MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{os}}$ 38/39 – julho/dezembro 2005 – pp. 1–34

Laurent Schwartz, o matemático que queria mudar o mundo[1]

FERNANDO BOMBAL

Tradução: Geraldo Botelho e Márcio José Horta Dantas
Revisão: Maurício Romero Sicre

Faleceu no dia 04 de julho de 2002, aos 87 anos de idade, Laurent Schwartz, um dos mais respeitados e prestigiados matemáticos da nossa época. No Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Harvard (Cambridge, Massachusetts) em 1950, lhe foi concedida a Medalha Fields pela criação das distribuições. No dia 30 de agosto de 1950, na cerimônia de outorga das medalhas Fields, Harald Bohr descreveu o artigo de Schwartz *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, publicado nos Anais da Universidade de Grenoble em 1948, como um trabalho:

[1]Este artigo foi originalmente publicado em *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6.1 (2003), 177-201. A Matemática Universitária agradece a Fernando Bombal e a David Martín de Diego, Co-Diretor da *La Gaceta de la RSME*, pela gentileza em ceder os direitos de tradução. Agradecemos também aos tradutores, tanto pelo belo trabalho como também por terem chamado nossa atenção para o artigo original.

... which certainly will stand as one of the classical mathematical papers of our times [...] I think that every reader of his cited paper, like myself, will have felt a considerable amount of pleasant excitement, on seeing the wonderful harmony of the whole structure of the calculus to which the theory leads and on understanding how essential an advance in application may mean to many parts of higher analysis, such as spectral theory, potential theory, and indeed the whole theory of linear partial differential equations [...] The simplification obtained, and not least the easy justification of different symbolic operations often used in an illegitimate way by the technicians, is of such striking nature that it seems more than a utopian thought that elements of the theory of Schwartz distributions may find their place even in the more elementary courses of the calculus in Universities and Technical Schools. [2] ([2])

A contribuição de Schwartz à sistematização e ao desenvolvimento da teoria das distribuições seria suficiente para conceder-lhe uma

[2] ... que certamente se tornará um dos artigos matemáticos clássicos de nosso tempo [...] Acho que qualquer leitor deste artigo, assim como eu, sentir-se-á excitado ao ver a maravilhosa harmonia da estrutura do cálculo revelada por esta teoria e ao compreender como aplicações inovadoras podem ser essenciais para muitas partes da Análise, como teoria espectral, teoria do potencial e, de fato, toda a teoria das equações diferenciais parciais lineares [...] A simplificação obtida, bem como a fácil justificativa das diferentes operações simbólicas freqüentemente usadas ilegitimamente pelos técnicos, é tão impressionante que não parece tão utópico sonhar que elementos da teoria das distribuições de Schwarz terão seu lugar mesmo nos cursos elementares de cálculo das Universidades e Escolas Técnicas.

posição privilegiada entre os matemáticos do século XX. Mas sua atividade matemática (que comentaremos adiante) não se limitou a essa tarefa, imensa por si própria, tendo também produzido importantes contribuições em áreas como Análise Funcional, Teoria da Medida, Equações Diferenciais Parciais e Probabilidade.

Além disso, Schwartz foi um expositor brilhante e excelente educador, e se preocupou durante toda a sua vida com os problemas da educação e do ensino. Nos anos 1980, principalmente após sua aposentadoria como Professor da Faculdade de Ciências de Paris e da Escola Politécnica em 1983, participou muito mais ativamente da reforma do ensino universitário. Foi nomeado Presidente do Comitê Nacional para a avaliação das Universidades (1985-1989), elaborando uma série de relatórios para o governo nos quais insistia na necessidade de uma seleção mais rigorosa no ingresso de estudantes e na conveniência dos professores universitários fazerem pesquisa. Membro da Academia de Ciências de Paris desde 1975, possuía numerosos prêmios e distinções, tanto nacionais quanto internacionais.

Em que pese sua imensa obra de criação matemática, Schwartz em nada se parece com o estereótipo do sábio distraído, isolado em sua torre de marfim. Pelo contrário, foi um homem profundamente comprometido com os problemas de seu tempo. Defensor apaixonado dos direitos humanos, anticolonialista e internacionalista, defendeu publicamente suas idéias, da guerra da Argélia à do Vietnã, passando pela invasão russa do Afeganistão, o que lhe acarretou não poucos dissabores e dificuldades. Nos anos 1970, contribuiu em grande medida para a libertação de pesquisadores prisioneiros na União Soviética, Chile, Bolívia e Tchecoslováquia. (Veja o Capítulo XIII de [9] para informações mais detalhadas).

Entomólogo apaixonado, entusiasta das borboletas (outro de seus grandes amores), não deixava de aproveitar os convites que recebia de países tropicais para dar cursos ou conferências, para conseguir exemplares para sua coleção que, após mais de 30 viagens aos trópicos, contava com mais de 20.000 exemplares.

A notícia da sua morte mereceu atenção de artigos em periódicos importantes como *Le Monde* e *Liberation* (10 de julho de 2002), *The Guardian* (7 de agosto de 2002), *Washington Post* (18 de agosto de 2002), e de publicações como *Sciences & Avenir*, *Iniciativa Socialista* (agosto de 2002), etc.

Um Breve Percurso Pela Vida de L. Schwartz

Das 200 entradas que aparecem na página web do MathSciNet sob o nome de Laurent Schwartz, a última[3] corresponde à tradução para o inglês de sua autobiografia *Un Mathématicien aux prises avec le siècle* ([10]; veja também a magnífica resenha publicada em La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española [5]). Trata-se de um livro apaixonante, de leitura absolutamente recomendada. Com estilo claro e ameno, ao longo de suas 528 páginas, Schwartz nos leva pela mão para realizar um percurso por sua vida e, através de suas experiências, conhecermos alguns acontecimentos de que foi testemunha privilegiada e, às vezes, protagonista: seu contato com as idéias comunistas ao ingressar na *École Normale Superieur*, seu posterior desencanto com a atuação de Stalin e sua adesão ao trotskismo logo após, abandonando-o definitivamente em 1947; sua experiência vital como judeu na França ocupada; sua vivência como pesquisador e formador de pesquisadores; suas atividades pela reforma do ensino universitário na França; sua dedicação à luta pelos direitos humanos ao longo de toda sua vida, etc. E tudo isso recheado com detalhes pessoais, anedotas e histórias sobre sua vida e sobre muitas pessoas que conheceu, formando assim um mosaico brilhante e atrativo. Sua leitura foi a principal fonte de informações para a redação das linhas seguintes.

Laurent Schwartz nasceu em Paris, em 1915, no seio de uma família de profunda tradição judaica, embora nem seus pais nem o próprio Schwartz tenham sido praticantes. Seu pai era médico cirurgião e, seguramente, um homem de grande valor e força de vontade, pois, apesar do anti-semitismo dominante na época, conseguiu ser o primeiro cirurgião

[3]Nota dos Tradutores: em setembro de 2005 já eram 235 entradas. O autor se refere à entrada MR1821332(2001j:01063).

judeu dos hospitais de Paris em 1907. Sua mãe, 16 anos mais jovem que seu pai, era uma grande amante da natureza, e soube transmitir esse amor a seus três filhos. Um de seus tios, Robert Debré, foi um famoso pediatra e co-fundador da Unicef. Outro tio, Jacques Debré, era professor de matemática. E Jacques Hadamard, um dos melhores matemáticos da época, era seu tio-avô materno. Com esses antecedentes, parecia evidente que Schwartz estava predestinado a dedicar-se à matemática. Mas a verdade é que isso não ficou tão claro no princípio.

A infância de Schwartz foi marcada pelas temporadas que passou na propriedade adquirida por seus pais em 1926 em Autouillet, um lugarejo próximo de Paris. Ali desenvolveu seu amor pela natureza em geral e pelas borboletas em particular. Ao longo de sua autobiografia, Schwartz se refere reiteradamente a Autouillet como seu "Jardim do Éden" particular, seu contato com o paraíso, e também seu refúgio para o lazer e para o trabalho.

Em seus anos escolares, Schwartz destacou-se em latim, literatura e também em matemática. Durante algum tempo sua família contemplou a possibilidade dele se dedicar às humanidades. Foram finalmente os conselhos do seu professor de literatura e de seu tio Robert Debré que inclinaram a balança a favor do bacharelado em matemática. Schwartz sentiu-se fascinado pela geometria, isso apesar de ser um "cretino topográfico", de acordo com suas próprias palavras, sem nenhuma visão geométrica nem sentido de orientação.

