T é auto-adjunto. Mas, como não existem matrizes infinitas, vamos verificar, através da propriedade $< T(u), v > = < u, T(v) >$ já mencionada, que T é auto-adjunto: Dados u e v em R^∞, escrevemos $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$ e $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n$. Não há problema em supor que u e v sejam combinações de $e_1, \ldots e_n$, porque, se um deles, digamos v, for combinação de $e_1, \ldots e_m$ com $m < n$, também será combinação de $e_1, \ldots e_n$ com $b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$. Temos então:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_ie_{i+1} + \sum_{i=2}^{n} a_ie_{i-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $j = i + 1$ no primeiro somatório acima, e fazendo $j = i - 1$ no segundo, obtemos:

$$T(u) = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}e_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1}e_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} < T(u), v > &= < \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}e_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1}e_j, \sum_{j=1}^{n} b_je_j > \\ &= \sum_{j=2}^{n} a_{j-1}b_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1}b_j. \end{aligned}$$

Trocando j por i como índice do penúltimo somatório obtemos:

$$< T(u), v > = \sum_{i=2}^{n} a_{i-1}b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1}b_j. \tag{1}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i e_{i+1} + \sum_{i=2}^{n} b_i e_{i-1} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} b_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} e_j. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} < u, T(v) > &= < \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \sum_{j=2}^{n+1} b_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} e_j > \\ &= \sum_{j=2}^{n} a_j b_{j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{j+1}. \end{aligned}$$

Trocando, na última igualdade j por k como índice do primeiro somatório e j por l como índice do segundo, obtemos:

$$< u, T(v) > = \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-1} + \sum_{l=1}^{n-1} a_l b_{l+1}. \tag{2}$$

Fazendo $l = i - 1$ no segundo somatório de (2), vemos que ele é igual ao primeiro somatório de (1) e fazendo $k = j + 1$ no primeiro somatório de (2), vemos que ele é igual ao segundo somatório de (1). Assim $< T(u), v > = < u, T(v) >$ e T é auto-adjunto.

Vamos agora mostrar que T não tem autovetores:

Suponha que $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$, com $a_n \neq 0$, é um elemento não nulo de R^∞. Logo,

$$\begin{aligned} T(v) &= a_2e_1 + (a_1 + a_3)e_2 + (a_2 + a_4)e_3 + \ldots \\ &+ (a_{n-2} + a_n)e_{n-1} + a_{n-1}e_n + a_ne_{n+1}. \end{aligned}$$

Como $a_n \neq 0$, para todo $c \in R$, $T(v)$ não pode ser igual a cv, e T não tem autovetores.

4 Outros exemplos

4.1 Um operador que não tem adjunto:

Seja $T : R^\infty \to R^\infty$ o operador definido por

$$T(a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, e_1.$$

Vemos da definição que $T(e_i) = e_1$, para todo i. Se T tivesse um adjunto T^*, teríamos:

$$< e_i, T^*(e_1) > = < T(e_i), e_1 > = < e_1, e_1 > = 1.$$

Assim, para que a igualdade $< e_i, T^*(e_1) > = 1$ se verifique para todo i, o único candidato para $T^*(e_1)$ é $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Mas $(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin R^\infty$ porque possui infinitos coeficientes, na verdade todos, diferentes de zero. Como não foi possível definir $T^*(e_1)$, T não possui adjunto.

4.2 Teorema da representação do funcional linear:

Este exemplo é praticamente igual ao anterior. Seja $\alpha : R^\infty \to R$ o funcional linear definido por

$$\alpha(a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Se o teorema da representação do funcional linear fosse válido para os espaços vetoriais de dimensão infinita, neste exemplo teríamos, para todo i, $1 = \alpha(e_i) = < e_i, u >$, e portanto o único candidato ao vetor u é $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, que, como já vimos, não pertence a R^∞.

Referências

[1] Boldrini, J., Costa, S., Figueiredo, V. L. & Wetzler, H., Álgebra Linear, Ed. Harbra Ltda, 1980.

[2] Carvalho, João Pitombeira de, Introdução à Álgebra Linear, Ao Livro Técnico S. A., 1972.

[3] Fowler III, Northrup, Elementary Counterexamples in Infinite Dimensional Inner Product Spaces, Mathematics Magazine **52**, 1979, 96-97.

[4] Halmos, Paul, Espaços Vetoriais de Dimensão Finita, Editora Campus Ltda, 1978.

[5] Hoffman, K. & Kunze, R., Álgebra Linear, Ed. Polígono, 1971.

[6] Lang, Serg, Álgebra Linear, Ed. Edgard Blücker Ltda, 1971.

[7] Lima, Elon L., Álgebra Linear, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[8] Smith, Larry, Linear Algebra, Springer Verlag, 1978.

José Fernandes Silva Andrade
Instituto de Matemática – UFBa
Av. Ademar de Barros s/nº
40.170-110 Salvador-Bahia
e-mail: jandrade@ufba.br