MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 40 – junho/2006 – pp. 7–20

Os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo

GERALDO BOTELHO E DANIEL PELLEGRINO

Problemas importantes cujas soluções resistem ao tempo e se mostram especialmente difíceis sempre foram fatores fundamentais no desenvolvimento da Matemática. A atividade e o dinamismo de uma área da Matemática podem ser medidos pela atração despertada pelos problemas abertos da área. Nosso objetivo neste artigo é descrever dois problemas da *Análise Funcional* que atraíram a atenção dos especialistas por décadas, conhecidos como problema da seqüência básica incondicional (ou problema da base incondicional) e problema do espaço de Banach homogêneo. Tentaremos também dar uma idéia das soluções desses problemas, finalmente resolvidos na década passada, principalmente com os trabalhos de W. T. Gowers e B. Maurey. Além de resolver dois problemas célebres e aumentar consideravelmente nossa compreensão sobre a estrutura dos espaços de Banach, esses trabalhos abriram toda uma nova frente de investigação dentro da Análise Funcional, e, de quebra, garantiram a Gowers uma medalha Fields em 1998.

1 Preliminares

Supomos que o leitor tenha conhecimentos básicos de Análise na Reta (no nível de [8]) e de Espaços Métricos (no nível de [19]). Um *espaço de Banach* é um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ou $\mathbb{C}$, que é completo com a métrica $d(x,y) = \|x - y\|$. Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ que é um espaço de Banach com a norma $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Neste artigo trabalharemos apenas com espaços de Banach de dimensão infinita. Alguns exemplos:

• $\ell_\infty = \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K}$ para todo n e $(a_n)_{n=1}^\infty$ é limitada$\}$ com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ é um espaço de Banach.
• c_0 é o subespaço de ℓ_∞ formado pelas seqüências convergentes para zero.
• Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K}$ para todo n e $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty\}$ com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p}$ é um espaço de Banach. ℓ_2 com o produto interno $\langle (a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty\rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n\overline{b_n}$ é um espaço de Hilbert.

Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E converge para $x \in E$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Nesse caso escrevemos $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. A série $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$, com cada $x_n \in E$, converge para $x \in E$ se a seqüência das somas parciais $\left(\sum\limits_{j=1}^n x_j\right)_{n=1}^\infty$ converge para x. Nesse caso escrevemos $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n = x$. A série $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$ *converge incondicionalmente* se for convergente qualquer que seja a ordem das parcelas, isto é: se a série $\sum\limits_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ for convergente, qualquer que seja a permutação π dos índices. Nesse caso, é fácil provar que a série converge para o mesmo limite, qualquer que seja a ordem das parcelas (veja [18, pág. 76] ou, em português, [23, Proposição 2.2]). Séries incondicionalmente convergentes foram tratadas em [3]. Por exemplo, em [3, pág. 107] está provado que, em c_0, a série $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{e_n}{n}$ converge incondicionalmente para $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \in c_0$ (aqui $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots,)$, onde 1 parece na n-ésima coordenada - os vetores $(e_n)_{n=1}^\infty$ são chamados de vetores canônicos dos espaços de seqüências).

Por simplicidade, quando não houver perigo de ambigüidade escreveremos (a_n) no lugar de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\sum_n x_n$ no lugar de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sabe-se que se E é um espaço de Banach e F é um subespaço vetorial de E, então F é um espaço de Banach (com a norma herdada de E) se e somente se F é fechado em E. Por isso os subespaços fechados desempenham papel tão importante em Análise Funcional. Os espaços de Banach E e F são *isomorfos* se existe um operador $u\colon E \to F$ linear, bijetor e contínuo (nesse caso dizemos que u é um *isomorfismo*).

2 O problema da base incondicional

Em Análise Funcional, no lugar do conceito de base algébrica (ou base de Hamel), usamos o conceito muito mais útil de base de Schauder.

Definição 2.1. Uma seqüência (x_n) é uma *base de Schauder* do espaço de Banach E se para todo $x \in E$ existe uma única seqüência de escalares (a_n), chamados de *coordenadas de* x, tal que $\sum_n a_n x_n = x$. A partir de agora escreveremos apenas *base* para designar uma base de Schauder. A base é dita *incondicional* se, para cada $x \in E$, a convergência da série é incondicional.

Exemplos 2.2. É fácil verificar que:
(i) Os vetores canônicos (e_n) formam uma base incondicional de c_0 e de ℓ_p, $1 \le p < \infty$.
(ii) ℓ_∞ não tem base. Neste exemplo está embutido um fato importante: todo espaço com base é separável, isto é, admite um subconjunto enumerável denso. Portanto espaços que não são separáveis, em particular ℓ_∞, não têm base.
(iii) Todo sistema ortonormal completo (veja definição em [24, Definição 5.6]) em um espaço de Hilbert separável H é uma base incondicional de H.

