MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 40 – junho/2006 – pp. 21–36

Caracterizações da Elipse e do Elipsóide no Contexto da Geometria Afim

Carlos E. Harle e Waldyr M. Oliva

Resumo

O presente artigo exibe duas caracterizações, uma da elipse e a outra do elipsóide, ambas no contexto da geometria afim. Na primeira são utilizados métodos da geometria diferencial relativos ao conceito de referencial móvel de E. Cartan para provar um resultado atribuído em [2] à J.Bertrand e que tem a mencionada caracterização como corolário. Na segunda são retomadas idéias originais de W.Blaschke [1] que utilizam essencialmente conceitos elementares de geometria afim, evitando-se, ao máximo, técnicas de geometria diferencial.

1 Introdução

Neste artigo apresentaremos dois resultados no contexto da geometria afim: uma caracterização de elipses dentre as fronteiras de ovais e uma caracterização de elipsóides dentre as fronteiras de ovalóides.

Por ovalóide de um espaço afim entende-se um conjunto estritamente convexo, limitado, de interior não vazio, tendo em cada ponto de sua fronteira um único plano tangente. No caso bi-dimensional os ovalóides são denominados ovais. Exemplos naturais de fronteiras de ovalóides são os elipsóides e de ovais, elipses.

No caso da caracterização de elipsóides o primeiro autor elaborou uma prova de um resultado (**Teorema 2**) devido à W.Blaschke ([1]). No caso da elipse o segundo autor redigiu uma demonstração de um resultado (**Teorema 1**) atribuído à J.Bertrand (ver [2]) e que fornece como corolário a caracterização procurada. Em ambos os casos as idéias essenciais são as sugeridas em [1] e [2], respectivamente, cabendo aos autores apenas colocar os argumentos em um contexto mais atual, o que acarreta uma considerável simplificação das demonstrações.

Passemos agora à formulação dos dois resultados. Iniciemos pela caracterização de elipses.

Teorema 1. *Seja C uma curva plana, estritamente convexa, suficientemente diferenciável, tal que o conjunto dos pontos médios de cordas paralelas a uma tangente Δ esteja (numa vizinhança do ponto de contato) contido numa reta, qualquer que seja Δ. Então C está contida numa cônica. Em particular, se C é compacta trata-se da elipse.*

Passemos agora a descrever os conceitos necessários para formular a caracterização de elipsóides. Para isso introduzimos, inicialmente, a notação U para denotar o interior de um dado ovalóide, e por $\mathcal{F}$ a sua fronteira. O ovalóide é a união $U \cup \mathcal{F}$ desses dois conjuntos e será denotado por M. Sendo r uma reta qualquer do espaço, definiremos o cilindro circunscrito à M na direção de r. Usaremos a notação $Cr(M)$ para indicá-lo. Tomemos um plano α qualquer, desde que não seja paralelo à reta r. Projetando M sobre α, paralelamente à r, obtemos um conjunto M' estritamente convexo e limitado deste plano. O **cilindro circunscrito à M na direção de r**, é, por definição, a união de todas as retas paralelas à r e que encontram o plano α em um ponto da fronteira do convexo M'. A interseção de $Cr(M)$ com a fronteira $\mathcal{F}$ do ovalóide é denominada a **linha de penumbra de M na direção de r**. Podemos agora enunciar a caracterização dada por Blaschke.

Teorema 2. *Se M é um ovalóide tal que as linhas de penumbra são todas planas (i.e. cada uma delas contida em um correspondente plano)* *então a fronteira $\mathcal{F}$ desse ovalóide é um elipsóide.*

Comentário intuitivo: Se imaginamos o corpo convexo M iluminado por uma fonte de luz que emite raios paralelos entre si (i.e., suposta infinitamente afastada), a região de penumbra pode ser descrita como a separação entre a parte escura e a iluminada.

Observação: As recíprocas dos Teoremas 1 e 2 são propriedades bem conhecidas de geometria elementar, obtendo-se desta maneira as caracterizações da elipse e do elipsóide, objeto do presente artigo.

2 Prova do Teorema 1

Seguindo a linha de J.Favard (ver [2] pag. 379) consideremos a ação do grupo afim unimodular sobre $\mathbb{R}^2$. Seus elementos são as aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $g : (x, y) \longrightarrow (x', y')$ em que se tem

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

com

$$1 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

O próximo lema é de prova imediata.

