MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nos 38/39 – julho/dezembro 2005 – pp. 79–92

A normalidade da constante de Champernowne b-nária

Jairo K. Mengue e Cydara C. Ripoll[1]

1 Introdução

Dado um inteiro $b \geq 2$, é fato conhecido que todo número real admite uma *expansão em base b*. Por exemplo, todo número natural γ admite uma única representação da forma

$$\gamma = \sum_{i=0}^{S} a_i \times b^i,$$

representação esta usualmente denotada por $(a_S...a_1a_0)_b$, onde a_i é inteiro satisfazendo $0 \leq a_i < b$, para $i = 0, 1, 2, ..., S$, e $a_S \neq 0$. Mas também todo número real $\alpha \in [0, 1)$ admite uma representação na forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i},$$

onde a_i é inteiro satisfazendo $0 \leq a_i < b$ para todo i, chamada *expansão b−nária de α*. Se exigirmos ainda que $a_i < b - 1$ para infinitos a_i então esta representação é única.

Neste texto, escreveremos

$$\alpha = (.a_1a_2a_3...)_b$$

[1]Bolsista de Iniciação Científica do CNPq-Brasil

para denotar a expansão b–nária de α que satisfaz ainda a condição $a_i < b-1$ para infinitos a_i. Cada a_i é chamado de *dígito b–nário* ou *b–dígito* de α.

Definição 1.1. *Um número real $\alpha \in [0,1)$ é dito b–**normal** ou **normal na base** b se qualquer bloco ordenado de dígitos b–nários ocorre na expansão b–nária de α com uma freqüência que depende apenas do tamanho do bloco, a saber: se B_n é um bloco ordenado qualquer de n dígitos b–nários, então B_n ocorre na expansão b–nária de α com freqüência $1/b^n$.*

Por exemplo, se α é normal na base 10, então em sua expansão decimal cada um dos 10 dígitos $0, 1, 2, ..., 9$ deve ocorrer com freqüência $1/10$; cada um dos 100 blocos de dois dígitos $00, 01, ..., 99$ deve ocorrer com freqüência $1/100$, etc.

Por um certo tempo acreditou-se que a noção de normalidade estava relacionada com a de aleatoriedade (veja [5]). Acreditava-se que um número com um padrão em sua expansão ou construído de forma artificial não teria chance de ser um número normal. Por exemplo, o número $(.1010010001...)_b$, nada tem de normal.

Porém, em 1933, D. G. Champernowne mostrou a 10–normalidade de algumas constantes construídas de forma artificial, como por exemplo, a hoje conhecida por "constante de Champernowne"

$$\mathcal{C}_{10} = (.12345678910111213...)_{10}$$

obtida concatenando-se os naturais expressos na base 10.

Não se sabe ainda se constantes clássicas como π e $\sqrt{2}$ são 10–normais, embora muitos estudos experimentais apontem para tal (veja [5]). Estudos recentes de Bailey e Crandall buscam a prova da normalidade em base 2, de algumas destas constantes clássicas. Mais comentários podem ser encontrados em [1].

Por outro lado, prova-se que quase todos os números reais são 10–normais. Na verdade, quase todos os números reais são normais em *qualquer* base b (estes são chamados *números absolutamente normais*) (veja [4]).

No encontro "Jornadas de Iniciação Científica do IMPA" em novembro de 2004, o primeiro autor apresentou uma nova prova da normalidade em base 10 da constante de Champernowne. Aqui neste trabalho apresentamos um resultado mais geral:

Definição 1.2. *Seja b um número inteiro, $b \geq 2$. Denominamos* ***constante de Champernowne $b-$nária*** *o número real C_b obtido concatenando-se os naturais expressos em base b.*

Por exemplo,

$$C_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... = (.11011100101110111...)_2,$$
$$C_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + ... = (.121011122021...)_3$$

e, para $b > 3$,

$$C_b = \frac{1}{b} + \frac{2}{b^2} + ... + \frac{c}{b^c} + \frac{1}{b^b} + \frac{0}{b^{b+1}} + \frac{1}{b^{b+2}} + \frac{1}{b^{b+3}} + ...,$$

onde $c = b - 1$.