Nem toda base é incondicional:

(iv) Para cada n, defina $x_n = \sum_{j=1}^{n} e_j$. Então (x_n) é uma base de c_0, mas não é uma base incondicional (veja [6, pág. 180]).

(v) Os vetores $(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \ldots)$ formam uma base de ℓ_1 que não é incondicional (veja [21, pág. 73]). ℓ_2 também tem uma base que não é incondicional, mas isso é bem mais difícil de ser provado (veja [21, Proposition 2.b.11]).

Nem todo espaço que admite base admite base incondicional:

(vi) O espaço $C[0,1]$ das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ com a norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ tem base mas não tem base incondicional (veja [15, pág. 10]).

Como já vimos, existem espaços que não têm base, na verdade existem até mesmo espaços separáveis que não têm base (esse último fato foi provado por P. Enflo em 1972, resolvendo outro célebre problema da teoria dos espaços de Banach - veja [21, Seções 1.e e 2.d]). Mas o livro de Banach [1], que inaugurou a Análise Funcional, já traz o seguinte:

Teorema 2.3. (Teorema de Banach-Mazur - veja [6, Theorem 6.14]) *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço fechado de dimensão infinita que tem base.*

A pergunta agora é óbvia: será que todo espaço de dimensão infinita contém algum subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional? A presença de uma base incondicional facilita muito o estudo das propriedades estruturais do espaço, e são muitos os resultados que comprovam isso, por exemplo (para a definição de espaço reflexivo veja [24, Definição 11.1]):

Teorema 2.4. (Teorema de James - veja [6, Theorem 6.36]) *Seja E um espaço de Banach com base incondicional . Então E é reflexivo se e somente se E não contém subespaço isomorfo a c_0 ou ℓ_1.*

Tornou-se então muito importante saber se todo espaço de dimensão infinita contém ou não um subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional. Esse problema tem sido tratado desde o início da década de 1950, mas apareceu explicitamente formulado apenas em [2]:

O problema da base incondicional: É verdade que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional?

3 O problema do espaço de Banach homogêneo

Este problema foi posto pelo próprio Banach em seu livro [1] em 1932. Um espaço de Banach de dimensão infinita é dito *homogêneo* se ele é isomorfo a todos os seus subespaços fechados de dimensão infinita.

Exemplo 3.1. Vejamos que todo espaço de Hilbert separável é homogêneo. Sejam H um espaço de Hilbert separável e F um subespaço fechado de H de dimensão infinita. São fatos bem conhecidos que subespaços fechados de espaços de Hilbert são também espaços de Hilbert e que subespaços de espaços separáveis são também separáveis. Logo F é também um espaço de Hilbert separável. Um fato notável na teoria dos espaços de Hilbert diz que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isomorfo (isometricamente) a ℓ_2 (veja [6, Theorem 1.38]). Assim tanto H como F são isomorfos a ℓ_2, portanto são isomorfos entre si.

Segue então que todo espaço isomorfo a um espaço de Hilbert separável é homogêneo. Será que existem outros espaços homogêneos? Vejamos agora que a separabilidade é condição necessária:

Proposição 3.2. *Todo espaço homogêneo tem base, e portanto é separável.*

Demonstração. Seja E um espaço homogêneo. Pelo Teorema 2.3 sabemos que E contém um subespaço fechado F de dimensão infinita que tem base, digamos (x_n). Como E é homogêneo, existe um isomorfismo $u\colon F \to E$. Vejamos que $(u(x_n))$ é base de E: dado $x \in E$, $u^{-1}(x) \in F$, logo existem (únicos) escalares (a_n) tais que $u^{-1}(x) = \sum_n a_n x_n$. Usando a linearidade e a continuidade de u, temos que

$$\begin{aligned} x &= u(u^{-1}(x)) = u\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) \\ &= u\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = \lim_{n\to\infty} u\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j u(x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u(x_n). \end{aligned}$$

Se existisse outra seqüência (b_n) com $x = \sum_n b_n u(x_n)$, argumento análogo mostraria que $u^{-1}(x) = \sum_n b_n x_n$, o que contrariaria a unicidade dos escalares (a_n). Está então provado que $(u(x_n))$ é base de E. $\square$

Sabemos até agora que todo espaço homogêneo é separável e que todo espaço isomorfo a um espaço de Hilbert separável é homogêneo. A pergunta é inevitável: é verdade que todo espaço homogêneo é isomorfo a um espaço de Hilbert? Usando mais uma vez que todo espaço homogêneo é separável e que todo espaço de Hilbert separável é isomorfo a ℓ_2, a pergunta pode ser reformulada da seguinte forma:

O problema do espaço homogêneo: É verdade que todo espaço de Banach homogêneo é isomorfo a ℓ_2?