Lema 2.1. *Se v_1 e v_2 são vetores do plano, denota-se por (v_1, v_2) a área orientada do paralelogramo construído com os dois vetores, isto é,*

$$(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

em que $v_1 = (a_1, a_2)$ e $v_2 = (b_1, b_2)$. Então

$$(g_* v_1,\ g_* v_2) = (v_1, v_2).$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a inclusão e (m, e_1, e_2) um campo C^∞ de referenciais unimodulares, isto é, tais que $(e_1, e_2) = 1$. If $(a_i, b_i) = e_i$ temos bem definidas em Ω as aplicações

$$e_i : (x, y) \in \Omega \longrightarrow (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2.$$

Por diferenciação exterior obtemos

$$dm = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega^i e_i$$

$$de_j = \omega_j^1 e_1 + \omega_j^2 e_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^i e_i, \quad j = 1, 2$$

em que ω^i e ω_j^i são 1- formas diferenciais definidas em Ω, $i, j = 1, 2$.

Observa-se facilmente que (ω^1, ω^2) é o referencial dual de (e_1, e_2) em cada ponto de Ω.

Como $d(dm) = 0$ e $d(de_j) = 0$ obtêm-se, respectivamente:

$$d\omega^i = \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

$$d\omega_i^k = \sum_r \omega_i^r \wedge \omega_r^k, \quad i, k = 1, 2. \tag{2}$$

Além disso a condição $(e_1, e_2) = 1$ implica em que se tenha

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0. \tag{3}$$

As equações (1), (2) e (3) denominam-se **equações de estrutura do grupo**.

Seja $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ um mergulho local de uma curva plana parametrizada num intervalo aberto I, suficientemente diferenciável.

Denotemos ainda pelas mesmas letras os "pull-back" das 1-formas ω^i e ω_j^i, $i, j = 1, 2$, bem como das correspondentes equações de estrutura, lembrando que os pull-back de 2-formas na reta são nulos. Também, por ser a dimensão da reta igual a 1, as 1-formas ω^1 e ω^2 não podem se anular simultaneamente em um ponto $u_0 \in I$. Reduzindo I, se necessário for, poderemos supor que ω^1 seja uma base de 1- formas em todo ponto $u \in I$.

Admitamos agora a seguinte hipótese básica: a curva local $x(I)$ é tangente ao campo vetorial e_1. Com essa hipótese, obtém-se que $\omega^2 = 0$ e, conseqüentemente, teremos também $d\omega^2 = 0$ o que já era de se esperar.

Por outro lado, como ω^1 é base tem-se que $\omega_1^2 = b\omega^1$. Se supuzermos $b = 0$, isto é $\omega_1^2 = 0$; concluímos ainda, das equações de estrutura, que $d\omega_1^1 = 0$ e portanto (localmente) $\omega_1^1 = d\psi$, com $\psi = \psi(u)$. Como $de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 = d\psi e_1$ e se $de_1 = (de_1^1, de_1^2)$, conclue-se que $e_1^1 = c^1 exp(\psi)$ e $e_1^2 = c^2 exp(\psi)$ e finalmente que $e_1 = exp(\psi)(c^1, c^2)$ e a curva é localmente uma reta, hipótese que abandonamos. Numa segunda possibilidade, admitamos, reduzindo I se necessário, que $b \neq 0$ e reescalemos o referencial (e_1, e_2) de modo que se tenha b identicamente igual a 1, ou seja, que se tenha $\omega_1^2 = \omega^1$. Das equações de estrutura tem-se $d\omega^1 = 0$ e portanto segue que existe σ tal que $\omega^1 = d\sigma = \omega_1^2 \neq 0$ em I. Uma tal função $\sigma = \sigma(u)$, que fica determinada a menos de uma constante aditiva, chama-se **arco afim**. Como $d\sigma = \sigma'(u)du \neq 0$, a função σ pode ser tomada como uma nova parametrização e então podemos escrever sobre a curva:

$$a) \quad dm = d\sigma e_1.$$

Por outro lado $\omega_1^1 = c\omega^1$ e as equações de estrutura em I que são:

$$d\omega^1 = d\omega^2 = d\omega_1^1 = d\omega_1^2 = d\omega_2^1 = 0,$$

valem independentemente da escolha da função c. Escolhendo-se $c = 0$ teremos $\omega_1^1 = 0$ que acarreta sobre a curva a relação

$$b) \quad de_1 = d\sigma e_2.$$

Finalmente se definirmos $k = k(\sigma)$ pela relação $\omega_2^1 = -k(\sigma)\omega^1$ teremos sobre a curva

$$c) \quad de_2 = -k(\sigma)d\sigma e_1.$$

A função $k = k(\sigma)$ chama-se **curvatura afim** da curva plana.