Durante sua preparação para ingressar na École Normale Supérieur (ENS) apaixonou-se por Marie-Hélene Lévy, filha do famoso matemático Paul Levy, então professor da École Polytechnique (EP). Apesar de suas famílias se conhecerem há três gerações, os dois jovens ainda não haviam tido muito contato. A mãe de Schwartz aconselhou-o a esperar um tempo. Mas ao reencontrá-la como colega na ENS, Schwartz convenceu-se da profundidade dos seus sentimentos, e se declarou através de sua mãe (era tremendamente tímido). Comprometeram-se em abril de 1935 e decidiram se casar em dezembro do mesmo ano. Infelizmente, em outubro de 1935, Marie-Hélene contraiu uma tuberculose pulmonar extremamente grave e teve que ser internada em um sanatório em Passy. Contrariando as previsões dos médicos, extremamente pessimistas, Marie-Hélene teve alta após 18 meses de separação. Na época, Schwartz estava prestando serviço militar (obrigatório) como oficial no serviço de artilharia aérea. Após o curso de preparação e em decorrência de sua pouca capacidade para a vida militar, foi transferido para um dos lugares menos solicitados, Laon, perto da fronteira belga. Aproveitando o período de estabilidade, o casal decidiu se casar em maio de 1938. Tiveram dois filhos: Marc André, que morreu em 1971, e Claudine, professora de matemática em Grenoble.

A ENS da rue d'Ulm, criada pela Convenção de 1794, sempre foi um centro de excelência contando com cientistas ilustres em diversas áreas. Quando nela Schwartz ingressou, em 1934, os matemáticos formavam o grupo mais importante de egressos. No Capítulo II de [10], Schwartz descreve seu entusiasmo e deslumbramento pela vida na École, e também um certo sentimento de frustração. A ciência francesa em geral, e a matemática em particular, haviam caído na mediocridade e na apatia. A Primeira Guerra Mundial havia dizimado toda uma geração de jovens. A vida científica francesa parecia funcionar ao relento. Como contrapartida, Schwartz ressalta o desenvolvimento científico prodigioso da ciência alemã, ignorado pelo exagerado nacionalismo francês da época. Entre outros exemplos flagrantes, Schwartz cita o caso de um seminário de Hadamard realizado em 1924, no qual ficou claro que nenhum matemático francês presente, nem mesmo os de melhor reputação, sabia se o espaço L^2 das funções de quadrado Lebesgue-integrável, era ou não completo (o que havia sido demonstrado em 1907 por Fischer e Riesz). O surpreendente desse caso é que entre os presentes figurava um jovem matemático polonês, Stefan Banach, que havia apresentado em 1920 sua tese sobre a noção de espaço normado completo (espaço de Banach), entre cujos primeiros e mais ilustres exemplos se encontra L^2. Por certo Banach sabia perfeitamente a resposta e não disse uma palavra por sentir-se intimidado pelos demais presentes.

Essa sensação de frustração era compartilhada por outros jovens matemáticos franceses. Por exemplo, Jean Dieudonné narra que a matemática oficial francesa da época ignorava tudo relacionado a temas como teoria espectral de Hilbert-Riesz, representação de grupos e teoria de Lie. Essa percepção da fraqueza e da paralisia da matemática francesa, que havia sido líder da matemática mundial, foi sem dúvida uma das razões determinantes para a criação do grupo Bourbaki, fundado por André Weil, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, Jean Delsarte, René de Possel, Jean Leray e Szolem Mandelbrojt em 1935, e ao qual mais tarde se juntou Schwartz. Criado com a idéia inicial de redigir uma série de textos que substituiriam os que eram utilizados nas universidades francesas, o grupo Bourbaki tornou-se um eficaz catalisador de mudanças e, finalmente, foi responsável por um trabalho profundo de atualização e renovação da matemática.

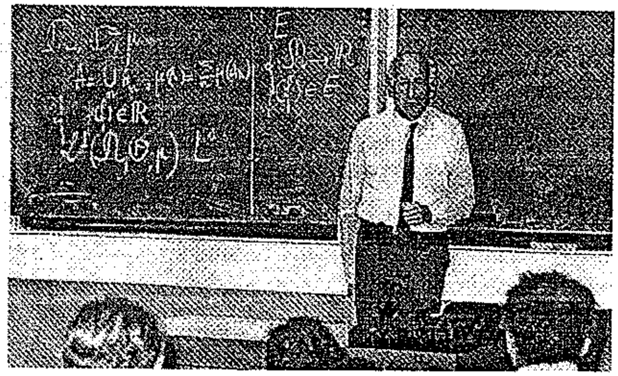
Os anos passados na ENS foram também importantes para o engajamento político de Schwartz. Anticolonialista por convicção, começou a ler literatura política e econômica com profundidade. De imediato percebeu que a política de não intervenção praticada pelo governo de Léon Blum era totalmente ineficaz perante os avanços do nazismo. No ambiente esquerdista da École, sentiu-se primeiro atraído pelas idéias comunistas, mas, perturbado pelos expurgos realizados por Stalin em 1936, converteu-se às idéias de Trotski sobre a "Revolução Mundial" e tornou-se trotskista militante, colaborando intensamente com esse partido durante toda a ocupação alemã, com grande risco pessoal. Desiludido com os resultados, abandonou definitivamente o partido em 1947, mas continuou participando ativamente da política.

Em junho de 1937, Schwartz concluiu brilhantemente seus estudos na ENS (graduou-se em segundo lugar, atrás de seu amigo G. Choquet, outro matemático excelente) e, como já dissemos, decidiu prestar seu serviço militar obrigatório. O início da Segunda Guerra Mundial prolongou seu serviço ativo por mais um ano. Finalmente, em agosto de 1940, após a derrota francesa, foi desmobilizado e mudou-se com sua mulher para Toulouse, na França sob o regime de Vichy, onde viviam seus pais. Solicitou (e conseguiu) uma posição na recém-criada Caisse Nationale des Sciences, um instituto de pesquisa, sendo que a partir de 1942 e até o final da guerra, seu salário era proveniente de um "Auxílio à Pesquisa Científica", instituída por Michelín. Segundo Schwartz, Toulouse era um deserto científico naquela época. Aproveitando uma visita de Henri Cartan e Jean Delsarte a Toulouse, Schwartz e sua esposa Marie-Hélene os procuraram para conversar. Cartan os animou a instalarem-se em Clermont-Ferrand, já uma boa universidade, mas que, além disso, contava com o reforço da Faculdade de Ciências de Strasburgo, que havia ali se estabelecido após a ocupação alemã. Assim, em 1940 os Schwartz transferiram-se para Clermont-Ferrand, o que significou para ambos um renascimento para a vida matemática. Ali Schwartz entra em contato com o "núcleo duro" do grupo Bourbaki e é convidado para participar de suas reuniões como "cobaia" (integrou-se plenamente ao grupo em 1942). Bourbaki foi para Schwartz uma revelação e nele exerceu profunda influência. Eram-lhe fascinantes a clareza de sua linguagem, o rigor na redação, a utilização sistemática das estruturas matemáticas. Em sua longa digressão sobre o grupo Bourbaki em ([10], págs. 158-177), conta suas impressões sobre o grupo, sua maneira peculiar de funcionar e também mostra exemplos de erros que eram tipicamente encontrados nos livros-texto então em uso. Citando um comentário de André Weil sobre a escola italiana de geometria algébrica, escreve: *Para eles* [os integrantes da escola] *é interessante, logo após um teorema, apresentar um contraexemplo.* Ou, citando literalmente uma frase de um dos livros utilizados habitualmente: *A noção de variedade é difícil de definir. Seja V uma variedade ...* Todas essas deficiências desapareceram radicalmente com Bourbaki. Certamente, Schwartz também estava consciente dos erros que foram cometidos por, e sobretudo, em nome de Bourbaki, aos quais também dedica algumas páginas. Em todo caso, Schwartz sempre reconheceu que o contato com o grupo Bourbaki foi fundamental em sua carreira. Assim, diz em [9]: *La recontre de N. Bourbaki m'a initié à des idées toute nouvelles aprés ma formation d'analyste classique ... Le cours d'analyse fonctionelle de J. Dieudonné a été à l'origine de ma thèse.*

Schwartz vinha trabalhando já há algum tempo em um problema clássico de aproximação de funções. O curso de Espaços Vetoriais Topológicos dado por Dieudonné colocou-o em contato com uma série de ferramentas novas e poderosas, que permitiram-lhe começar a obter resultados interessantes. Dieudonné entusiasmou-se e a ele propôs continuar tais trabalhos como tema de tese de doutoramento. Pressionado por seu orientador, que sabia perfeitamente do perigo que Schwartz corria por ser judeu, especialmente após a ocupação da França de Vichy pelos alemães, Schwartz defendeu sua tese de doutoramento, intitulada *Études de Sommes d'Exponentielles Reelles* em 1942 (publicada às suas expensas, como era habitual, na Livraria Hermann em 1943). Na tese já se manifesta um dos traços característicos da matemática de Schwartz: a utilização de um aparato abstrato e de ferramentas procedentes da Análise Funcional para resolver problemas clássicos. Essa abordagem, como ele mesmo reconheceu, foi fundamental para a criação da teoria das distribuições.

