MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº37 – dezembro 2004 – pp. 33–34

$\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$: uma prova elementar

Tiago Caúla Ribeiro

Em geral, mostra-se que $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$ utilizando alguma teoria de homotopia ou homologia. Aqui, apresentamos uma prova elementar desse fato. Suponhamos que exista um homeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Utilizando que $\varphi^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ é um conjunto compacto sempre que $K \subset \mathbb{R}^n$ for compacto, mostramos que:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \|\varphi(x)\| = +\infty$;
2. $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|\varphi(x)\| = +\infty$.

Seja S a esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$. Desde que S é compacto, temos $\varphi(S)$ compacto e, portanto, existe $\rho > 0$ tal que

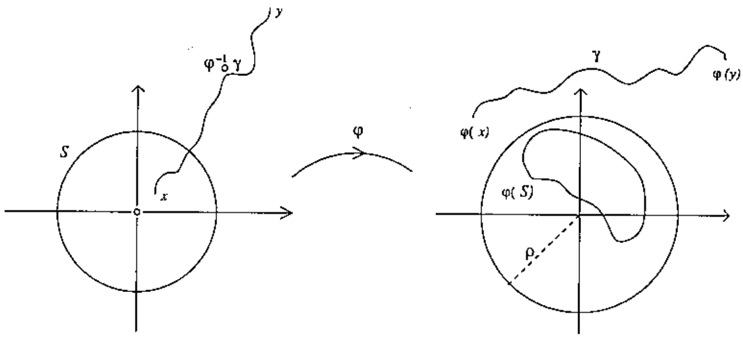
$$w \in \varphi(S) \Rightarrow \|w\| \leq \rho \tag{0.1}$$

Por (1), existe $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|x\| < 1$ e $\|\varphi(x)\| > \rho$ e, por (2), existe $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|y\| > 1$ e $\|\varphi(y)\| > \rho$. Por outro lado, como o conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^n$ cuja distância à origem é maior do que ρ é conexo por caminhos, existe $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\gamma(0) = \varphi(x)$ e $\gamma(1) = \varphi(y)$ e

$$\|\gamma(t)\| > \rho \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{0.2}$$

Observamos que $\varphi^{-1} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ é contínua. Além disso

$$\|\varphi^{-1} \circ \gamma(0)\| = \|x\| < 1 \text{ e } \|\varphi^{-1} \circ \gamma(1)\| = \|y\| > 1.$$



Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t \in (0,1)$ tal que $\|\varphi^{-1} \circ \gamma(t)\| = 1$, ou seja,$\gamma(t) \in \varphi(S)$. O que, junto com (0.1) e (0.2), evidencia o desejável absurdo.

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Ceará
Av. Mister Hull s/nº,Campus do PICI, Bloco 914 ·
CEP: 60.455-760 - Fortaleza - CE