Realizando uma análise análoga à que possibilitou mostrar que C_{10} é $10-$normal, provamos aqui o seguinte resultado:

Teorema 1.3. *C_b é $b-$normal.*

2 Preliminares

Notação 2.1. *Em todo este texto, b denotará um inteiro ≥ 2, c denotará tanto o número $b-1$ quanto o dígito $b-$nário $b-1$ e $\lfloor x \rfloor$ denotará o maior inteiro menor ou igual a x.*

Lema 2.2. *Para cada $k \in \mathbb{N}^*$*

$$\sum_{i=1}^{k} i \times b^i = \frac{(ck-1) \times b^{k+1} + b}{c^2}.$$

Prova. Escrevemos inicialmente

$$\sum_{i=1}^{k} i \times b^i = k\sum_{i=1}^{k} b^i - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{i} b^j.$$

Daí, aplicando a fórmula da soma de progressão geométrica, chega-se à expressão desejada. ■

Notação 2.3. *Por B_n denotaremos um bloco ordenado qualquer de n dígitos $b-$nários e por $\#_b(B_n; S)$ denotaremos o número de ocorrências do bloco B_n até o $S-$ésimo $b-$dígito da expansão $b-$nária de C_b.*

Assim, se $C_b = (.a_1a_2a_3...)_b$ e $B_n = b_1b_2...b_n$, então $\#_b(B_n; S)$ é o número de vezes em que obtemos a igualdade dos vetores:

$$(a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}) = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

onde $1 \leq k \leq S - n + 1$. Por exemplo, dentro do bloco 10002, o bloco 00 ocorre duas vezes.

Notação 2.4. *Por 0_n denotaremos o bloco formado por n zeros $b-$nários e por θ_n denotaremos um bloco ordenado qualquer de n dígitos $b-$nários porém distinto de 0_n.*

3 A normalidade de C_b

Para provar que C_b é $b-$normal, precisamos mostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, a freqüência de ocorrência dos blocos 0_n e θ_n na expansão $b-$nária de C_b é de $1/b^n$, ou seja, que

$$(i)\ \lim_{S\to\infty}\frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S} = \frac{1}{b^n} \qquad \text{e} \qquad (ii)\ \lim_{S\to\infty}\frac{\#_b(\theta\_n;\ S)}{S} = \frac{1}{b^n}.$$

Dividiremos a prova em quatro etapas. Como primeira etapa vamos mostrar que basta provarmos (i) :

Proposição 3.1. *Para todo S natural não nulo, temos*

$$\#_b(0\_n;\ S) \leq \#_b(\theta\_n;\ S).$$

Prova. A idéia é associar a cada aparição de 0_n na expansão $b-$nária de $\mathcal{C}_b$ uma aparição anterior de θ_n e mostrar que esta correspondência é injetiva, ou seja, que a ocorrências distintas de 0_n estão associadas ocorrências (anteriores) distintas do bloco θ_n.

Note que $\mathcal{C}_b$ é formado por concatenações de naturais em base b. Suponhamos então que 0_n ocorre na expansão $b-$nária de algum natural γ, digamos:

$$\gamma = (c_1c_2...c_k\underbrace{0...0}_{n}\ d_1d_2...d_l)_b,$$

que denotaremos abreviadamente por $(C_k\ \ 0\_n\ \ D_l)_b$, onde $c_1, ..., c_k$ e $d_1, ..., d_l$ são $b-$dígitos, $c_1 > 0$, e C_k e B_l são os blocos formados pelos $b-$dígitos $c_1, ..., c_k$ e $d_1, ..., d_l$ respectivamente.