Tanto Schwartz como sua esposa mantiveram uma intensa atividade política, colaborando com grupos trotskistas durante toda a ocupação alemã, embora Schwartz tenha posteriormente criticado duramente a atuação desses grupos: "Durante a guerra, os comunistas e outros grupos mais moderados - de direita ou de esquerda - sabiam o que deveriam fazer, enquanto nós permanecíamos paralisados" ([10], p. 185). Em todo caso, em termos pessoais sua situação tornava-se a cada dia mais precária, o que obrigou-o a abandonar toda a atividade matemática profissional. Além disso, Marie-Hélene engravidou em meados de 1942. Fichados pela polícia, a prioridade era proteger suas vidas e a de seu filho. Após o nascimento de seu filho Marc André, decidiram mudar de identidade e fugir para a região ocupada pelos italianos, onde supunham que a perseguição aos judeus seria menos terrível. As páginas que Schwartz dedica às suas recordações desse período são assustadoras, descrevendo a angústia da vida cotidiana sob a ameaça constante de cair em uma das operações da brigada antijudaica e ser deportado. E isto poderia ocorrer ainda que, como diz Schwartz ([10], p. 203) ... *Meus pais eram ateus; eu também era e nunca me senti verdadeiramente judeu ... A possibilidade de ser deportado como judeu simplesmente por ser circuncidado, me parecia verdadeiramente absurdo* ... Não obstante, foi exatamente isso o que ocorreu com muitos de seus compatriotas.

Com identidade falsa em nome de Laurent-Marie Sélimartin (nome escolhido pela semelhança das assinaturas), os Schwartz fugiram para uma cidadezinha próxima a Grenoble, onde permaneceram até a libertação da região pelo exército americano, em agosto de 1944. Nomeado professor da Universidade de Grenoble em outubro de 1944, transferiu-se no ano seguinte para a Faculdade de Ciências de Nancy, a convite de Dieudonné e Delsarte, iniciando um período de sete frutíferos anos. Nesse período, Nancy transformou-se em um dos melhores centros matemáticos da França, o que propiciou a chegada de estudantes brilhantes procedentes de todo o país. Em particular, Schwartz orientou os estudos de doutoramento de matemáticos do porte de Jean Pierre Kahane, François Bruhat, Bernard Malgrange, Jacques-Louis Lions (o fundador da matemática aplicada moderna na França, segundo seu orientador) e Alexander Grothendieck, um dos mais brilhantes e influentes matemáticos do século XX, também laureado com uma Medalha Fields (veja [1]). O descobrimento da Teoria das Distribuições, sobre a qual discorreremos adiante, conferiu a Schwartz um rápido reconhecimento internacional, aumentado pela concessão da Medalha Fields em 1950. Por iniciativa de Denjoy, foi nomeado professor da Faculdade de Ciências de Paris em 1952. Ali também Schwartz teve oportunidade de formar pesquisadores brilhantes, entre os quais André Martineau e François Treves (a quem, por sinal, também transmitiu a paixão por borboletas). Em 1958, Paul Lévy aposentou-se como professor da École Polytechnique que, diferentemente da Universidade, continuava em deplorável estado de estagnação. Nem Schwartz, nem nenhum dos professores universitários de renome, se candidataram à posição. Não obstante, alguns dias antes do fim do prazo, Schwartz recebeu a visita de dois destacados membros da EP, que lhe pediram encarecidamente que se candidatasse ao cargo e empreendesse uma série de reformas profundas para revitalizar a instituição. Com muito pouco entusiasmado, Schwartz aceitou e foi nomeado professor de Análise da Escola Politécnica em 1959. A partir desse momento, empreendeu um trabalho intenso de modernização da EP, iniciando com programas de ensino (seu monumental *Cours d'Analyse* tem sua origem nesse empenho) e continuando com os professores e com as tarefas administrativas.



Outro objetivo de Schwartz era o retorno à tradição de formação de pesquisadores na EP. A resistência às mudanças foram grandes. Desde sua fundação, a EP tinha uma organização paramilitar (de fato, o diretor era um general, o que talvez explique que até 1972 alunas não eram admitidas na EP). Mas a maior oposição enfrentada por Schwartz foi entre seus colegas acadêmicos de todas as disciplinas. Não obstante, pouco a pouco a situação foi melhorando. Muito contribuiu para isso a contratação de novos professores, primeiro J. Neveu e J. L. Lions, e posteriormente A. Guillardet, M. Demazure e Ch. Goulaouic. Também, em 1966, Schwartz conseguiu a aprovação da criação do Centre de Mathématiques da EP, que se converteu rapidamente em um importante centro de pesquisa. Os seminários de Análise Funcional (com o nome de Séminaire Schwartz e, mais tarde, Séminaire Maurey-Schwartz) e os de Equações Diferenciais (Séminaire Goulaouic-Schwartz) atingiram um alto nível em pouco tempo, neles participando freqüentemente renomados especialistas do mundo todo.

A partir de 1969, Schwartz abandonou seu cargo na universidade para dedicar-se à Politécnica em tempo integral. Ali permaneceu até sua aposentadoria em 1980, tendo continuado ativo por mais três anos na Universidade de Paris VII e como diretor do Centro Matemático da Escola Politécnica. Incentivador e presidente do Comitê Nacional de Avaliação de 1985 a 1989, continuou defendendo suas idéias sobre o ensino universitário e a pesquisa. Membro da Academia de Ciências de Paris a partir de 1975, recebeu vários prêmios científicos, nacionais e internacionais, ao longo de sua vida ([9]).

Sua atividade política foi retomada imediatamente após a libertação de Grenoble, em agosto de 1944, e mantida ao longo de toda sua vida. Após uma fracassada participação como candidato pelo Partido Trotskista nas eleições parlamentares de 1945 e 1946, foi se afastando progressivamente do partido até o rompimento definitivo de sua militância em 1947. Desde então, seu único compromisso político foi com a defesa dos direitos humanos. Entretanto, sua militância anterior perseguiu-o durante muito tempo. Assim, por exemplo, no verão de 1949 Marshall Stone, então Chefe do Departamento de Matemática de Chicago aproveitando uma viagem de Schwartz à Universidade de Vancouver, convidou-o a visitar sua universidade. Schwartz aceitou e solicitou o visto de entrada obrigatório nos Estados Unidos. Na falta de notícias, Stone fez averiguações no mais alto nível e, finalmente, obteve uma resposta: o visto seria negado, pois Schwartz era um *perigoso comunista.* Pela mesma razão, correu risco sua participação no Congresso de Harvard em 1950, para receber sua Medalha Fields. Somente após seis meses de intensas negociações internacionais, o Departamento de Estado dos Estados Unidos aceitou, como um favor especial, conceder um visto provisório de entrada para Schwartz (com proibição expressa de viajar pelo resto do país!).

Schwartz apoiou ativamente a descolonização francesa do Vietnã (1954), Tunísia e Marrocos (1956), e envolveu-se intensamente na guerra da Argélia. Horrorizado pela espiral de terrorismo e repressão e pelo uso sistemático da tortura pelas forças francesas (de que tomou conhecimento em primeira mão na pessoa de um de seus alunos do terceiro ciclo, Maurice Audin, torturado e assassinado em circunstâncias estranhas), escreveu um famoso artigo no *L'Express* contra a prática da tortura pelo governo. Em 1960 foi um dos 121 intelectuais franceses, junto a Jean-Paul Sartre e Simone de Beauvoir, que assinaram um famoso manifesto em que se defendia o direito moral da juventude francesa em negar-se a lutar como soldados na guerra da Argélia. Como conseqüência, Schwartz foi fulminantemente demitido da posição de professor da EP pelo Ministro da Defesa. Após uma série de apelações e contra-apelações, o cargo de Schwartz continuava vago, pois a ele ninguém se candidatou. Schwartz passou o ano acadêmico de 1962-63 em Nova York e, finalmente, conseguiu um acordo com o ministério para que fosse admitido em um novo cargo, após uma solicitação expressa. Cumprido o trâmite, Schwartz foi reincorporado à EP no ano de 1963-64.

A atividade política de Schwartz intensificou-se durante a guerra do Vietnã, à qual dedica o capítulo mais longo de sua autobiografia. Foi membro do tribunal Russell (criado para receber e investigar evidências de crimes de guerra contra a população civil no Vietnã) e Presidente do International Bureau for Afghanistan, fundado em 1979 por causa da invasão soviética do Afeganistão. Após a retirada das tropas da URSS, Schwartz continuou lutando contra a repressão aos intelectuais, sobretudo matemáticos, na União Soviética e outros países.

