MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº37 – dezembro 2004 – pp. 15–32

A Aplicação Normal de Gauss e as Superfícies Quádricas

Joselito de Oliveira e Elzimar de Oliveira Rufino

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar as superfícies quádricas do ponto de vista da Geometria Diferencial. Mais precisamente, apresentamos a parametrização, as curvaturas gaussiana e média e a representação gráfica das principais superfícies quádricas.

1 Superfície parametrizada regular

Iniciamos nosso texto definindo superfície parametrizada regular:
Uma **superfície parametrizada regular** é uma aplicação

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde U é um aberto e $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, tal que:

i) $X \in C^\infty(U)$

ii) $dX_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora $\forall p \in U$.

Uma **curva parametrizada diferenciável** de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha(t) = ((x(t), y(t), z(t))$, de classe C^∞, de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Fixado $(u_o, v_o) \in U \subset \mathbb{R}^2$, as curvas

$$\alpha(t) = X(u(t), v_o) \quad \text{e} \quad \beta(t) = X(u_o, v(t)),$$

são chamadas **curvas coordenadas** de X em $(u_o, v_o) \in U$.

Os vetores $X_u(u_o, v_o)$ e $X_v(u_o, v_o)$ são denominados **vetores tangentes** às curvas coordenadas.

Lembramos que o **plano tangente** a X em (u_o, v_o) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_o, v_o) e é denotado por T_qX, onde $q = (u_o, v_o)$.

2 Primeira forma quadrática

Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde U é um conjunto aberto e X uma superfície parametrizada regular. A aplicação

$$I_q : T_qX \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightsquigarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle$$

com $q = (u_o, v_o)$ é chamada de **primeira forma quadrática**.

Observe que

$$w \in T_qX \quad \Longrightarrow \quad w = aX_u + bX_v$$

Então

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2\langle X_u, X_u \rangle + 2a\langle X_u, X_v \rangle + b^2\langle X_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Agora denotando

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle X_v, X_v \rangle,$$

temos que $I_q(w) = a^2E + 2abF + b^2G$, onde E, F e G são denominados os coeficientes da primeira forma quadrática.

3 A diferencial da aplicação normal de Gauss

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular.
A aplicação $N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

é chamada de **Aplicação Normal de Gauss.**

Proposição 1 *O operador $dN_p : T_pX \longrightarrow T_pX$ é auto-adjunto.*

Para demonstração vide [3].
Como $-dN_p : T_pX \longrightarrow T_pX$ é auto-adjunto e $dimT_pX$ é finita, pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal $\{ v_1, v_2 \} \subset T_pX$ tal que

$$\begin{aligned} -dN_p(v_1) &= k_1 v_1, \\ -dN_p(v_2) &= k_2 v_2. \end{aligned}$$

Assim existe uma representação matricial de $-dN_p : T_pX \longrightarrow T_pX$ dada por

$$-\mathbf{dN_p} = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Além disso, existe uma forma quadrática $\mathrm{II}_p = T_pX \longrightarrow \mathbb{R}$, denominada **segunda forma fundamental**, associada a T_pX dada por $\mathrm{II}_p(v) = \langle -dN_p(v), v \rangle$, cuja representação matricial em relação à base $\{X_u, X_v\}$ de $T_{X(u,v)}X$ é

$$A = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

onde $e = \langle X_{uu}, N \rangle, f = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$. Sabe-se que k_1 e k_2 são os valores máximo e mínimo da segunda forma fundamental.

Define-se as curvaturas Gaussiana e Média, respectivamente, como sendo,

$$K(p) = det(-dN_p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \tag{1}$$

e

$$H(p) = \frac{1}{2} tr(-dN_p) = \frac{1}{2} \cdot (k_1(p) + k_2(p)). \tag{2}$$

4 Cálculo das curvaturas gaussiana e média

Apresentaremos agora fórmulas explícitas para o cálculo das curvaturas gaussiana e média de uma superfície parametrizada regular, em função dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental. A dedução das mesmas o leitor poderá encontrar em [3].

$$K = det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{3}$$

$$H = \frac{1}{2} tr(a_{ij}) = \frac{Ge - Ff + Eg}{2(EG - F^2)}. \tag{4}$$

Lembramos aqui que as curvaturas principais k_1 e k_2 são os auto-valores da matriz $-dN_p = (a_{ij})$.