1º caso: $c_1 \neq 1$ ou $k > 1$

Aqui associamos a ocorrência de 0_n em γ, com a ocorrência de θ_n no natural:

$$\gamma' = (C'_k\ \theta\_n\ D_l)_b,$$

onde $(C'_k)_b = (C_k)_b - 1$ (ou seja, $(C'_k)_b$ é a expansão $b-$nária do antecessor do natural cuja expansão $b-$nária é $(C_k)_b$.).

2ºcaso: $c_1 = 1$ e $k = 1$. Neste caso,

- se θ_n é da forma $\theta\_n = b_1...b_n$, onde $b_1 \neq 0$, associamos a ocorrência de 0_n no natural $\gamma = (1\ 0\_n\ D_l)_b$, com a ocorrência de θ_n no natural $\gamma' = (\theta\_n\ D_l)_b$.

- se θ_n é da forma $\theta\_n = \underbrace{0...0}_{j}b_{j+1}...b_n$, onde $b_{j+1} \neq 0$, associamos a ocorrência de 0_n no natural $\gamma = (1\ 0\_n\ D_l)_b$, com a ocorrência de θ_n na concatenação dos naturais:

$$\gamma' = (b_{j+1}...b_nd_1...d_l\underbrace{0...0}_{j})_b \quad \text{e} \quad \gamma' + 1 = (b_{j+1}...b_nd_1...d_l\underbrace{0...0}_{j-1}1)_b.$$

Deixamos para o leitor a tarefa de verificar que esta correspondência é injetiva e que todo bloco θ_n associado a um bloco 0_n ocorre antes da ocorrência de 0_n, isto é, que $\gamma' < \gamma$. ∎

Da prova da normalidade de $\mathcal{C}_b$ encerra-se com o seguinte

Corolário 3.2. *(i) A seqüência* $\frac{\#_b(0\_n;\, S)}{S}$ *é limitada superiormente por* $\frac{1}{b^n}$.

(ii) Se $lim_{S\to\infty}\frac{\#_b(0\_n;\, S)}{S} = \frac{1}{b^n}$, *então* $lim_{S\to\infty}\frac{\#_b(\theta\_n;\, S)}{S} = \frac{1}{b^n}$.

Prova. Salientamos inicialmente duas afirmações de fácil demonstração:

Afirmação 1*:* Há $b^n - 1$ blocos θ_n distintos.

Afirmação 2*:* Para todo $S \geq n$,

$$\frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S} + \sum_{\theta\_n}\frac{\#_b(\theta\_n;\ S)}{S} = \frac{S-n+1}{S} \leq 1.$$

Para mostrarmos *(i)* basta observarmos que, se para algum S ocorrer

$$\frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S} > \frac{1}{b^n},$$

então, pela afirmação 1 e pela proposição anterior, obtemos uma contradição com a afirmação 2.

Para provar *(ii)*, observamos que, se $\lim_{S\to\infty}\frac{\#_b(0\_n;\, S)}{S} = \frac{1}{b^n}$, então, usando também *(i)* obtemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe S_0 tal que, para todo $S > S_0$,

$$\frac{1}{b^n} > \frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S} > \frac{1}{b^n} - \varepsilon. \tag{1}$$

Suponhamos agora que, para algum bloco θ_n,

$$\frac{\#_b(\theta\_n;\ S)}{S} > \frac{1}{b^n} + b^n\varepsilon.$$

Então, pelas Afirmações 1 e 2, deduzimos que existe algum outro bloco θ'_n, tal que

$$\frac{\#_b(\theta'\_n;\ S)}{S} < \frac{1}{b^n} - \varepsilon \overset{(1)}{<} \frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S},$$

o que contraria a proposição anterior. Assim concluímos que todo bloco θ_n satisfaz, para todo $S > S_0$

$$\frac{1}{b^n} - b^n\varepsilon < \frac{1}{b^n} - \varepsilon < \frac{\#_b(0\_n;\ S)}{S} < \frac{\#_b(\theta\_n;\ S)}{S} < \frac{1}{b^n} + b^n\varepsilon,$$

e portanto

$$\lim_{S\to\infty} \frac{\#_b(\theta\_n;\ S)}{S} = \frac{1}{b^n},$$

o que completa a prova de *(ii)*. ■

A segunda etapa da prova da normalidade de C_b consiste em computarmos o número de ocorrências do bloco 0_n, após termos concatenado todos os naturais cuja expansão b−nária envolve um fixado número de dígitos b−nários. E, para tal, começamos estudando a ocorrência do b−dígito zero, ou seja, do bloco 0_1.