Teoria das Distribuições

A contribuição matemática mais conhecida de Schwartz é a criação da Teoria das Distribuições. Por causa disso, e porque essa teoria é um dos grandes desenvolvimentos matemáticos do século XX, vamos dedicar esta seção a descrever sumariamente o seu conteúdo e as contribuições de Schwartz. O leitor interessado poderá encontrar mais informação em [3] e, sobretudo, em [6].

Antecedentes

Os modelos fundamentais da Física-Matemática são regidos por equações diferenciais e, para tanto, são aplicáveis somente (pelo menos em princípio) a fenômenos nos quais as variáveis físicas envolvidas sejam funções suficientemente regulares do espaço e do tempo. Embora isso não produza nenhuma discrepância com os dados observáveis nos fenômenos estáticos (descritos usualmente por equações elípticas), não acontece o mesmo quando se estudam fenômenos dinâmicos (regidos geralmente por equações hiperbólicas): neste caso, as variáveis físicas exibem freqüentemente descontinuidades essenciais na prática. Assim, por exemplo, uma corda de violino, deslocada em seu ponto médio, vibra inicialmente de acordo com uma lei da forma

$$u(x,t) = 2 - \frac{1}{2}\left(|x-t-1| + |x+t-1|\right),$$

para uma escolha adequada das unidades e do referencial. A derivada do deslocamento é, portanto, descontínua em $x = 1 \pm t$. Como a equação da onda, que rege o movimento da corda, é de ordem 2 (essencialmente $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$), a função anterior não pode ser considerada como solução da mesma, no sentido habitual.

Além disso, as hipóteses para a validade de muitos teoremas são difíceis de comprovar na prática. Pode-se dizer que, desde o começo do cálculo diferencial, aparece a conveniência de estender essas noções de forma que as operações fundamentais da análise possam ser realizadas sempre e sem hipóteses complicadas de validade. Assim surge a idéia de obter-se uma *noção generalizada de diferenciação,* que estenda a habitual e permita derivar funções que não são deriváveis no sentido habitual. Isso, junto com a noção paralela de *solução generalizada* de uma equação diferencial (E.D.) é a origem da teoria das distribuições (veja o prólogo de [8]).

Historicamente, a primeira noção de solução generalizada de uma E.D. é a de se considerar como tal uma função que seja limite (em algum sentido) de uma sucessão de soluções clássicas. O método foi antecipado por L. Euler em 1765, durante sua grande polêmica com J. L. D'Alembert sobre a solução da corda vibrante (isto é, a equação de ondas unidimensional). Durante a primeira terça parte do século XX, esse método foi utilizado por diversos autores para introduzir soluções generalizadas de E. D. específicas, usando noções diferentes de convergência na definição. Assim, em 1926, N. Wiener usa a convergência em L^2 de uma sucessão de soluções clássicas; J. Leray (1934) usa a convergência fraca na norma em L^2; S. Sobolev (1935) emprega a convergência em L^1; K. O. Friedrichs (1939) utilizou a convergência na norma $\|f\|_2 + \|f'\|_2$; L. Schwartz (em 1944, imediatamente antes de definir as distribuições) empregou a convergência unifome sobre compactos, etc.

Outra maneira de estender a noção de solução de uma E.D. é generalizar a noção de derivada e definir como solução uma função cujas derivadas generalizadas satisfaçam a E.D. Entre os primeiros trabalhos nessa direção, pode-se citar a noção de *derivada simétrica* de B. Riemann, introduzida e utilizada sistematicamente em sua *Habilitationarbeit* sobre séries trigonométricas, em 1854. Posteriormente, podemos citar a extensão realizada por U. Dini (1878), substituindo-se simplesmente o limite ordinário na definição de derivada pelos limites superior e inferior, à direita e à esquerda, em cada ponto. Na mesma ordem de idéias está a de substituir uma expressão diferencial composta de vários operadores, que envolve uma passagem ao limite para cada um, por uma só passagem ao limite. Por exemplo, G. C. Evans substituiu em 1913 o operador

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

por

$$\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h,y\right)+u\left(x,y+h\right)+u\left(x-h,y\right)+u\left(x,y-h\right)-4u\left(x,y\right)}{h^2}.$$

Variações desses métodos foram também usados por H. Petrini (1908) e N. Wiener (1927).

A criação da Integral de Lebesgue, originou, por outro lado, a noção de *derivada em quase todo ponto.*

As diferentes noções de derivada generalizada de uma função foram utilizadas sistematicamente no contexto da Teoria da Medida (Teorema Fundamental do Cálculo) e no Cálculo das Variações. Isso conduziu de maneira natural à descoberta nesse âmbito dos precursores do que depois se denominou *Espaços de Sobolev,* isto é, espaços de funções absolutamente contínuas tais que elas e suas derivadas até uma certa ordem (definidas em quase todo ponto!), estão em L^p (Beppo-Levi, Tonelli, Nikodym, etc.)

Porém, o método mais utilizado para estender a noção de solução de uma E.D. *(A)* de ordem n, consiste em encontrar outra equação ou condição *(B)* que, para funções de classe C^n seja equivalente à original, *que no entanto tenha sentido para funções mais gerais.* Os objetos que satisfazem *(B)* se denominam então *soluções generalizadas de (A)*. Em geral, a nova condição *(B)* é obtida por alguma forma de integração por partes. Por isto, freqüentemente a condição a ser satisfeita pelas soluções generalizadas é da forma "a condição *(B)* é satisfeita para todos os objetos de uma certa classe" (objetos de prova ou *objetos teste*).

O primeiro a obter proveito dessas idéias foi o professr de Harvard M. Bôcher em seus estudos sobre a noção de *função harmônica generalizada* (isto é, solução generalizada da equação $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$) em um domínio limitado Ω (1905). Usando a formula de Green

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$

Bôcher observou que, tomando $v = 1$, se u é harmônica em Ω então $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, *condição em que só aparecem as derivadas primeiras de u.* Bôcher definiu então uma função generalizada em Ω como uma função de classe C^1 em Ω que satisfaz

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

para todo círculo $D \subset \Omega$. Como o próprio Bôcher se encarregou de demonstrar, toda função harmônica generalizada é uma função harmônica no sentido clássico. (De fato, toda solução no sentido da *Teoria das Distribuições* da equação de Laplace $\Delta u = 0$ é uma função harmônica clássica). As idéias de Bôcher foram continuadas pelo seu colega G. C. Evans e empregadas também por vários autores para definir soluções generalizadas de E.D.

Finalmente, outro método muito relacionado com o anterior é o chamado *método das funções teste*, que é o método básico da Teoria das Distribuições de Schwartz. Consiste em multiplicar a E.D. a estudar, por exemplo $P(D)u = 0$, por uma função teste suficientemente regular, com suporte compacto, em um certo domínio, e o resultado se integra por partes:

$$\langle P(D)u, \varphi\rangle := \int P(D)u \cdot \varphi = 0 = \int u \cdot P(D)\varphi = \langle u, P(D)\rangle, \forall\varphi.$$

Dessa forma, o operador diferencial se transfere à função teste e a equação integro-diferencial resultante, a qual tem que ser satisfeita para todas as funções teste, não supõe nenhuma regularidade da solução. Esse método é muito relacionado com o anterior e sua origem está no estudo das equações hiperbólicas. Antecipado por Lagrange em 1761 (veja, por exemplo, [3], pag. 31), foi formulado explicitamente por N. Wiener (1926) e depois por J. Leray, S. Sobolev e R. Courant (de fato, a primeira aparição de uma solução generalizada de uma E.D. em um livro texto tem lugar na edição de 1937 do clássico *Methoden der Mathematischen Physik,* de R. Courant e D. Hilbert).

Mencionemos também um outro importante antecendente das distribuições que está relacionado com o método das funções teste. Os engenheiros, fisicos e técnicos vinham usando desde o século XIX diferentes *cálculos operacionais* para resolver facilmente diversos tipos de equações funcionais. Esses cálculos, que sofrem da falta de rigor matemático, conduzem em muitos casos a resultados satisfatórios. A ferramenta fundamental nesses cálculos é o uso de certas *funções singulares*, como a ubíqua "função" δ, que apesar de ter sido introduzida explicitamente por G. R. Kirchoff em seu tratamento da equação da onda em um trabalho publicado em 1882, realmente aparece mais ou menos maquiada ao longo da história, em conexão com diferentes temas: séries de Fourier (Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822), funções de Green, etc. Mais significativa é a utilização da função δ por parte de físicos e engenheiros. Assim, o engenheiro elétrico O. Heaviside desenvolveu, no final do século XIX um cálculo operacional de difícil justificação matemática, baseado em raciocínios experimentais e que alcançou uma grande difusão na primeira terça parte do século XX. Nesse cálculo, a função δ aparece como *função impulso unitário*, derivada da função $H(t)$ que vale 0 se $t < 0$ e 1 se $t \geq 0$. Como explica Heaviside:

> ... Como H é 0 antes de 0 e constante depois, H' é zero, exceto em $t = 0$, onde é infinita. No entanto sua soma total é H. Isto é, H' *é uma função de* t inteiramente concentrada em $t = 0$, de soma total 1 ...