5 As curvaturas gaussiana e média de superfícies quádricas

Neste tópico apresentaremos alguns exemplos de superfícies quádricas, onde suas curvaturas média e gaussiana são calculadas através das fórmulas (3) e (4).

Define-se uma **superfície quádrica** como sendo um conjunto de pontos (x_1, x_2, x_3) do R^3 satisfazendo uma equação do tipo

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i \, x_j + \sum_i b_i x_i + c = 0, \tag{5}$$

onde $a_{ij}, b_i, \; c$ são números reais e $i, j = 1, 2, 3$.

Para obtermos as parametrizações das superfícies quádricas utilizamos a seguinte proposição:

Proposição 2 *Toda equação da forma (5) pode ser escrita em uma forma reduzida, resultando em equações do tipo*

$$\sum_{j=1}^{3} x_j^2 + S = 0 \quad ou \quad \sum_{j=1}^{3} x_j^2 - x_i^2 + b_i x_i = 0 \quad onde \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Observação: A equação (5) na sua forma matricial é:

$$X^T AX + BX + C = 0, \text{ onde}$$
$$A = (a_{ij})_{3\times 3} \text{ é simétrica, } B = (b_{ij})_{1\times 3} \text{ e } X = (x_{ij})_{3\times 1}$$

Como A é simétrica, existe R inversível tal que $A = RDR^T$ onde D é a matriz diagonal tendo os autovalores de A em sua diagonal principal e R é tal que suas colunas são os autovetores de A. Substituindo-se $A = RDR^T$ e fazendo $Y = R^T X$, ou seja, $Y^T = X^T R$ resulta a nova equação

$$Y^T DY + BRY + C = 0. \tag{6}$$

A equação (6) é equivalente à equação

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{3} b_j x_j + q = 0$$

onde os λ_j são os autovalores de A. Esta última equação é mais simples pois é desprovida dos termos $x_i x_j$ para $i \neq j$. Agora, efetuando-se a translação $\overline{Y} = Y + K$ onde $K \in \mathbb{R}^3$, conseguimos eliminar termos que contêm uma só variável e em alguns casos todos eles. Vejamos que podem ocorrer duas possibilidades:

1) Todos os λ_j são diferentes de zero.
Da equação (6), agrupando os termos e completando os quadrados resulta

$$\sum \lambda_j (x' + \frac{b_j}{2\lambda_j})^2 + q - \sum \frac{b_j}{4\lambda_j} = 0$$

ou seja, $\sum \overline{x}_j + S = 0$ que é a equação reduzida de uma quádrica central.

2) Existe um λ_j igual a zero.

Suponhamos que $\lambda_1 = 0$. De maneira similar ao que fizemos em 1) obtemos a equação $\sum_j x_j^2 - x_1^2 + b_1 x_1 = 0$ que é a equação reduzida de uma quádrica sem centro.

A seguir, os exemplos que nos propomos apresentar:

1. **Elipsóide**

   (a) Parametrização

   $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde

   $$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$$

   e X é definida por

   $$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v).$$

   (b) Curvaturas gaussiana e média

   Temos que:

   $$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0) \tag{7}$$

   $$X_v = (a \cos v \cos u, b \cos v \cos u, -c \operatorname{sen} v) \tag{8}$$

   Então,

   $$N(u, v) = \left(\frac{-bc \operatorname{sen} v \cos u}{\sqrt{A}}, \frac{-ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u}{\sqrt{A}}, \frac{-ab \cos v}{\sqrt{A}}\right)$$

   onde $A = (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2$
   De (7) e (8) facilmente obtemos

   $$X_{uu} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, 0),$$

   $$X_{uv} = (-a \cos v \operatorname{sen} u, b \cos v \cos u, 0),$$

   $$X_{vv} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -c \cos v).$$

Então os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$
\begin{aligned}
E= &\ (a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (b \operatorname{sen} v \cos u)^2,\\
F= &\ (b^2 - a^2)[\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \cos v \cos u]^2,\\
G= &\ (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (c \operatorname{sen} v)^2 \quad \text{e}\\
e= &\ \frac{abcsen^2 v}{\sqrt{B}},\\
f= &\ 0,\\
g= &\ \frac{abc}{\sqrt{B}},
\end{aligned}
$$

onde $B = (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (ab \cos v)^2$.