Resumindo, das relações $a)$, $b)$ e $c)$ seguem as chamadas **equações de Frenet** da curva plana:

$$m'(\sigma) = e_1$$

$$m''(\sigma) = e_2$$

$$m'''(\sigma) = -k(\sigma)e_1.$$

Finalmente, toda curva plana de arco afim σ e curvatura afim $k(\sigma)$ satisfaz às condições:

$$m''' + k(\sigma)m' = 0 \ \text{ e } \ (m', m'') = 1$$

que implicam o seguinte resultado:

Para cada função contínua $k = k(\sigma)$ existe uma única curva plana com arco afim σ e curvatura afim $k(\sigma)$, curva essa determinada a menos de uma tranformação do grupo afim unimodular.

As expressões de $d\sigma$ e $k(\sigma)$ em função da representação paramétrica $x(u)$ da curva são facilmente determináveis (ver [2] p. 382 fórmulas (2.4) e (2.5)).

Cônicas

As **cônicas** são obtidas se $k = k(\sigma)$ for constante. Neste caso teremos: $k = 0$ (**parábola**), $k < 0$ (**hipérbole**) e $k > 0$ (**elipse**).

Com efeito, no caso em que $k = 0$ teremos, por integração da equação diferencial de terceira ordem $m''' = 0$:

$$m = (a/2)\sigma^2 + b\sigma + c$$

com a, b, c vetores fixos, $(a, b) = 1$. Trata-se de uma parábola. O grupo afim unimodular atua transitivamente sobre as parábolas de $\mathbb{R}^2$ e uma parábola dada é conservada pelo subgrupo que leva um referencial em outro.

Se $k > 0$ teremos por integração:

$$m = acos(\sqrt{k}\sigma) + bsen(\sqrt{k}\sigma) + c, \quad (a, b)\sqrt{k^3} = 1.$$

Trata-se da elipse admitindo os vetores a e b como semi-diâmetros conjugados.

Se $k < 0$ obteremos, de modo análogo:

$$m = aCh(\sqrt{-k}\sigma) + bSh(\sqrt{-k}\sigma) + c, \quad (a,b)\sqrt{-k^3} = -1.$$

Trata-se da hipérbole de semi-diâmetros conjugados a e b.

Mostra-se também que uma cônica dada é conservada pelo subgrupo que leva um referencial em outro.

Passemos agora, efetivamente, à prova do **Teorema 1**.

Seja σ o arco afim para a curva $\mathcal{C}$ e Δ a tangente à $\mathcal{C}$ no ponto $m(0)$. Tem-se, nas vizinhanças de $\sigma = 0$ que

$$m(\sigma) = m(0) + m'(0)\sigma + (1/2!)m''(0)\sigma^2 \\ + (1/3!)m'''(0)\sigma^3 + (1/4!)m^{iv}(0)\sigma^4 + ...$$

Usando as equações de Frenet, obteremos (para e_1 e e_2 no ponto $m(0)$):

$$m(\sigma) - m(0) = e_1\sigma + e_2(\sigma^2/2!) + (-k(0)e_1)(\sigma^3/3!) \\ + (-k'(0)e_1 - k(0)e_2)(\sigma^4/4!) + ...$$

Se (x,y) são as coordenadas cartesianas do ponto $m(\sigma)$ da curva, em relação ao sistema de coordenadas $(m(0), e_1, e_2)$ teremos

$$(x,y) = (\sigma - k(0)(\sigma^3/3!) - k'(0)(\sigma^4/4!) + ..., \quad (\sigma^2/2!) - k(0)(\sigma^4/4!) + ...)$$

que fornece as expressões:

$$x = \sigma[1 - k(0)(\sigma^2/3!) - k'(0)(\sigma^3/4!) + ...]$$

$$y = \sigma^2/2! - k(0)(\sigma^4/4!) + ...$$

Da primeira equação obtém-se

$$\sigma = x/[1 - k(0)(\sigma^2/3!) - k'(0)(\sigma^3/4!) + ...]$$

$$= x[1 + (k(0)(\sigma^2/3!) + k'(0)(\sigma^3/4!) + ...) + (k(0)(\sigma^2/3!) \\ + k'(0)(\sigma^3/4!) + ...)^2 + ...]$$