(O que Heaviside defendia é a validade do teorema fundamental do cálculo para H', que é, $\int_{-\infty}^{\infty} H' = 1$). A função H aparece de forma natural na modelagem de todo fenômeno físico que se inicia em um momento dado. Por exemplo, a intensidade de corrente $I(t)$ que atravessa um circuito elétrico vale 0 antes do circuito ser ligado (digamos para $t < 0$) e toma um valor > 0, determinado pelas leis que regem o circuito, quando começa a circular a corrente. Usualmente $I(t)$ e outras grandezas significativas satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias (em geral, lineares com coeficientes constantes), com soluções válidas para todo t. No entanto as magnitudes que realmente devem satisfazer este sistema são da forma $H(t)\, I(t)$, de onde o interesse de definir $H'(t)$. No cálculo de Heaviside a H' aparecia como um termo intermediário nas operações, e desaparecia nos resultados finais. No entanto, nas tentativas posteriores de tratar com rigor o cálculo operacional em termos da transformada de Laplace, o papel de δ foi tornando-se mais importante.

Mas talvez o maior responsável pela popularização de δ e suas variantes foi P. A. M. Dirac, em sua intenção de unificar os formalismos matricial e ondulatório da mecânica quântica. Dirac representou os estados de um sistema mecânico por vetores, e os observáveis por operadores lineares. Em seus argumentos, Dirac supunha que no espaço vetorial dos estados, se podia escolher sempre uma base formada pelos autovetores de um operador correspondente a algum observável. Por outro lado, do ponto de vista físico, para os operadores mais interessantes a base correspondente de autovetores (ψ_p) é, em geral, infinita e o espectro é contínuo (nas palavras de Dirac: ... *o número total de estados independentes é infinito, e igual ao número de pontos de uma reta*), e a expressão de qualquer estado (vetor) nos termos da base tem a forma $\psi = \int a_p \psi_p dp$ (no lugar de uma soma). Mas quando, por exemplo, se quer representar desta forma um dos autovetores ψ_q, surge um problema, pois tem-se que escrever $\psi_q = \int \delta(p-q)\, \psi_p dp$, onde " *a função imprópria δ está definida por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p)\, dp = 1, \qquad \delta(p) = 0 \text{ para } p \neq 0\text{''}.$$

A representação de operadores nesse caso é feita em termos de uma "matriz contínua", (α_{pq}), da forma

$$\alpha(\psi_q) = \int \psi_p \alpha_{pq} dp.$$

No entanto, por exemplo, o operador multiplicação por uma constante $c \neq 0$ requer a utilização de um núcleo da forma $\alpha_{pq} = c\delta(p-q)$, que Dirac interpretou como sendo o análogo contínuo da matriz identidade (esta foi seguramente a razão pela qual Dirac designou esta função por δ; não por "Dirac" e sim por "Kronecker"). Dirac deu também *"certas propriedades elementares de δ que se deduzem da definição ou, pelo menos, não são inconsistentes"*. Entre elas:

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad x\delta(x) = 0; \quad -\delta'(x) = \delta'(-x); \quad x\delta'(x) = -\delta(x);$$

$$\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = -f'(a).$$

Em edições posteriores de seu livro *Princípios da Mecânica Quântica* foi adicionando novas propriedades, como

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x); \quad \frac{d}{dx}\log x = -\frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Na terceira edição de seu livro, Dirac mencionou *a forma alternativa de definir* δ como a derivada da função H.

O livro de Dirac tornou-se um clássico e com isto se generalizou o uso das funções singulares entre os físicos. Na terceira edição, Dirac se aproxima muito da definição funcional de δ, quando diz:

> *Apesar de uma função imprópria não ter um valor bem definido, quando aparece como fator em um integrando, a integral tem um valor definido. Na teoria quântica, sempre que aparece uma função singular, o último termo será usado dentro de uma integral. Portanto, seria possível desenvolver a teoria de modo que as funções singulares apareceriam unicamente como integrandos, e assim poderiam ser eliminadas.*

No uso de funções singulares, portanto, não é suposta nenhuma perda de rigor da teoria, mas é, simplesmente, uma notação conveniente ... De fato, qualquer equação em que aparece a função δ pode converter-se em outra equivalente, geralmente mais complicada, na qual δ não aparece.

Dirac não nos diz a forma de fazer tal conversão, mas a apresentação intuitiva que faz de δ, como limite impróprio de funções ordinárias, sugere que o *método rigoroso* consistiria em efetuar os cálculos com as aproximações de δ, e passar ao limite no resultado final. Parecem existir evidências claras de que muitos matemáticos desenvolveram ou utlilizaram diferentes teorias como uma forma de fazer precisos os argumentos que usam a δ, mas não para fundamentar rigorosamente a função δ em si mesma. Provavelmente estavam tão convencidos de sua ilegitimidade, que nem sequer tentaram.

Outro tipo de funções singulares ou *funções generalizadas* surge na teoria das séries e transformadas de Fourier. A razão é que para a existência da integral de Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixy} dx$, f deve ser, pelo menos, integrável e, portanto, decrescer adequadamente no infinito. Essa restrição é um grande inconveniente nas aplicações e seria desejável encontrar generalizações da transformada de Fourier (com as mesmas propriedades funcionais) que permitiriam aplicá-la a funções limitadas ou mais gerais. Uma referência a algumas tentativas nessa direção aparece na introdução de [8], chegando Schwartz a dizer que ... *Pour líntegrale de Fourier; l´íntroduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée.* De fato, algumas das soluções encontradas por autores como Carleman, Beurling e, sobretudo, Bochner, são muito próximas das distribuições de Schwartz. Uma exposição mais detalhada desses desenvolvimentos pode ser vista no Capítulo 3 de [6].

Pois bem, a teoria das distribuições trata de estudar e resolver a maior parte dos problemas assinalados anteriormente. As distribuições constituem um conjunto que se assemelha muito ao universo matemático ideal dos físicos e engenheiros, no qual "tudo vale": as funções são sempre deriváveis, as séries podem ser derivadas ou integradas termo a termo, etc. Esse universo contém, por um lado, as funções (localmente integráveis) e, por outro, as *funções singulares*, como δ e suas derivadas. A Schwartz deve-se a lúcida análise que conduziu à criação de uma teoria sistemática, coerente e muito potente, aplicável à solução de problemas muito diversos.

A Contribuição de L. Schwartz

Em sua autobiografia científica ([9]), Schwartz conta que no final da guerra, isolado como estava em Grenoble, desenvolveu uma teoria completa da dualidade em espaços de funções gerais, ... *théorie que m'a paru alors sans application et que j'ai gardée pour moi. Elle devait être la clef de la théorie des distribuitions.* Schwartz generalizou a teoria de dualidade dos espaços de Banach aos espaços de Fréchet, definindo o dual forte, caracterizando a reflexidade, os conjuntos limitados, etc. Os exemplos mais importantes desse tipo de espaço que Schwartz conhecia eram os espaços de funções holomorfas com a toplogia compacto-aberta usual e o espaço $C^{\infty}([0,1])$ das funções de classe C^{∞} em $[0,1]$ com a topologia da convergência uniforme em todas as derivadas. Este trabalho em Análise Funcional nunca foi publicado, no entanto foi fundamental para o descobrimento, imediatamente após, das distribuições. O passo decisivo foi proporcionado pela leitura de um artigo de G. Choquet e J. Deny *Sur quelques propriétés des moyennes characteristiques des functions harmoniques et polyharmoniques.* Nele são caracterizadas as funções contínuas f sobre $\mathbb{R}^n$ tais que o subespaço vetorial gerado por $f \circ S$, onde S percorre todo o conjunto das aplicações semelhanças de $\mathbb{R}^n$, não é denso no espaço de todas as funções contínuas. Essas funções são as poliharmônicas, isto é, aquelas que satisfazem $\Delta^k f = 0$ para algum natural k. Como essas funções não são, a priori, deriváveis, os autores introduziram uma definição generalizada de função poliharmônica, por meio de certas médias iteradas. Schwartz tratou de generalizar o resultado, substituindo as semelhanças por translações e homotetias. O resultado que obteve era similar, no entanto no lugar de uma potência do laplaciano aparecia um operador diferencial com coeficientes constantes arbitrários, de forma que a condição que devia ser satisfeita pela função f é $P(D)f = \sum a_p D^p f = 0$. Schwartz teve que definir então a noção de solução generalizada do operador $P(D)$ e optou, essencialmente, por tomar como tal o limite uniforme sobre compactos de soluções ordinárias. Posteriormente, provou que toda solução generalizada (em seu sentido) da equação de Laplace era uma solução ordinária, enquanto que existiam soluções generalizadas da equação da onda, que não eram soluções ordinárias.