Com os resultados obtidos acima encontramos:

$$K(u,v) = \frac{1}{(abc)^2}\left[\frac{(a \operatorname{sen} v \cos u)^2}{a^4} + \frac{(b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2}{b^4} + \frac{(c \cos v)^2}{c^4}\right]^{-2}$$

$$H(u,v) = \frac{abc[(a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (a \operatorname{sen} u)^2 (b \cos u)^2]}{2[(ab \cos v)^2 + (ac \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 + (bc \cos u \operatorname{sen} v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Fazendo-se $a = b = c$ obtemos as curvaturas da esfera.

(c) Representação geométrica.

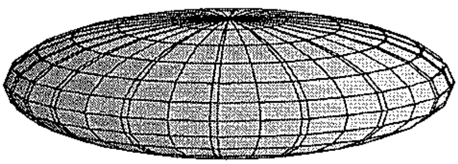

Figura 1:

2. **Hiperbolóide elíptico de uma folha**

(a) Parametrização

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{onde} U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ 0 < v < \pi\}$$

e X é definida por $X(u,v) = (a\sqrt{u^2+1}cosv, b\sqrt{u^2+1}senv, cu)$

(b) Curvaturas gaussiana e média
Veja que:

$$X_u = \left(\frac{au\cos v}{\sqrt{u^2+1}}, \frac{bu\,\mathrm{sen}\,v}{\sqrt{u^2+1}}, c\right),$$

$$X_v = \left(-a\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{sen}\,v, b\sqrt{u^2+1}\cos v, 0\right),$$

donde encontramos

$$X_{uu} = \left(\frac{a\cos v}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{b\,\mathrm{sen}\,v}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}, 0\right),$$

$$X_{uv} = \left(\frac{-au\,\mathrm{sen}\,v}{\sqrt{u^2+1}}, \frac{bu\cos v}{\sqrt{u^2+1}}, 0\right),$$

$$X_{vv} = \left(-a\sqrt{u^2+1}\cos v, -b\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{sen}\,v, 0\right).$$

Agora fazendo

$$C = (bc)^2(u^2+1)cos^2v + (ac)^2(u^2+1)sen^2v + (abu)^2$$

encontramos

$$N(u,v) = \left(\frac{-b\sqrt{u^2+1}\cos v}{\sqrt{C}}, \frac{-ac\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{sen}\,v}{\sqrt{C}}, \frac{abu}{\sqrt{C}}\right).$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E &= \frac{(au\cos(v))^2 + (bu\,\mathrm{sen}\,(v))^2}{(u^2+1)}, \\ F &= u\cos(v)\,\mathrm{sen}\,(v)(b^2-a^2), \\ G &= (u^2+1)[(b\cos(v))^2 + (a\,\mathrm{sen}\,(v))^2] \end{aligned}$$

e por

$$e = \frac{-abc}{(u^2+1)\sqrt{C}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{abc(u^2+1)}{\sqrt{C}}.$$

Agora, utilizando as equações anteriores e com as devidas operações obtemos, respectivamente, as curvaturas gaussiana e média,

$$K(u,v) = \frac{-1}{(abc)^2}[\frac{(a\sqrt{u^2+1}\cos v)^2}{a^4}, \frac{(b\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{sen}\, v)^2}{b^4}, \frac{(cu)^2}{c^4}]^{-2},$$

$$H(u,v) = \frac{-abc[\cos^2 v(b^2+a^2u^2) + \mathrm{sen}^2 v(a^2+b^2u^2) + c^2(u^2+1)]}{2[(abu)^2 + (ac)^2(u^2+1)\,\mathrm{sen}^2 v + (bc)^2(u^2+1)\cos^2 v]^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica.

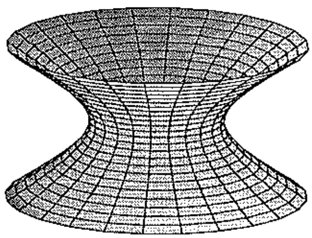

Figura 2:

3. **Parabolóide hiperbólico**

(a) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde$X$é definida por$X(u,v) = (u, v, \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2})$.