É claro que os naturais não nulos cuja expansão b−nária envolve um só dígito b−nário são exatamente os c primeiros naturais não nulos. Daí obtemos

$$\#_b(0\_1;\ c) = 0.$$

Para escrever em base b os naturais cuja expansão b−nária envolve dois dígitos b−nários (ou seja, de $(10)_b$ até $(cc)_b$, ou ainda, de b até b^2-1), utilizamos ao todo $2 \times c \times b$ dígitos b−nários, e nesta lista o b−dígito zero ocorreu c vezes, exatamente nos casos $(10)_b$, $(20)_b, ...,$ $(c0)_b$; daí,

$$\#_b(0\_1;\ c + c \times 2 \times b) = c,$$

ou seja, o número de ocorrências do b−dígito zero ao concatenarmos todos os naturais de dois ou menos b−dígitos é c.

Para listarmos em base b todos os naturais entre $(100)_b$ e $(ccc)_b$ (ou entre b^2 e $b^2 - 1$), utilizamos $3 \times c \times b^2$ dígitos b−nários, e o b−dígito zero ocorreu $2 \times c \times b$ vezes, precisamente nos naturais da forma:

$$(a_1 0 a_2)_b \text{ ou } (a_1 a_2 0)_b, \text{onde } a_1 \in \{1, ..., c\} \text{ e } a_2 \in \{0, 1, ..., c\},$$

e portanto o número de ocorrências do b−dígito zero, ao concatenarmos todos os naturais de três ou menos b−dígitos, é dado por

$$c + c \times 2 \times b,$$

ou seja,

$$\#_b(0\_1;\ c + c\times 2\times b + c\times 3\times b^2) = c + c\times 2\times b.$$

Note que estamos encontrando um padrão recursivo: de fato, por indução matemática podemos mostrar que, para $k \geq 1$,

$$\#_b(0\_1;\ c\times \sum_{i=1}^{k} i\times b^{i-1}) = c\times \sum_{i=1}^{k-1} i\times b^{i-1}.$$

Todo o raciocínio feito acima para o bloco 0_1 pode ser repetido para o bloco 0_n de n zeros; assim, tem-se que, para $k \geq n$

$$\#_b(0\_n;\ c\times \sum_{i=1}^{k} i\times b^{i-1}) = c\times \sum_{i=1}^{k-n} i\times b^{i-1}.$$

Agora, aplicando o Lema 2.2, concluímos:

Proposição 3.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $k \in \mathbb{N}^*, k \geq n$*

(i) $\frac{1}{c}[(ck-1)\times b^k + 1]$ é o número de $b-$dígitos utilizados ao concatenarmos todos os naturais com k ou menos dígitos $b-$nários (que nada mais são do que os naturais de 1 até $b^k - 1$).

(ii) $\#_b(0\_n;\ \frac{(ck-1)\times b^k+1}{c}) = \frac{(c(k-n)-1)\times b^{k-n}+1}{c}$.