Apesar de ter sido enunciado por Banach em 1932 e apesar dos esforços de várias gerações de matemáticos, muito pouco progresso foi feito até o final da década de 1980, quando J. Bourgain [4] (medalha Fields em 1994) e W. B. Johnson [14] resolveram importantes casos particulares. Tudo isso e muito mais pode ser encontrado no excelente artigo de P. G. Casazza [5].

4 Espaços hereditariamente indecomponíveis

Dados dois subespaços vetoriais E_1 e E_2 do espaço vetorial E, dizemos que E é a *soma direta* de E_1 e E_2, e nesse caso escrevemos $E = E_1 \oplus E_2$, se

- $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ e
- $E = E_1 + E_2$, isto é: para todo $x \in E$ existem $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ tais que $x = x_1 + x_2$.

Se E é um espaço de Banach e E_1 e E_2 são subespaços fechados de E tais que $E = E_1 \oplus E_2$, dizemos que E é *soma direta topológica* de E_1 e E_2.

Em 1970, J. Lindenstrauss [20] colocou a seguinte questão: é possível decompor todo espaço de Banach de dimensão infinita como a soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita? Em 1991, Gowers e Maurey, independentemente, na tentativa de resolver o problema da base incondicional, construíram espaços que, conforme observou W. B. Johnson, resolvem a questão de Lindenstrauss. Dessa forma surgiu o conceito de espaço hereditariamente indecomponível:

Definição 4.1. Um espaço de Banach E de dimensão infinita é *hereditariamente indecomponível* (HI) se nenhum subespaço de E é soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita.

Os espaços construídos por Gowers e Maurey eram essencialmente o mesmo, sendo assim publicaram conjuntamente o paper [12], no qual introduzem esse conceito e constroem o primeiro espaço de Banach hereditariamente indecomponível, hoje conhecido como espaço X_{GM} (ou espaço GM). Na próxima seção veremos que qualquer espaço hereditariamente indecomponível, em particular o espaço GM, resolve o problema da base incondicional.

A construção do espaço GM envolve muito detalhes técnicos e foge ao escopo deste artigo. Além do original de Gowers e Maurey [12], o leitor interessado pode encontrar os detalhes em [22, Section 7.1] e, em português, em [25]. É interessante observar que a demonstração original de Gowers e Maurey [12] contém uma pequena imprecisão, detectada e corrigida por N. Kalton [16].

Mesmo correndo o risco de fazer parecer fácil o que é na verdade extremamente difícil, oferecemos ao leitor um aperitivo da técnica usada por Gowers e Maurey: considere o subespaço c_{00} de c_0 formado pelas seqüências finitas, ou seqüências eventualmente nulas. Mais precisamente,

$$c_{00} = \{(a_n) \in c_0 : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

A idéia é construir uma norma em c_{00} de forma que o completamento do espaço normado resultante tenha a propriedade desejada. Essa técnica foi usada várias vezes para produzir espaços com propriedades especiais, por exemplo na construção dos espaços de Schreier [25, Seção 1.1], Baernstein [25, Seção 1.2] e Schlumprecht [25, Seção 3.2], e também por Figiel e Johnson em 1974 (veja [18, Exercise 2.8], [21, Example 2.e.1] ou [25, Seção 1.3]) para descrever o dual do célebre espaço construído por Tsirelson [27], que foi o primeiro exemplo de um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a c_0 ou a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

5 A solução do problema da base incondicional

A proposição abaixo mostra o motivo pelo qual Gowers e Maurey se interessaram pela propriedade que define os espaços hereditariamente indecomponíveis.

