MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nºs 38/39 – julho/dezembro 2005 – pp. 99–104

Transformações do plano que aplicam retas em retas

Plácido Francisco de Assis Andrade

Resumo: Seja $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função biunívoca tal que $B(0,0) = (0,0)$. Se B é uma transformação linear então B aplica retas em retas. Provamos a recíproca desse fato conhecido mas difícil de ser encontrado na literatura utilizando técnicas elementares e acessíveis a um aluno do segundo ano de um Curso de Graduação.

Nessas notas demonstraremos o seguinte resultado que, essencialmente, é o teorema fundamental da geometria projetiva plana.

Teorema 1. *Seja $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função biunívoca tal que $B(0,0) = (0,0)$. Se B aplica retas em retas então B é uma transformação linear.*

O termo "aplica retas em retas" significa que a imagem de uma reta está contida numa reta. Demonstrações do resultado, bem como, de generalizações,[1] podem ser encontradas na literatura mas com o emprego de técnicas algébricas sofisticadas. É bem conhecida a recíproca daquele teorema: *Uma transformação linear invertível $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplica retas*

[1]Emil Artin; *Geometric Algebra* Wiley Classic Library; Interscience Publishers, Inc. N. Y. (1988)

em retas. Denotaremos por e_1 e e_2 os dois elementos da base canônica do $\mathbb{R}^2$ e por o o vetor nulo.

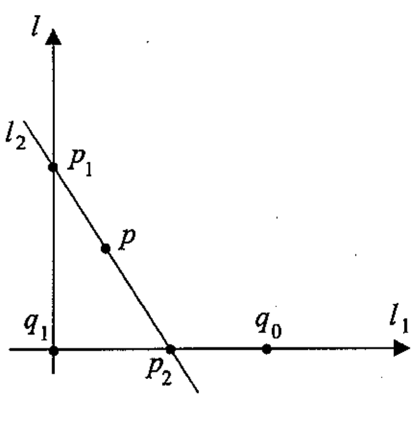
O exercício a seguir está proposto em muitos textos básicos de Álgebra. Tecnicamente falando, é pedido para mostrar que o único homomorfismo não nulo no corpo dos reais é a identidade.

Exercício 1: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não identicamente nula tal que para quaisquer x e y reais valem as igualdades $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$ então $f(x) = x$.

Recordamos que uma reta l contida em $\mathbb{R}^2$ é um subconjunto definido por uma equação linear, por exemplo, $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c=0\}$. Um vetor $p \in \mathbb{R}^2$ pertence a reta l se suas coordenadas satisfazem a equação que a define. Os termos *ponto*, *elemento* e *vetor* de $\mathbb{R}^2$ têm o mesmo significado.

Prova do Teorema 1 Sejam l e k duas retas em $\mathbb{R}^2$. Deixamos uma questão aos cuidados do leitor: se existem dois pontos $q_1, q_2 \in l$ tais que $B(q_1), B(q_2) \in k$ então $B(l) \subset k$.

<u>Afirmação 1:</u> Se $l, k \subset \mathbb{R}^2$ são duas retas tais que $B(l) \subset k$ então $B(l) = k$ e l é a única reta cuja imagem está contida em k.



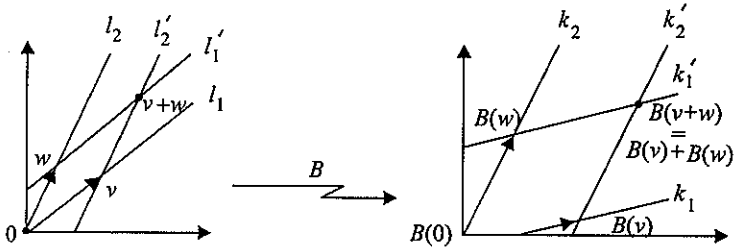
Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto $q \in k$ mas $q \notin B(l)$. Como B é biunívoca existe um único ponto q_0 tal que $B(q_0) = q$. É claro que $q_0 \notin l$. Seja l_1 uma reta que contém q_0 e é perpendicular à l em $q_1 \in l$. Como B aplica retas em retas e $B(q_0), B(q_1) \in k$ estão em $B(l_1) \subset k$.

Agora, dado um ponto qualquer p de $\mathbb{R}^2$, ele pertence a uma reta l_2 que intercepta $l \cup l_1$ em pelo menos dois pontos, digamos p_1 e p_2. Novamente, como $B(p_1), B(p_2) \in k$ segue que $B(l_2) \subset k$. Isto mostra que $B(\mathbb{R}^2) \subset k$. Uma contradição, pois estamos supondo que B é sobrejetiva. Portanto, só existe a reta l tal que $B(l) = k$.

Afirmação 2: A imagem por B de quaisquer duas retas paralelas l_1 e l_2 são duas retas paralelas.

Pelo visto, as suas imagens $B(l_1)$ e $B(l_2)$ são retas distintas. Suponha, por absurdo, que exista um ponto na interseção $p \in B(l_1) \cap B(l_2)$. Sendo assim, a pré-imagem $B^{-1}(p)$ tem pelo menos dois pontos, um em cada reta paralela, contradizendo a hipótese de B ser biunívoca.

Afirmação 3: Se $\{v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ então $\{B(v), B(w)\}$ é uma base e $B(v + w) = B(v) + B(w)$.