Logo depois desse trabalho, continuou refletindo sobre a derivação generalizada. Parecia-lhe frustrante poder definir a solução generalizada de um operador diferencial sem ter dado um sentido para as derivadas (generalizadas) $D^p f$. E de repente, durante o que Schwartz chamou *la plus belle muit de ma vie* ([10], p. 246), surgiu a grande idéia: para encontrar soluções generalizadas de E.D.s tinha que generalizar a noção de função! Analisando sua demonstração, se deu conta de que as soluções generalizadas que havia introduzido, apareciam sempre em convolução com uma função infinitamente diferenciável com suporte compacto. Isso o levou a introduzir um novo objeto, que denominou *operador de convolução:* o definiu como um operador linear $\mathbf{T}$ do espaço $\mathcal{D}$ das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, com suporte compacto, em $\mathcal{E}$, o espaço das funções de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, com a propriedade de comutar com a convolução:

$$\mathbf{T}\cdot(\varphi * \psi) = (\mathbf{T}\cdot\varphi) * \psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Além disso, $\mathbf{T}$ deveria satisfazer alguma condição de continuidade para topologias adequadas em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$. Esse último espaço tem uma estrutura bem conhecida de espaços de Fréchet, com a toplogia de convergência uniforme sobre compactos das funções e suas derivadas. No entanto Schwartz não foi capaz, nesse momento, de encontrar uma topologia em $\mathcal{D}$ que induziria a noção de convergência seqüencial que necessitava, isto é: uma seqüência (ϕ_n) converge a 0 em $\mathcal{D}$ se, e somente se, todas as ϕ_n se anulam fora de um mesmo compacto, e convergem uniformente para 0, junto com cada uma de suas derivadas. Em conseqüência Schwartz impôs como condição de continuidade que os operadores transformem seqüências convergentes para 0 em $\mathcal{D}$ (no sentido anterior) em seqüências convergentes para 0 em $\mathcal{E}$.

Schwartz observou que toda função contínua f podia ser identificada com o operador $\mathcal{D} \ni \varphi \to f * \varphi$, e a "função" δ de Heaviside e Dirac podia ser interpretada como o operador $\mathcal{D} \ni \varphi \to \delta \cdot \varphi := \varphi$. Naturalmente, Schwartz abordou a questão de definir a derivada de um operador; que foi feito pela fórmula

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{T}\right) \cdot \varphi = \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi,$$

que generaliza a fórmula $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right) \cdot \varphi = \psi \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$. A primitiva de um operador se define de maneira óbvia, assim como a convolução de dois operadores. O produto de um operador por uma função de $\mathcal{D}$, entretanto, ocasionou algumas dificuldades.

Como temos dito, Schwartz desenvolveu esses conceitos e vários teoremas sobre seus operadores em uma noite de outubro de 1944. Nos seis meses seguintes continuou trabalhando no mesmo tema. Perto de fevereiro de 1945, começou a desenvolver uma teoria da Transformada de Fourier para seus operadores, mas encontrou grandes dificuldades. Tentou resolvê-las por vários meses. No fim de um dia, de repente, percebeu que todos seus problemas se resolviam facilmente se definisse as funções generalizadas não como operadores, e sim como *funcionais* seqüencialmente contínuos sobre $\mathcal{D}$. Denominou esses novos objetos de *distribuições* e seu conjunto foi designado por $\mathcal{D}'$. Como os elementos de $\mathcal{D}$ são muito regulares, a maior parte das operações usuais da análise matemática transformam $\mathcal{D}$ em si mesmo (com a exceção importante da transformada de Fourier), e além disso *são contínuas em relação à noção de convergência seqüencial introduzida*. Por dualidade, se obtém operadores de $\mathcal{D}'$ em si mesmo, que seguramente podem ser considerados como a extensão às distribuições das operações originais. Além disso, $\mathcal{D}$ está contido em muitos dos espaços de funções usuais, e é *denso* neles em suas topologias naturais (por exemplo, os espaços $L^p, 1 \leq p < \infty$, os espaços de Fréchet $\mathcal{E}^m$ $(0 \leq m \leq \infty)$ das funções de classe C^m sobre $\mathbb{R}^n$, com a noção de convergência uniforme sobre compactos das funções e cada uma de suas m derivadas, etc.). Portanto, novamente por dualidade, os *duais* desses espaços são identificados com subespaços das distribuiçoes $\mathcal{D}'$. Como já temos dito, toda função localmente integrável f pode ser identificada com uma distribuição $T_f \in \mathcal{D}'$ dada pela fórmula $T_f(\varphi) = \int f\varphi, \forall\varphi \in \mathcal{D}$.

Para a transformada de Fourier $\mathcal{F}$, um famoso teorema de Paley e Wiener mostra que a única função $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{D}$ é a função identicamente nula. Por isso, Schwartz teve que introduzir novos espaços de funções *teste* para estender a transformada de Fourier às distribuições. Assim surgiu o espaço $\mathcal{S}$, das funções de decrescimento rápido no infinito. Dotando $\mathcal{S}$ de uma topologia natural de espaço de Fréchet, resulta que $\mathcal{F}$ é um isomorfismo topológico de $\mathcal{S}$ em si mesmo e $\mathcal{D}$ é *denso* em $\mathcal{S}$. Portanto, o dual $\mathcal{S}'$ pode ser identificado com um subespaço das distribuições (as *distribuições temperadas)* e o operador transposto $\mathcal{F}^t$ pode ser considerado como a extensão da transformada de Fourier às distribuições de $\mathcal{S}'$. Observemos que $\mathcal{S}'$ é muito grande: contém todos os $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, assim como os polinômios, a δ e suas derivadas, etc.

Segundo suas próprias afirmações, a definição "correta" de distribuição foi sugerida a Schwartz pelos dois fatos seguintes:

1) Seu trabalho anterior sobre dualidade de espaços de Fréchet,

2) Seu conhecimento, através do grupo Bourbaki, da teoria das medidas de Radon, em particular a δ, que podem ser representadas como funcionais sobre um espaço de funções contínuas com suporte compacto.

Durante a primavera de 1945, Schwartz desenvolveu sua nova teoria das distribuições. Se na teoria de operadores de convolução seu trabalho sobre análise funcional abstrata tinha desempenhado um papel importante, na nova teoria desempenhou um papel muito mais destacado. E a influência era recíproca. Por exemplo, o conceito de *limite indutivo* de espaços de Fréchet se originou na teoria das distribuições. Schwartz sabia muito bem que a convergência seqüencial que havia definido em $\mathcal{D}$ não podia ser obtida a partir de uma topologia de Fréchet no espaço. Por essa razão, ele tratou de definir um sistema adequado de conjuntos limitados (*bornologia*) que permitiram, por dualidade, definir uma topologia em $\mathcal{D}'$, o espaço das distribuições. Quando Dieudonné conheceu a descrição de $\mathcal{D}$, a relacionou com a teoria abstrata de limites indutivos de espaços topológicos. Em 1949 apareceu um trabalho conjunto de Dieudonné e Schwartz, *La dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{LF})$ no qual se iniciava a teoria dos limites indutivos dos espaços localmente convexos, provando em um contexto abstrato os principais teoremas que Schwartz havia demonstrado em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$.

Devido ao seu trabalho anterior em Análise Funcional, Schwartz desenvolveu sua teoria tão rapidamente que pôde dar um curso sobre ela no inverno de 1945-46 no *Collège de France* de Paris.