(b) Curvaturas gaussiana e média
Segue-se imediatamente:

$$X_u = (1, 0, \frac{-2u}{a^2}) \tag{9}$$

$$X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2}) \tag{10}$$

Agora utilizando-se das equações (9) e (10) encontramos:

$$X_{uu} = (0,0,\frac{-2}{a^2}), \qquad X_{uv} = (0,0,0), \qquad X_{vv} = (0,0,\frac{2}{b^2}) \text{ e}$$

$$N(u,v) = \left(\frac{2u}{a^2\sqrt{D}}, \frac{-2v}{b^2\sqrt{D}}, \frac{1}{\sqrt{D}}\right) \quad \text{onde} \quad D = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1.$$

Logo os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$E = \frac{4u^2}{a^4} + 1, \qquad F = \frac{-4uv}{(ab)^2}, \qquad G = \frac{4v^2}{b^4} + 1,$$

e por

$$e = \frac{-2}{a^2\sqrt{D}}, \qquad f = 0, \qquad g = \frac{2}{b^2\sqrt{D}}.$$

Donde resulta

$$K(u,v) = \frac{-1}{4(ab)^2}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + 1\right)^{-2},$$

$$H(u,v) = \frac{-a^2(b^4 + 4v^2) + b^2(a^4 + 4u^2)}{(ab)^4\left[\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica.

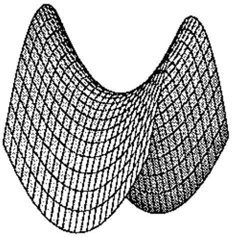

Figura 3:

4. **Cone quadrático**

(a) Parametrização
$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \ \text{e} \ 0 < v < 2\pi\}$$

e

$$X \text{é definida por} X(u,v) = (au\cos v, bu\,\text{sen}\,v, u).$$

(b) Curvaturas gaussiana e média
Temos que:

$$\begin{aligned} X_u &= (a\cos v, b\,\text{sen}\,v, 1), \\ X_v &= (-au\,\text{sen}\,v, bu\cos v, 0) \end{aligned}$$

donde encontramos também

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0,0,0), \\ X_{uv} &= (-a\,\text{sen}\,(v), b\cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-au\cos v, -bu\,\text{sen}\,v, 0), \\ N(u,v) &= \left(\frac{-b\cos v}{\sqrt{L}}, \frac{a\,\text{sen}\,v}{\sqrt{L}}, \frac{ab}{\sqrt{L}}\right) \end{aligned}$$

onde $L = (b\cos v)^2 + (a\,\text{sen}\,v)^2 + (ab)^2$.

Daí, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E &= (a\cos v)^2 + (b\,\text{sen}\,v)^2 + 1, \\ F &= (b^2 - a^2)u\cos v\,\text{sen}\,v, \\ G &= u^2[(a\,\text{sen}\,v)^2 + (b\cos v)^2] \end{aligned}$$

e por

$$e = 0, \quad f = 0, \quad g = \frac{abu}{\sqrt{L}}.$$

Dos coeficientes E, F, G, e, f e g determinados encontramos:

$$K(u,v) = 0 \quad \text{e} \quad H(u,v) = \frac{ab[(a\cos v)^2 + (b\,\text{sen}\,v)^2 + 1]}{2u[(ab)^2 + (a\,\text{sen}\,v)^2 + (b\cos v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica

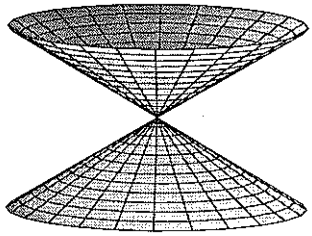

Figura 4:

5. **Parabolóide elíptico**

   (a) Parametrização
   $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde

$$X\text{é definida por}X(u,v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}).$$

   (b) Curvaturas gaussiana e média
   Obtemos os seguintes resultados:

$$X_u = (1, 0, \frac{2u}{a^2}),$$
$$X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2}).$$

   Daí resulta que

$$X_{uu} = (0, 0, \frac{2}{a^2}), \quad X_{uv} = (0,0,0), \quad X_{vv} = (0, 0, \frac{2}{b^2}), \text{ e}$$

$$N(u,v) = (\frac{-2u}{a^2\sqrt{C}}, \frac{-2v}{b^2\sqrt{C}}, \frac{1}{\sqrt{C}}), \text{ onde } C = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1.$$

   Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$E = \frac{4u^2}{a^4} + 1, \quad F = \frac{4u^2}{(ab)^2}, \quad G = \frac{4v^2}{b^4} + 1$$

   e por

$$e = \frac{2}{a^2\sqrt{C}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{2}{b^2\sqrt{C}}.$$

Utilizando os resultados acima, obtemos:

$$K(u,v) = \frac{1}{4(ab)^2}[\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{4}]^{-2},$$

$$H(u,v) = \frac{a^2(b^4 + 4v^{2)} + b^2(a^4 + 4u^2)}{(ab)^4(\frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica

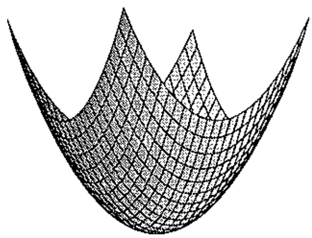

Figura 5:

6. **Cilindro hiperbólico**

(a) Parametrização

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde

$$X \text{é definida por} X(u,v) = (a\ \cosh u, b\ \text{senh}\, u, v).$$

A parametrização X cobre apenas uma folha do cilindro hiperbólico. Obtêm-se a outra folha através da aplicação $\overline{X}$ onde $\overline{X}(u,v) = (-a\cosh u, -b\,\text{senh}\, u, v)$. Verifica-se que se utilizarmos a parametrização $\overline{X}$ obteremos as mesmas curvaturas.

(b) Curvaturas gaussiana e média
Veja que:

$$X_u = (a\,\text{senh}\, u, b\cosh u, 0), \tag{11}$$

$$X_v = (0, 0, 1). \tag{12}$$

Das equações (11) e (12) temos

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (a\cosh u, b\,\mathrm{senh}\, u, 0),\\ X_{uv} &= (0,0,0),\\ X_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

e também

$$N(u,v) = \Big(\frac{b\cosh u}{\sqrt{(b\cosh u)^2 + (a\,\mathrm{senh}\, u)^2}}, \frac{-a\,\mathrm{senh}\, u}{\sqrt{(b\cosh u)^2 + (a\,\mathrm{senh}\, u)^2}}, 0\Big).$$

Logo, seguem-se os coeficientes da primeira forma fundamental

$$E = (a\,\mathrm{senh}\, u)^2 + (b\cosh u)^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

e da segunda forma fundamental

$$e = \frac{ab}{\sqrt{E}}, \quad f = 0, \quad g = 0.$$

Com as operações devidas e os resultados anteriores resulta

$$K(u,v) = 0, \quad \text{e} \quad H(u,v) = \frac{ab}{2[(a\,\mathrm{senh}\, u)^2) + (b\cosh u)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica

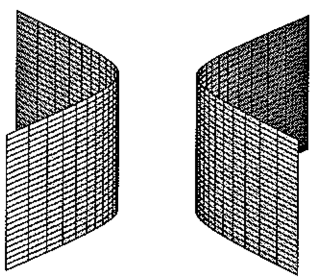

Figura 6:

7. **Cilindro parabólico**

   (a) Parametrização

   $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde X é definida por $X(u,v) = (au^2, u, v)$

   (b) Curvaturas gaussiana e média
   Temos que:

$$X_u = (2au, 1, 0),$$
$$X_v = (0, 0, 1),$$

   resultando, portanto

$$X_{uu} = (2a, 0, 0), \quad X_{uv} = (0,0,0), \quad X_{vv} = (0,0,0)$$

   e

$$N(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{(2au)^2+1}}, \frac{-2au}{\sqrt{(2au)^2+1}}, 0\right).$$

   Então os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por

$$E = (2au)^2 + 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

   e por

$$e = \frac{-2a}{\sqrt{(2au)^2+1}}, \quad f = 0, \quad g = 0.$$

   Dos coeficientes E, F, G, e, f, e g acima encontrados resulta

$$K(u,v) = 0 \quad \text{e} \quad H(u,v) = \frac{a}{[(2au)^2+1]^{\frac{3}{2}}}.$$

   (c) Representação geométrica

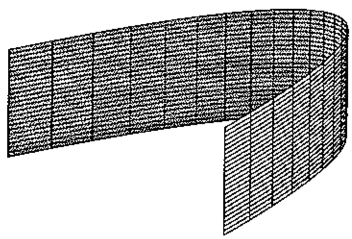

Figura 7:

8. **Hiperbolóide elíptico de duas folhas**

   (a) Parametrização

   $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi\}$ e X é definida por $X(u,v) = (au\,cosv, bu\,senv, c\sqrt{u^2+1})$. Ressaltamos ao leitor que a parametrização dada aqui cobre apenas uma folha do hiperbolóide elíptico de duas folhas. Porém a outra folha pode ser facilmente obtida por simetria, resultando nas mesmas curvaturas.