A terceira parte do trabalho consiste em estimarmos o número de ocorrências de 0_n até que os primeiros l naturais de $k+1$ dígitos $b-$nários tenham sido listados. Para tal, utilizamos mais uma notação:

Notação 3.4. *Se m é um natural de $k+1$ dígitos $b-$nários, então $T_b(0\_n; m)$ denota o número de ocorrências de 0_n desde a expansão $b-$nária de b^k até a expansão $b-$nária de m.*

Proposição 3.5. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}^*$, tais que $k > 2n$, e seja m um natural cuja expansão $b-$nária envolve $k+1$ dígitos $b-$nários. Então:*

$$T_b(0\_n; m) \geq (k - 2n + 1)\frac{(m - b^k - b^n)}{b^n}.$$

Prova. Suponhamos

$$m = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b.$$

Dado $j \in \{0, 1, \ldots, k-n\}$, fixamos o bloco 0_n na posição dos b−dígitos $a_{n+j-1}, a_{n+j-2}, \ldots, a_j$, e vamos estimar o número de vezes que 0_n ocorre, nesta posição fixada, desde b^k até

$$m'(j) = \begin{cases} (a_k \ldots a_{n+j}\ 0\_n\ a_{j-1} \ldots a_1 a_0)_b, \text{ se } j > 0 \\ (a_k a_{k-1} \ldots a_n 0\_n)_b, \text{ se } j = 0 \end{cases}$$

que é um inteiro menor ou igual a m. Denotamos por A_{n+j}, o natural $(a_k a_{k-1} \ldots a_{n+j})_b$, e por A'_j, o natural $(a_{j-1} \ldots a_0)_b$, se $j > 0$ e $A'_0 = 0$.

Observamos que de b^k até $m'(j)$, o bloco 0_n ocorreu exatamente

$$(A_{n+j} - b^{k-n-j}) \times b^j + A'_j + 1$$

vezes nesta posição fixada e portanto podemos afirmar que, nesta posição, de b^k até m, o bloco 0_n ocorreu, no mínimo $(A_{n+j} - b^{k-n-j}) \times b^j + A'_j$ vezes.

Como $0 \leq j \leq k-n$, obtemos que de b^k até m, o bloco 0_n ocorreu pelo menos $\sum_{j=0}^{k-n}[(A_{n+j} - b^{k-n-j}) \times b^j + A'_j]$ vezes, e portanto:

$$\begin{aligned} T_b(0\_n; m) &\geq \sum_{j=0}^{k-n}[(A_{n+j} - b^{k-n-j}) \times b^j + A'_j] \\ &= -(k-n+1) \times b^{k-n} + \sum_{j=0}^{k-n}[A_{n+j} \times b^j + A'_j]. \qquad (2) \end{aligned}$$

Lembramos que

$$A_{n+j} = \sum_{i=n+j}^{k} a_i \times b^{i-n-j} \text{ e que para } j > 0, \text{ temos } A'_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i \times b^i.$$

Daí,

$$\sum_{j=0}^{k-n}[A_{n+j} \times b^j + A'_j] = (k-n+1) \times a_k \times b^{k-n}$$
$$+\sum_{i=n}^{k-1}(i-n+1) \times a_i \times b^{i-n} + \sum_{i=0}^{k-n-1}(k-n-i) \times a_i \times b^i$$
$$\geq (k-n+1) \times a_k \times b^{k-n} + (k-2n+1)\sum_{i=n}^{k-1} a_i \times b^{i-n}$$

Então concluímos de (2) que:

$$\begin{aligned} T_b(0\_n; m) &\geq (k-n+1)\times(a_k-1)\times b^{k-n} + (k-2n+1)\times \sum_{i=n}^{k-1} a_i \times b^{i-n} \\ &\geq (k-2n+1) \times \left((a_k-1) \times b^{k-n} + \sum_{i=n}^{k-1} a_i \times b^{i-n}\right) \\ &\geq (k-2n+1)\frac{(m-b^k-b^n)}{b^n}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Corolário 3.6. *Sejam n, k naturais tais que $k > 2n$ e seja m um natural cuja expansão $b-$nária tem $k+1$ dígitos $b-$nários.*

(i) Se S denota o número de $b-$dígitos utilizados para escrevermos todos os naturais desde 1 até m, então

$$\#_b(0\_n; S) \geq \frac{b^{k-n}(c(k-n)-1)+1}{c} + (k-2n+1)\frac{(m-b^k-b^n)}{b^n}.$$