Proposição 5.1. *Espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis não possuem subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach HI e F um subespaço fechado de E de dimensão infinita. Suponha que F tenha uma base incondicional (x_n). Chamemos de F_1 o fecho do subespaço de F gerado pelos vetores $x_1, x_3, x_5, \ldots$, e de F_2 o fecho do subespaço de F gerado pelos vetores $x_2, x_4, x_6, \ldots$. Ou seja,

$$F_1 = \overline{span\{x_1, x_3, x_5, \ldots\}} \text{ e } F_2 = \overline{span\{x_2, x_4, x_6, \ldots\}}.$$

F_1 e F_2 são, por definição, subespaços fechados de F. Como (x_n) é uma base de F, qualquer subconjunto de $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é linearmente independente, logo F_1 e F_2 são subespaços fechados de dimensão infinita. Vejamos que $F = F_1 + F_2$: dado $x \in F$, existem escalares (a_n) tais que

$x = \sum_n a_n x_n$. Como toda subsérie de uma série incondicionalmente convergente é convergente (veja [6, pág. 28]), podemos tomar

$$y = a_1x_1 + a_3x_3 + \cdots + a_{2n+1}x_{2n+1} + \cdots$$

e

$$z = a_2x_2 + a_4x_4 + \cdots + a_{2n}x_{2n} + \cdots .$$

É claro que $y \in F_1$ e $z \in F_2$. Além disso, como a base é incondicional, sabemos que alterando a ordem das parcelas a convergência não se altera, e portanto segue que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2n}x_{2n} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2n-1}x_{2n-1} = y + z \in F_1 + F_2.$$

A unicidade das coordenadas em relação à base (x_n) garante que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Provamos então que F_1 e F_2 são subespaços fechados de F, ambos de dimensão infinita, e $F = F_1 \oplus F_2$, o que é um absurdo pois contraria o fato de E ser HI. Portanto nenhum subespaço de E de dimensão infinita tem base incondicional. □

Na seção anterior vimos que existem espaços de Banach HI, em particular o espaço GM é HI. A proposição acima diz que qualquer espaço HI, por exemplo o espaço GM, não tem subespaço de dimensão infinita com base incondicional. Conclusão: existem espaços que não contém subespaços com base incondiconal, o que resolve, pela negativa, o problema da base incondicional.

É interessante mencionar que, poucos anos após resolver o problema da base incondicional provando a existência de espaços hereditariamente indecomponíveis, Gowers e Maurey [13] exibiram em 1997 espaços de Banach que não são hereditariamente indecomponíveis e que não têm subespaço de dimensão infinita com base incondicional.

6 A solução do problema do espaço homogêneo

A solução desse problema é uma combinação de três ingredientes que apareceram no período de 1993 a 1996. O primeiro deles, demonstrado por Gowers e Maurey no já várias citado artigo [12], fornece o primeiro indício de que, também nesta história, os espaços HI desempenharão papel importante:

Teorema 6.1. (Gowers e Maurey [12]) *Um espaço de Banach hereditariamente indecomponível não é isomorfo a nenhum de seus subespaços próprios; em particular não é homogêneo.*

O segundo ingrediente é a seguinte solução parcial do problema publicada em 1995:

Teorema 6.2. (R. Komorowski e N. Tomczak-Jaegermann [17]) *Se um espaço de Banach homogêneo E contém um subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional, então E é isomorfo a ℓ_2.*

É interessante mencionar que em 1998 a professora Nicole Tomczak-Jaegermann ministrou um minicurso no Brasil sobre esse teorema e outros resultados relacionados (veja [26]). Apesar de ser um avanço fundamental, o Teorema 6.2 só resolve o problema para espaços homogêneos que contém subespaço com base incondicional. Essa hipótese ainda precisa ser retirada, pois na seção anterior vimos que nem todo espaço satisfaz essa condição.

Além de avançar na solução do problema, o Teorema 6.2 confirma que ter base incondicional é uma propriedade muito boa. Por outro lado, ser hereditariamente indecomponível é a propriedade oposta, pois nesse caso, como vimos na seção anterior, nenhum subespaço de dimensão infinita tem base incondicional. É surpreendente que, como mostra o seguinte teorema de Gowers, em todo espaço de Banach pelo menos uma dessas duas propriedades, diametralmente opostas, está presente:

Teorema 6.3. (Teorema da dicotomia de Gowers) *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional ou um subespaço fechado hereditariamente indecomponível.*

Gowers provou esse teorema desenvolvendo e aplicando uma sofisticada técnica de combinatória, chamada de Teoria de Ramsey Infinita.

De acordo com o próprio Gowers [11, pág. 1089], trata-se de colorir objetos apropriados diferenciando aqueles que são bons (no sentido de produzir simetria) daqueles que são ruins (no sentido de não exibirem simetria nenhuma). O Teorema 6.3 foi por ele anunciado em 1996 em [9], e durante um longo tempo os especialistas tiveram acesso apenas a versões preliminares da demonstração (preprints). Apenas em 2002 foi publicada a versão final de Gowers [10]. A demonstração do Teorema 6.3 também pode ser encontrada em [11, Theorem 5.1] e, usando técnicas diferentes, em [7, Theorem 1.2] e [18, Théorème 2.V.2].