ou ainda

$$\sigma = x[1 + k(0)(\sigma^2/3!) + k'(0)(\sigma^3/4!) + ...].$$

Substituindo-se este último valor de σ na fórmula que fornece a coordenada y chega-se a uma equação reduzida para a curva $\mathcal{C}$, a saber:

$$y = x^2/2 + k(0)x^4/8 + k'(0)x^5/24 + ...$$

A partir desta última equação reduzida procuraremos a equação do lugar geométrico dos pontos médios Z das cordas paralelas a tangente à $\mathcal{C}$ no ponto $m(0)$. Sejam (x_1, y) e (x_2, y) as coordenadas dos pontos de $\mathcal{C}$ que são extremos da corda de ordenada y, e (ξ, y) as coordenadas do ponto médio Z dessa corda, isto é, $\xi = (x_1 + x_2)/2$. Usando-se a equação reduzida para $x = x_1$ e $x = x_2$ obteremos duas expressões para y que subtraídas e somadas membro a membro fornecem, respectivamente:

$$0 = (x_1^2 - x_2^2)/2 + k(0)(x_1^4 - x_2^4)/8 + k'(0)(x_1^5 - x_2^5)/24 + ...$$

$$(x_1^2 + x_2^2) = 4y - k(0)(x_1^4 + x_2^4)/4 + ...$$

Divide-se a primeira destas duas últimas expressões por $(x_1 - x_2)$, introduz-se a variável ξ e utilizando-se também a segunda expressão, obtém-se uma equação reduzida para o lugar geométrico pretendido, ou seja:

$$\xi = k'(0)y^2/6 + ...$$

Se $k'(0) \neq 0$ a curva que representa o lugar geométrico dos pontos médios Z das cordas paralelas à tangente em $m(0)$ nunca será uma reta, contra a hipótese do Teorema 1. Como o ponto $m(0)$ foi tomado arbitrariamente sobre $\mathcal{C}$, conclue-se que a derivada da curvatura afim k é identicamente nula e, por conseguinte, a curva $\mathcal{C}$ é uma cônica. A compacidade implica tratar-se de uma elipse, o que conclui a prova.

3 Prova do Teorema 2

Diâmetros:

Chamaremos de **diâmetro** de um dado ovalóide M, a todo segmento fechado PQ, com P,Q na fronteira $\mathcal{F}$ de M, de tal modo que os dois planos tangentes $T_P\mathcal{F}$ e $T_Q\mathcal{F}$ sejam paralelos. Para ovais temos um conceito análogo, considerando as retas tangentes.

Para ovalóides temos, imediatamente, que dado um plano qualquer, existem exatamente dois pontos da fronteira de M de modo que, nestes, os planos tangentes sejam paralelos ao plano dado. Portanto esse par de pontos define um diâmetro de M. Notemos ainda que esse diâmetro fica univocamente determinado pela condição de que os planos tangentes são paralelos ao plano dado.

O corte de um ovalóide por um plano que contém um diâmetro será dito uma **seção diametral** desse ovalóide. No caso de uma oval, se uma reta contém um diâmetro ela é denominada uma **reta diametral** da oval.

Notemos que se o segmento PQ é um diâmetro de uma oval cuja fronteira é uma linha de penumbra plana de um ovalóide, então esse segmento também é diâmetro do ovalóide. Observemos ainda que, tanto para ovais como para ovalóides, não podemos afirmar que todos os diâmetros passam por um mesmo ponto. Pode-se dar exemplos de ovais cujos diâmetros têm todos o mesmo comprimento, e que, no entanto, não possuem centro. As fronteiras de tais ovais são conhecidas como curvas de diâmetro constante.

Suporemos daqui por diante que as linhas de penumbra dos ovalóides a serem considerados sejam todas planas e, inicialmente, mostraremos que **toda seção diametral de um ovalóide é uma linha de penumbra.** De fato, seja AB um dado diâmetro e β um plano contendo esse segmento. Tomemos um ponto H interior ao segmento AB e seja η_H o plano paralelo à $T_A\mathcal{F}$, contendo H. Denotemos por h a reta comum aos planos β e η_H. Sejam: K um dos pontos onde h encontra a fronteira $\mathcal{F}$ do ovalóide M e t_K a reta suporte da fronteira da oval $\eta_H \cap M$ neste ponto K. A linha de penumbra definida pelo cilindro circunscrito a M na direção de t_K contém, evidentemente, os pontos A, B e K. Como essa linha de penumbra é plana (por hipótese), segue que ela coincide com a fronteira da secção de M pelo plano β.