   (b) Curvaturas Gaussiana e Média
   Resulta imediatamente que:

$$\begin{aligned} X_u &= (a\cos v, b\,\mathrm{sen}\, v, \frac{cu}{\sqrt{u^2+1}}) \\ X_v &= (-au\,\mathrm{sen}\, v, bu\cos v, 0) \end{aligned}$$

   e também

$$N(u,v) = (\frac{-bcu\cos v}{\sqrt{D}}, \frac{-ac\,\mathrm{sen}\, v}{\sqrt{D}}, \frac{ab\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{D}})$$

   onde $D = (bcu\cos v)^2 + (acu\,\mathrm{sen}\, v)^2 + (ab)^2(u^2+1)$.

   Além disso,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, \frac{c}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}) \\ X_{uv} &= (-a\,\mathrm{sen}\, v, b\cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-au\cos v, -bu\,\mathrm{sen}\, v, 0) \end{aligned}$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E =& \ (a\cos v)^2 + (b\,\mathrm{sen}\, v)^2 + \frac{(cu)^2}{(u^2+1)}, \\ F =& \ -a^2u\,\mathrm{sen}\, v\cos v + b^2u\,\mathrm{sen}\, v\cos v, \\ G =& \ (au\,\mathrm{sen}\, v)^2 + (bu\cos v)^2, \end{aligned}$$

e por

$$e = \frac{abc}{(u^2+1)\sqrt{D}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{abcu^2}{\sqrt{D}}.$$

Com os resultados outrora obtidos temos que

$$K(u,v) = \frac{1}{(abc)^2}\left[\frac{(au\cos v)^2}{a^4} + \frac{(bu\,\mathrm{sen}\, v)^2}{b^4} + \frac{(c\sqrt{u^2+1})^2}{c^4}\right]^{-2},$$

$$H(u,v) = \frac{abc[(u^2+1)(a^2+b^2)+(cu)^2]}{2[(ab)^2(u^2+1)+(acu\,\mathrm{sen}\, v)^2+(bcu\cos v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Representação geométrica

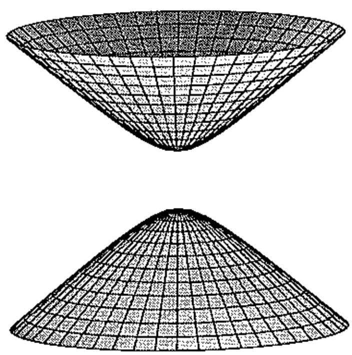

Figura 8:

Referências

[1] P. V. Araujo, **Geometria Diferencial**. *IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.*

[2] J. L. Boldrini, **Álgebra Linear**. Harper Row do Brasil, São Paulo, 1980.

[3] M. P. do Carmo, **Elementos de Geometria Diferencial**. Ao Livro Técnico S.A, Rio de Janeiro, 1971.

[4] A. S. Fedenko, **Problemas de Geometria Diferencial**.Traducion al español por A.I. Samojválov. Mir. Moscú,Moscú, URSS, 1981.

[5] E. L. Lima, **Álgebra Linear**. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 2000.

[6] S. Lang, **Álgebra Linear**. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2003.

[7] E. de O. Rufino, **Curvaturas Média e Gaussiana de Superfícies Quádricas**. Monografia do Curso de Especialização em Matemática, Universidade Federal de Roraima, 2004.

[8] M. Spivak, **A Compreensive Introdution to Diferential Geometry**. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1979

[9] K. Tenenblat, **Introdução à Geometria Diferencial**. Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 1990.

Joselito de Oliveira
Elzimar de Oliveira Rufino
Departamento de Matemática-UFRR
Campus do Paricarana
Av. Ene Garcêz-2413 - Bairro Aeroporto
Boa Vista-RR - Cep: 69304-000
E-mail: Joselitoufrr@yahoo.com.br