(ii) Se S denota o número de $b-$dígitos utilizados para escrevermos todos os naturais desde 1 até parte de m, então

$$\frac{\#_b(0\_n; S)}{S}$$
$$\geq \frac{1}{b^n}\frac{b^k(cn-b) + c \times m(k-2n+1) - c \times b^n(2k-2n+1) + b^n}{-b^{k+1} + c(k+1)(m+1) + 1}.$$

Prova. *(i)* é conseqüência direta das duas últimas proposições. Para provar *(ii)*, observamos que, se S representa o número de b−dígitos até algum dos b−dígitos de m (não necessariamente o último), subtraindo k ocorrências da expressão em *(i)*, obtemos

$$\#_b(0\_n; S) \geq \frac{b^{k-n}(c(k-n)-1)+1}{c} + (k-2n+1)\frac{(m-b^k-b^n)}{b^n} - k \tag{3}$$

pois em m (que tem $k+1$ dígitos) o bloco 0_n terá ocorrido no máximo k vezes.

Note que se m é um natural de $k+1$ dígitos b−nários, então, ao escrevermos os naturais desde b^k até m, fazemos uso de $(m-b^k+1) \times (k+1)$ dígitos b−nários e portanto

$$S \leq \frac{b^k(ck-1)+1}{c} + (m-b^k+1)(k+1) \tag{4}$$

Agora, para completar a prova de *(ii)*, basta combinar (3) e (4). ∎

A última parte de nosso trabalho é mostrar que a expressão dada em *(ii)*

$$\frac{1}{b^n}\frac{b^k(cn-b)+c\times m(k-2n+1)-c\times b^n(2k-2n+1)+b^n}{-b^{k+1}+c(k+1)(m+1)+1} \tag{5}$$

converge para $1/b^n$ quando $S \to \infty$, pois daí, aplicando *(ii)* do Corolário acima e o Corolário 3.2 obtemos a b−normalidade de C_b. E para mostrar isto observamos inicialmente que $S \to \infty$ é equivalente a $m \to \infty$. Daí, se multiplicarmos (5) por b^n, então precisamos mostrar que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{b^k(cn-b)+c\times m(k-2n+1)-c\times b^n(2k-2n+1)+b^n}{-b^{k+1}+c(k+1)(m+1)+1} \tag{6}$$

existe e vale 1.

Agora somando e subtraindo $[c(k+1)+1]$ ao numerador de (6), obtemos uma parcela que coincide com o denominador, de modo que a expressão em (6) pode ser reescrita na forma

$$1+\frac{b^k\times cn-c\times m\times 2n-[c(k+1)+1]-c\times b^n(2k-2n+1)+b^n}{-b^{k+1}+c(k+1)(m+1)+1}.$$

Finalmente, para mostrarmos que a segunda parcela acima tem limite igual a zero, basta calcular e mostrar que valem zero os limites das expressões

$$\frac{b^k \times cn}{-b^{k+1} + c(k+1)(m+1) + 1}, \quad \frac{c \times m \times 2n}{-b^{k+1} + c(k+1)(m+1) + 1},$$

$$\frac{c(k+1) + 1}{-b^{k+1} + c(k+1)(m+1) + 1} \quad \text{e} \quad \frac{-c \times b^n(2k - 2n + 1) + b^n}{-b^{k+1} + c(k+1)(m+1) + 1}.$$

Deixamos esta tarefa para o leitor, lembrando que $m = b^{\log_b m}$, $k = \lfloor \log_b m \rfloor$ e que n e b estão fixados.

Com isso mostramos a validade do Teorema 1.3.

4 Comentários finais

Encerramos este trabalho mencionando mais alguns resultados sobre números normais, sendo o primeiro deles de fácil demonstração.