A hipótese sobre $\{v, w\}$ ser uma base implica que v e w não são nulos e são não colineares. Sejam l_1 e l_2 as retas distintas que concorrem na origem o e tais que $v \in l_1$ e $w \in l_2$. Sendo assim, $\{v + w\} = l_1' \cap l_2'$, em que l_1' é a reta que passa por w e é paralela à reta l_1 enquanto l_2' é a reta que passa por v e é paralela à l_2. Examinemos as imagens por B das retas acima,

$$B(o), B(v) \in k_1 = B(l_1) \qquad \text{e} \qquad B(o), B(w) \in k_2 = B(l_2).$$

Como sabemos, k_1 e k_2 são retas distintas, logo, $\beta = \{B(v), B(w)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ pois nenhum vetor é nulo e são não colineares. Agora, as retas $k_1' = B(l_1')$ e $k_2' = B(l_2')$ são retas que passam, respectivamente, por $B(w)$ e $B(v)$ e são paralelas, respectivamente, à k_1 e k_2. É claro que $\{B(v) + B(w)\} = k_1' \cap k_2'$. Por outro lado, $\{B(v + w)\} = B(l_1' \cap l_2') = k_1' \cap k_2'$, portanto, $B(v + w) = B(v) + B(w)$.

<u>Afirmação 4</u>: Existe uma transformação linear invertível $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que a função composta $C = A^{-1} \circ B$ é expressa na forma $C(x, y) = (f(x), g(y))$, em que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são biunívocas, $f(0) = g(0) = 0$ e $f(1) = g(1) = 1$. E mais, C satisfaz as hipóteses do teorema.

Pela afirmação anterior, sabemos que $\beta = \{B(e_1), B(e_2)\}$ é uma base $\mathbb{R}^2$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $A(e_1) = B(e_1)$ e $A(e_2) = B(e_2)$. Mais precisamente, seja $A(x, y) = xB(e_1) + yB(e_2)$. Como β é uma base então A é invertível . Recordamos que A^{-1} é uma transformação linear.

Sendo uma transformação linear, A^{-1} aplica retas em retas, $A^{-1}(o) = o$ e, sendo invertível, A^{-1} é sobrejetiva. Agora, é imediato concluir que $C = A^{-1} \circ B$ também é uma aplicação biunívoca, aplica retas em retas e $C(o) = o$. Portanto, C satisfaz todas as hipóteses do Teorema 1.

Por construção, $C(o) = o$, $C(e_1) = e_1$ e $C(e_2) = e_2$. Pela Afirmação 1, concluímos que C preserva os eixos ox e oy. Logo, pela Afirmação 2, C transforma retas horizontais em retas horizontais enquanto retas verticais são transformadas em retas verticais. Isto é suficiente para mostrar que $C(x, y) = (f(x), g(y))$. A biunicidade de f e g e os valores nos pontos enunciados deixaremos como exercício.

Iremos mostrar que $C \equiv id$. Disto segue que $A \equiv B$, portanto, B é uma transformação linear.

Afirmação 5: As funções coordenadas de $C(x, y)$ são aditivas, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$.

Examinemos apenas f, o estudo de g é similar. Dados x_1 e x_2. Se $x_1 \neq 0$, considere a base $\{v, w\}$ do $\mathbb{R}^2$, em que $v = (x_1, 0)$ e $w = (x_2, 1)$. Pela Afirmação 3, vale a aditividade $C(v+w) = C(v)+C(w)$, implicando que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Se $x_1 = 0$, como $f(0) = 0$, é imediato verificar que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Afirmação 6: $f \equiv g$ e $f(x_1 x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos uma reta com inclinação α, digamos $l : y = \alpha x + b_0$, e calculemos a inclinação $i(\alpha)$ da reta imagem $C(l)$. Para isto, sejam $(0, b_0)$ e $(x, \alpha x + b_0)$ dois pontos distintos de l. É claro que $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$. A inclinação da reta $C(l)$ é

$$i(\alpha) = \frac{g(\alpha x + b_0) - g(b_0)}{f(x) - f(0)} = \frac{g(\alpha x)}{f(x)}.$$

A última igualdade é justificada por $g(\alpha x + b_0) = g(\alpha x) + g(b_0)$ e $f(0) = 0$. Avaliando em $x = 1$ obtemos que $i(\alpha) = g(\alpha)$ pois $f(1) = 1$. Logo, $g(\alpha x) = g(\alpha)f(x)$ para quaisquer x e α. Avaliando em $\alpha = 1$ concluímos que $g \equiv f$ pois $g(1) = 1$. Portanto, $f(\alpha x) = f(\alpha)f(x)$ e temos mostrado que f é um automorfismo não nulo da reta.

Concluindo. Pelo exercício enunciado no início, obtemos que $f(x) = x = g(x)$. Logo, $C(x, y) = (f(x), g(y)) = (x, y)$, encerrando a demonstração. □

Com argumentos análogos, demonstre o teorema abaixo quando $n = 3$ e use indução para o caso geral.

Teorema 2. *Seja $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função biunívoca tal que $B(o) = o$. Se B aplica hiperplanos em hiperplanos então B é um transformação linear.*

Plácido Francico de Assis Andrade
Departamento de Matemática UFC
Campus do Pici Bloco 914
CEP 60.455-760 Fortaleza, CE, Brasil
Telefone (85) 288.98.84
andrade@mat.ufc.br