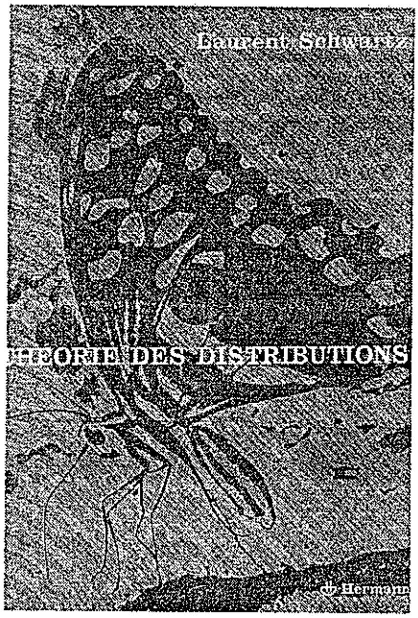
Afora seus conhecimentos sobre as soluções generalizadas de equações diferenciais (origem de seu interesse no tema), Schwartz não tinha informação, em 1944, da maior parte dos resultados que citamos anteriormente, como precedentes das distribuições: o cálculo de Heaviside, as funções singulares da mecânica quântica, os trabalhos de Bochner e Carleman sobre generalizações da transformada de Fourier, etc. Tampouco sabia de um importante trabalho, aparecido em 1936, de S. Sobolev, que tinha muitos pontos de contato com sua teoria. Com efeito, neste trabalho, intitulado *Méthode nouvelle á résoudre le probleme de Cauchy pour les equations linéaires hyperboliques normales,* Sobolev aborda o problema de Cauchy para uma E.D. em derivadas parciais de ordem 2, hiperbólica. Para sua solução, introduz o espaço das funções de classe s (suficientemente grande) de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ e o espaço fundamental de funcionais, Z_s, como os funcionais lineares seqüencialmente contínuos, no mesmo sentido que Schwartz (isto é, as distribuições de Schwartz para $s = \infty$!). Identifica as funções localmente integráveis com funcionais, define o operador de derivação da forma usual, etc., o que permite estender o operador diferencial a Z_s e tratar de resolver o problema de Cauchy neste espaço. Em lugar disso, Sobolev introduziu certos espaços intermediários de funções, que permitiram obter condições para que existam soluções clássicas do problema tratado. Sobolev não continuou o estudo dos espaços de funções. Em seus trabalhos posteriores se manteve sempre dentro dos conceitos tradicionais de função, apesar de usar sistematicamente a noção de diferenciação generalizada (de funções), o que o levou a introduzir os espaços de funções que hoje conhecemos com seu nome:

$$W_m^p = \{f \in L^p : D^\alpha f \in L^p \text{ para } |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada $D^\alpha f$ é compreendida no sentido das distribuições. Em 1938 anunciou seus famosos *teoremas de imersão* que foram (e são) amplamente utilizados. Em resumo, a diferenciação generalizada de Sobolev influiu de forma importante na utilização de espaços de Sobolev na teoria de E.D., no entanto os funcionais de Sobolev (as *distribuições*) não voltaram a ser utilizados até seu redescobrimento por Schwartz.

Assim Sobolev, como Schwartz, queria generalizar o conceito de função e algumas operações clássicas e construir um conjunto mais amplo onde um certo problema poderia ser resolvido mais facilmente. Os métodos inicialmente usados por Sobolev e Schwartz são análogos: funcionais (sobre os mesmos espaços) e dualidade. Desse ponto de vista, pode-se dizer que Sobolev inventou as distribuições. No entanto, Sobolev criou esses objetos como ferramentas para resolver um problema concreto, e não voltou a ocupar-se deles em geral. Por outro lado, Schwartz desenvolveu uma teoria completa, versátil e muito potente, aplicável e aplicada por ele mesmo na solução de muitos problemas diferentes. Além disso, introduziu uma série de noções que nem se esboçam no trabalho de Sobolev: as distribuições temperadas, o suporte de uma distribuição, as transformadas de Fourier e Laplace de uma distribuição, a interpretação de δ e as funções singulares dos físicos como distribuições, assim como as partes finitas de Hadamard, os produtos tensoriais e a convolução, etc. Assim podemos dizer que, se bem que Sobolev tenha inventado as distribuições, Schwartz criou a *Teoria das distribuições* como corpo de doutrina.

Schwartz escreveu quatro artigos sobre a teoria das distribuições antes da publicação de sua monografia *Théorie des Distributions* em dois volumes em 1950/51, que rapidamente tornou-se a referência padrão sobre o tema. A reedição de 1966 contém dois novos capítulos, um sobre Transformada de Laplace e outro sobre Correntes.



A obra matemática de Laurent Schwartz

Como já dissemos, a obra matemática de Schwartz abrange muito mais aspectos que a Teoria das Distribuições. E nada melhor que ter o próprio Schwartz como guia para conhecer sua obra, que em [9], divide seu trabalho de investigação em cinco grandes partes:

- I. *Polinômios, somas de exponenciais, funções semi-periódicas, análise e síntese harmônica.*

Aqui Schwartz inclui sua Tese e alguns de seus primeiros trabalhos. Em todos eles se estudam problemas de aproximação em espaços de funções. Assim, em sua Tese Schwartz aborda o seguinte problema. Um famoso teorema de Ch. H. Müntz generaliza o teorema de Weierstrass provando que toda função real contínua em [0,1] pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas dos monômios $\{t^{\lambda_n} : \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$ números reais tais que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\}$ se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge. A pergunta que Schwartz responde em sua Tese é *Quais funções podem ser aproximadas pelos polinômios precedentes se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ *converge?* O Teorema de Hahn-Banach e suas conseqüências tiveram um papel importante na solução.

O restante dos trabalhos dessa área trata de problemas similares: caracterizar quando um certo subespaço de um espaço de funções contém alguns elementos com propriedades especiais e, no caso da síntese harmônica, provar que o subespaço vetorial fechado gerado por esses elementos coincide com o espaço inicial. Particularmente interessante, pelos trabalhos posteriores que originou, foi o problema da síntese harmônica no espaço S' das distribuições temperadas que, por meio da transformada de Fourier, se translada a interessantes problemas de anéis de funções diferenciáveis. Isso levou Schwartz a entrar em contato com H. Whitney (a primeira vez, aproveitando um congresso em Nancy em junho de 1947), com um intercâmbio frutífero para ambos. Com relação a esses temas, destacamos os trabalhos de B. Malgrange e J. C. Tougeron, alguns deles reunidos nas conhecidas monografias *Ideals of differentiable functions* (B. Malgrange, Tata Institute, Oxford University Press, 1967) e *Les Idéaux de fonctions différentiables* (J. C. Tougeron, Springer, 1972).

- II. *A Teoria das Distribuições*

É provavelmente a obra mais emblemática de Schwartz. A ela dedicamos toda a seção anterior.

- III *Análise funcional, distribuições vetoriais e teorema dos núcleos*

Já comentamos a importância que teve para a criação da teoria das distribuições os conhecimentos de Schwartz de Análise Funcional. No entanto os instrumentos necessários para desenvolver a teoria eram insuficientes. E Schwartz contribuiu bastante para a sua criação. Já comentamos o famoso trabalho com Dieudonné de 1949, no qual foi estabelecida a teoria dos limites indutivos dos espaços de Fréchet, essencial para o conhecimento do espaço $\mathcal{D}$ e seu dual. O aparecimento desse trabalho estimulou o desenvolvimento da teoria dos espaços localmentes convexos (e.l.c.). Provavelmente se deve a Schwartz e Dieudonné a idéia de classificar os e.l.c. segundo o seu comportamento frente a alguns teoremas *clássicos* ou propriedades importantes dos espaços normados. Assim, os e.l.c. que satisfazem o teorema de Banach-Steinhaus, se denominam *tonelados*; os e.l.c. tais que toda aplicação linear limitada sobre eles é contínua, se chamam *bornológicos*; naqueles nos quais é válida uma certa versão do Teorema da Aplicação aberta se chamam *espaços de Pták*, etc. O certo é que essa classificação apareceu no *Livre 5* dos *Élements de Mathématique* de Bourbaki, intitulado *Espaços Vetoriais Topológicos*, uma das primeiras monografias sobre o tema e de grande influência posterior.

Também se deve a Schwartz uma extensão aos espaços de Fréchet da teoria clássica de Riesz sobre perturbações compactas da identidade em espaços de Banach, assim como um teorema sobre o gráfico boreliano, que estende o clássico teorema do gráfico fechado, demonstrado por Banach para F - espaços, que no entanto não era aplicável aos espaços de distribuições. Esse resultado foi estendido posteriormente por De Wilde, que introduziu os espaços que levam o seu nome, como o contexto mais adequado para desenvolver um teorema do tipo "gráfico fechado" mais geral.

Finalmente, queremos citar nessa parte um dos grande êxitos da teoria das distribuições: o descobrimento em 1950 do *teorema dos núcleos.* Desde os trabalhos de Hilbert e Riesz, se sabia que os operadores em um espaço de funções dado (por exemplo, L_2), definidos por um "núcleo funcional" $K(x,y)$, isto é, da forma $T_K(f)(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$, têm propriedades especialmente interessantes, no entanto, infelizmente, estes operadores não englobam todos os possíveis (de fato, a identidade em L_2 não pode expressar-se assim). Essa foi uma das dificuldades que apareceram ao se tratar da formalização da mecânica quântica. Dirac tentou justificar que os *observáveis* seriam sempre dados por operadores desse tipo, admitindo, assim, funções singulares como núcleos. No entanto, foi Schwartz quem conseguiu demonstrar que praticamente todos os operadores que aparecem em Análise podem ser representados por um "núcleo distribucional". Concretamente, se U, V são abertos em espaços euclidianos, $\mathcal{D}(U)$ o espaço das funções de classe C^∞, com suporte compacto contido em U, $\mathcal{D}'(V)$ o espaço das distribuições (isto é, o dual de $\mathcal{D}(V)$) sobre V, qualquer operador linear contínuo $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ tem associado um "núcleo distribucional" $K \in \mathcal{D}'(U \times V)$ de modo que para todo par de funções $u \in \mathcal{D}(U)$, $v \in \mathcal{D}(V)$, se tem $\langle T(u), v\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle$ ou, em forma simbólica,

$$T(u) = \int K(x,y)\, u(x)\, dx.$$

Se agora E é um espaço de funções sobre U e F outro sobre V, usualmente se tem a relação $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$, e $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$, com isto qualquer operador linear contínuo $S : E \to F$ induz, por composição, um $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$, portanto, é definido por um núcleo distribucional.