Veremos a seguir que a dicotomia de Gowers era a peça que faltava - nosso terceiro ingrediente - para solucionar o problema do espaço homogêneo.

Teorema 6.4. *Todo espaço de Banach homogêneo é isomorfo a ℓ_2.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach homogêneo. Suponha que E contenha um subespaço F fechado HI. Como E é homogêneo, E é isomorfo a F, e portanto E também é HI (é fácil ver que um espaço isomorfo a um espaço HI é também HI). Então E é simultaneamente homogêneo e HI, o que é um absurdo pois contradiz o Teorema 6.1. Portanto E não contém subespaço fechado HI. Pelo Teorema 6.3 segue que E contém um subespaço fechado de dimensão infinita com base incondicional. Como E é homogêneo, pelo Teorema 6.2 segue que E é isomorfo a ℓ_2. $\square$

A solução do problema do espaço homogêneo descrita acima, devidamente creditada a Gowers, Komorowski e Tomczak-Jaegermann, ilustra muito bem a seguinte observação de B. Maurey [22, pág. 1252]: após o teorema da dicotomia de Gowers, muitas questões na teoria dos espaços de Banach passaram a ser tratadas considerando-se dois casos: o caso usual, no qual se tem uma base incondicional, e o caso patológico, no qual um espaço hereditariamente indecomponível aparece pelo caminho.

Referências Bibliográficas

[1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*, PWN, 1932.

[2] C. Bessaga e A. Pełczyński. *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math. **17** (1958), 165-174.

[3] G. Botelho. *Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretz-ky-Rogers*, Matemática Universitária **30** (2001), 103-112.

[4] J. Bourgain. *On finite dimensional homogeneous Banach spaces*, Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. D. Milman, eds), Springer Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 232-239.

[5] P. G. Casazza. *Some questions arising from the homogeneous Banach space problem*, Contemp. Math. **144** (1993), 35-52.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant e V. Zizler. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer, 2001.

[7] T. Figiel, R. Frankiewicz, R. Komorowski and C. Ryll-Nardzewski. *On hereditarily indecomposable Banach spaces*, Ann. Pure Appl. Logic **126** (2004), 293-299.

[8] D. G. Figueiredo. *Análise 1*, 2a. Ed., LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1996.

[9] W. T. Gowers. *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 1083-1093.

[10] W. T. Gowers. *An infinite Ramsey Theorem and some Banach-space dichotomies*, Ann. of Math. **156** (2002), 797-833.

[11] W. T. Gowers. *Ramsey methods in Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1071-1097, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[12] W. T. Gowers e B. Maurey. *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851-874.

[13] W. T. Gowers e B. Maurey. *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Annalen **307** (1997), 543-568.

[14] W. B. Johnson. *Homogeneous Banach spaces*, Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. D. Milman, eds), Springer Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 201-203.

[15] W. B. Johnson e J. Lindenstrauss. *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 1, 1-84, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[16] N. Kalton. *The basic sequence problem*, Studia Math. **116** (1995), 167-187.

[17] R. Komorowski and N. Tomczak-Jaegermann. *Banach spaces without local unconditional structure*, Israel J. Math. **89** (1995), 205-226.

[18] D. Li e H. Queffélec. *Introduction à l'etude des espaces de Banach*, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, 2004.

[19] E. L. Lima. *Espaços Métricos*, 13a. Ed., Projeto Euclides, IMPA, 2003.

[20] J. Lindenstrauss. *Some aspects of the theory of Banach spaces*, Adv. Math. **5** (1970), 159-180.

[21] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I and II*, Springer, 1996.

[22] B. Maurey. *Banach spaces with few operators*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1247-1297, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[23] A. F. Pereira. *O Teorema de Dvoretzky-Rogers*, Dissertação de Mestrado, IM-UFRJ, 2005.

[24] D. P. Pombo Jr. *Introdução à Análise Funcional*, EdUFF, 1999.

[25] C. C. Silva. *O primeiro espaço de Banach hereditariamente indecomponível*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2000.

[26] N. Tomczak-Jaergermann. *Banach spaces with many isomorphisms*, Atas do 48o. Seminário Brasileiro de Análise, Tomo I, 189-210, 25 a 28 de Novembro de 1998, Petrópolis-RJ.

[27] B. S. Tsirelson. *Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0*, Functional Anal. Appl. **8** (1974), 138-141.

[Geraldo Botelho] Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, 38.400-902 - Uberlândia-MG, e-mail: botelho@ufu.br.

[Daniel Pellegrino] Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande, Caixa Postal 10044, 58.109-970 - Campina Grande-PB, e-mail: pellegrino@dme.ufcg.edu.br.