· Se $\alpha \in [0, 1)$ é um número $b-$normal então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o número $b^n\alpha - \lfloor b^n\alpha \rfloor$ é também um número $b-$normal. Em particular isto nos diz que o estudo da $b-$normalidade de α pode ser feito a partir de seu $n-$ésimo $b-$dígito.

· Champernowne em [2] mostrou a 10-normalidade de C_{10} partindo da 10−normalidade de outros números, normalidade esta também provada por ele. Em seu trabalho ele apresenta formas de construir artificialmente um número 10−normal a partir da 10−normalidade de outro(s) número(s). A idéia destas construções consiste em modificar a expansão decimal de um número, por exemplo, excluindo ou incluindo uma quantidade "rara" de dígitos, de forma a não modificar a freqüência de nenhum bloco. Ele comentou, por exemplo, que, denotando por $\pi(m)$ o número de primos menores ou iguais a m, da normalidade de C_{10} e do fato de que $\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(m)}{m} = 0$, pode-se provar que o número

$$(.46891012141516182021...)_{10},$$

obtido concatenando-se apenas os números compostos expressos na base 10, é normal em base 10.

Champernowne acreditava que a concatenação dos números primos em base 10 também produziria um número normal. Mas isto só foi mostrado em 1946 por Copeland e Erdös em [3]: o número

$$(.23571113171923...)_{10}$$

ficou conhecido como a Constante de Copeland-Erdös.

Existe uma relação entre a normalidade de um número e as seqüências equidistribuídas módulo 1 utilizadas em Sistemas Dinâmicos:

Definição 4.1. *Dizemos que uma seqüência de números reais positivos* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* ***equidistribuída módulo 1*** *se qualquer intervalo da forma* $[x,y)$ *contido em* $[0,1)$ *é "visitado" com freqüência* $y-x$*, pela seqüência* $(\{a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $\{a_n\} = a_n - \lfloor a_n \rfloor$*. Precisamente: se* s_n *denota o número de elementos do conjunto* $\{\{a_i\}, i=0,...,n\}$ *que pertencem ao intervalo* $[x,y)$*, então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = y - x.$$

Mostra-se que $\alpha \in [0,1)$ é b–normal se e somente se a seqüência $(b^n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ é equidistribuída módulo 1. Disto decorrem vários resultados sobre números normais, que podem ser encontrados em [4] e em [1]. Mencionaremos aqui três deles:

1- Sejam r e s racionais positivos. Se α é b–normal, então $(r\alpha + s)$ também é b–normal[2].

2- Sejam m e k inteiros positivos. Então α é b^k–normal se e somente se α é b^m–normal.

3- Quase todos os números reais (na medida de Lebesgue) são absolutamente normais, ou seja, normais em qualquer base de numeração.

[2]Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ é b– normal se $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ é b– normal.

Referências

[1] Bailey, D.H. - Crandall, R.E. *Random Generators and Normal Numbers,* disponível em http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/bcnormal.pdf

[2] Champernowne, D.G. *The construction of decimals normal in the scale of ten.* J. London Math. Soc. 8 (1933) 254-260

[3] Copeland, A. H. - Erdös, P. "Note on Normal Numbers." Bull. Amer. Math. Soc. 52, 857-860, 1946

[4] Kuipers, L. - Niederreiter, H. *Uniform Distribution of Sequences.* New York, Wiley, 1974.

[5] Ripoll, J.B. - Ripoll, C.C. - Silveira, J.F.P. *Números Racionais, Reais e Complexos* - livro a ser publicado pela Editora da UFRGS.

Jairo Krás Mengue
Av. João Pessoa 41 / ap. 335
90 040 - 000 Porto Alegre - RS
Brasil
e-mail: jairokras@yahoo.com.br

Cydara Cavedon Ripoll
Instituto de Matemática
Univ. Federal do Rio Grande do Sul
Av. Bento Gonçalves 9500
91 509 - 900 Porto Alegre - RS
Brasil
e-mail: cydara@mat.ufrgs.br