Em sua Tese, A. Grothendieck (a quem já citamos), outro dos grandes responsáveis pelo tremendo desenvolvimento da teoria dos e.l.c. na década de 1950-1960, abordou o problema de descobrir a razão de porque se verifica o teorema dos núcleos no espaço $\mathcal{D}$ e não, por exemplo, em L_2. O resultado foi uma monografia, *Produits tensorielles topologiques et espaces nucléaires,* publicada nas *Memoirs of American Mathematical Society* em 1953. Essa obra, de difícil leitura, contém uma tremenda quantidade de idéias seminais, que motivaram muitos dos desenvolvimentos posteriores da teoria dos e.l.c. e dos espaços de Banach. Nela se isola a classe dos e.l.c. para os quais o teorema dos núcleos é válido: *os espaços nucleares.* A maior parte dos espaços de funções que aparecem na teoria das distribuições são nucleares. No entanto, os únicos espaços normados nucleares são os de dimensão finita! Os espaços nucleares também mostraram sua importância na teoria de probabilidades e na teoria da medida.

A contribuição de Grothendieck se deixou notar durante muito tempo, e não só em Análise Funcional (recordemos seus trabalhos fundamentais em Geometria Algébrica, etc.). Suas idéias e métodos de trabalho abriram novas perspectivas e linhas de investigação que seguem ocupando os especialistas. No entanto, sua enumeração resultaria demasiado técnica e prolixa e, em todo caso, remetemos o leitor interessado a [1].

- IV. *Física Teórica*

Era inevitável que Schwartz estudasse algumas aplicações da teoria das distribuições à Física, suas contribuições mais importantes nesta direção estão reunidas na monografia *Application of distributions to the theory of elementry particles in Quantum mechanics* (Gordon and Breach, New York, 1968), traduzido posteriormente para o francês.

- V. *Teoria da integração, probabilidades, probabilidades cilíndricas e aplicações radonificantes*

Schwartz sempre manifestou seu reconhecimento e admiração por seu sogro, o grande probabilista Paul Levy, e pela influência por ele exercida sobre si. Por isso, a teoria da medida e integração é um tema recorrente em sua atividade de pesquisa. De fato, a partir de 1964, esses temas são os que monopolizaram sua atenção de forma prioritária. E também neles Schwartz deixou a sua marca. Sua obra *Radon Measures on arbitrary topological spaces and Cylindrical measures*, publicada pelo Tata Institute of Fundamental Research de Bombaim e Oxford University Press em 1973, estabelece uma ponte entre a teoria da medida de conjuntos de pontos, como função de conjuntos enumeravelmente aditiva sobre uma σ-álgebra, e a teoria das medidas de Radon de Bourbaki (herdeira dos trabalhos anteriores de H. Cartan e A. Weil), definidas como formas lineares não negativas sobre o espaço $\mathcal{K}(X)$ das funções contínuas com suporte compacto sobre o espaço topológico localmente compacto X. Além disso, esta nova teoria das medidas de Radon em espaços arbitrários permite desenvolver uma teoria consistente de probabilidades cilíndricas em espaços localmente convexos. Esses objetos surgem na tentativa de construir funções de conjuntos no espaço E "colando" probabilidades definidas sobre espaços de dimensão finita (por exemplo, a partir de medidas gaussianas n-dimensionais, obter uma certa "medida" no espaço total). Em geral, se obtém uma função de conjuntos sobre uma *álgebra* de subconjuntos de E, *os conjuntos cilíndricos*, que não pode estender-se a uma medida enumeravelmente aditiva. Introduzidas por I. Segal, L. Gross e a escola soviética de probabilidades (J. V. Prohorov, V. V. Sazonov, R. A. Minlos, etc.), a eles se devem os primeiros resultados notáveis. A teoria de Schwartz proporciona um contexto geral que inclui a maioria dos resultados clássicos, clareando o papel dos diferentes tipos de operadores que apareciam nos mesmos (nucleares, Hilbert-Schmidt, etc.) e desenvolvendo uma teoria completamente nova: a dos *operadores radonificantes*. Essencialmente, um operador T de um espaço de Banach E em outro F é *radonificante* (de uma certa ordem p) se transforma probabilidades cilíndricas sobre E (de tipo p) em medidas de Radon sobre F (de ordem p). Esses operadores generalizam os operadores p-somantes (e, como demonstrou o próprio Schwartz, coincidem no caso $1 < p < \infty$, no entanto o resultado não é trivial.) A teoria tem estreitas relações com a geometria dos Espaços de Banach, como se manifesta no livro *Geometry and Probability in Banach spaces,* publicado em 1981 como o volume Nº 852 da coleção *Lecture Notes in Mathematics*, que reúne uma série de conferências proferidas por Schwartz em Berkeley em 1978.

O interesse científico de Schwartz em seus últimos anos direcionou-se cada vez mais para a teoria da probabilidade. Obteve importantes resultados sobre desintegração de medidas, com aplicações à teoria de martingales e supermartingales (com valores escalares ou medidas), aos processos de Markov, etc. Também estudou as semi-martingales com valores em uma variedade diferenciável ou uma variedade analítica, e suas aplicações às equações diferenciais estocásticas.

Conclusão

Eu sou um matemático; a matemática preenche a minha vida ... Assim começa Schwartz sua autobiografia e, provavelmente, esta tenha sido a característica essencial de sua vida. Em outro ponto, diz:
... sempre quis mudar o mundo. Consagrei uma grande parte de minha vida à política, adotando a "carreira'" de intelectual engajado. Mas a matemática seguiu sendo primordial ... Muitas vezes faço política por sentido de dever, mas a política não me interessa: minhas três paixões são a pesquisa, o ensino e a entomologia.

Como escreve Luis M. Sàenz ([11]), ... *a vida de Laurent Schwartz causa inveja - por ser uma vida plena - e assombro, já que não pode-*

mos deixar de nos perguntar como é possível uma pessoa fazer tantas coisas e fazê-las tão bem? Ao longo desta breve resenha, esperamos ter despertado essa sensação no leitor. Cremos que Laurent Schwartz foi um grande homem, em todos os sentidos do termo. Sua personalidade e seu compromisso ético dele fizeram uma referência de intelectual comprometido com seu tempo. Com sua morte desaparece não apenas um excelente matemático, mas também um magnífico exemplar de ser humano.

Referências

[1] L. Alonso e A. Jeremías. *La obra de Alexander Grothendieck*, La Gaceta de la RSME, Vol. 4, N. 3 (2001), 623-638.

[2] Harald Bohr. *Address of Professor Harald Bohr, Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950. Cambridge, Massachusetts, U.S.A., Vol. I, 127-134, American Mathematical Society, 1952.

[3] F. Bombal. *Los orígenes de la Teoría de Distribuciones*, Seminario de Historia de la Matemática **I**, Universidad Complutense, Madrid, 1991.

[4] K. Chandrasekharan. *The autobiography of Laurent Schwartz*, Notices of the American Mathematical Society, Vol. **45**, N. 9 (1998), 1141-1147.

[5] J. Hernandéz. *Matemático, entomólogo, persona decente, Laurent Schwartz, un mathématicien aux prises avec le siècle*, La Gaceta de la RSME, Vol. **2**, N. 2 (1999), 319-326.

[6] J. Lützen. *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, 1982.

[7] M. Monastyrsky. *Modern Mathematics in the light of the Fields Medals,* A. K. Peters, Ltd. Wellesley, Mass., 1996.

[8] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*, 3a. Ed., Hermann, Paris, 1966.

[9] L. Schwartz. *Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz*, Mathematical Analysis and Applications, Part A, 1-25. Col. Advances in Mathematics, Supplementary Studies. Ed. by L. Nachbin. Academic Press, 1981.

[10] L. Schwartz. *Un Mathématicien aux prises avec le siècle*, Éd. Odile Jacob, 1997.

[11] L. M. Sáenz. *Memorias de Laurent Schwartz (Pasión por saber, pasión por vivir)*, Iniciativa Socialista **46**, Junho de 1997.

Fernando Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense, 28040 Madrid - Espanha
e-mail: bombal@mat.ucm.es