Desses argumentos obtemos também que toda reta do plano η_H que passa pelo ponto H é uma reta diametral já que os pontos de encontro dessa reta com a fronteira da oval $\eta_H \cap M$ são extremidades de um diâmetro. Dito de outra maneira:

Sendo AB um diâmetro do ovalóide e η um plano secante do mesmo paralelo aos planos suporte em A (ou em B), então toda reta desse plano que passa pelo encontro H da reta AB com η é uma reta diametral da oval $\eta \cap M$.

Notemos que o ponto H é interior a todos os diâmetros.

Nosso próximo objetivo é mostrar que H é o ponto médio das extremidades de todos esses diâmetros.

Ovais com centro:

O centro de uma oval é um ponto de seu interior tal que qualquer par de pontos de fronteira, distintos e alinhados com esse ponto, tem este último como ponto médio. Exprimiremos este conceito de uma maneira mais conveniente para os nossos propósitos.

Dado um ponto C de um plano, denotamos por S_C a transformação desse plano que a cada um de seus pontos X associa o ponto $S_C(X)$, definido pela propriedade de que os vetores CX e $CS_C(X)$ são opostos. Essa transformação é denominada **simetria central** e o ponto C o seu centro. Temos então que um ponto C é centro de uma oval E se, e somente se, $S_C(E) = E$.

Com essa formulação podemos mostrar imediatamente que uma oval não pode ter mais de um centro (pode, eventualmente, não ter centro algum). De fato, sejam C e D dois centros de uma mesma oval. Notando que a transformação composta das simetrias de centros C e D é uma translação não nula, teríamos que a oval dada seria invariante por uma translação. Isso não é possível já que a oval é um conjunto limitado. Podemos também mostrar, sem dificuldade, que o centro é um ponto interno de qualquer diâmetro da oval.

O resultado que daremos a seguir assegura a existência do centro para certas ovais:

Se uma oval tem um ponto interno C tal que toda reta por C é diametral, então C é o centro dessa oval.

A demonstração envolve, em última análise, uma equação diferencial do plano.

Definimos um campo de linhas em todo o plano, exceto no ponto C. Para cada ponto $X \neq C$ consideramos a reta por X paralela às tangentes nos pontos onde a reta CX corta a fronteira da oval. Evidentemente esse campo de linhas é invariante pela simetria S_C. Sendo a fronteira da oval uma curva solução desse campo de linhas, temos, pela mencionada invariância, que a imagem dessa fronteira por essa simetria também é uma solução. Mas temos que a fronteira e a sua imagem pela simetria, ou coincidem ou se cortam em dois pontos. No segundo caso, tangentes nos pontos de corte devem coincidir com as linhas de campo nesses pontos, respectivamente. Agora, por unicidade de solução, vemos que temos novamente uma coincidência. Fica assim demonstrado que C é o centro da oval considerada. Aplicando esse resultado a ovalóides obtemos:

Se d é uma reta diametral de um dado ovalóide e E é uma oval obtida pelo corte do ovalóide por um plano paralelo a um dos planos tangentes determinados por d, então o ponto de encontro da reta d com o plano da oval E é um centro desta última.

Ovais com simetria diametral:

Além da simetria central, podemos ter um outro tipo de simetria de ovais conhecida como simetria axial, ou simetria diametral. Para descrever e estudar essas simetrias de modo mais eficaz introduziremos as reflexões em relação à retas.

Sendo r e s duas retas distintas e concorrentes definindo um plano (r,s); consideremos a aplicação $R_{r,s}$ denominada reflexão em relação ao eixo r, na direção de s, que a cada ponto X de (r,s) associa o ponto $R_{r,s}(X)$ do mesmo plano determinado pelas condições:

a) se X está em r, então $R_{r,s}(X) = X$;

b) se X está fora de r, então a reta $XR_{r,s}(X)$ é paralela à s e o ponto médio de X e $R_{r,s}(X)$ está em r.

Diremos que um diâmetro AB de uma dada oval é um **eixo de simetria** da mesma, se a reflexão que tem a reta AB como eixo e cuja direção é dada pela tangente em A (ou em B) deixa a oval invariante.

A seguir demonstraremos o seguinte resultado fundamental:

Se um diâmetro AB é um eixo de simetria de uma oval, e sendo P, Q os dois pontos de fronteira cujas tangentes são paralelas à reta AB, temos que a reta PQ é paralela às tangentes em A e B.

A demonstração é muito simples. Supondo que a reta PQ não seja paralela à tangente em A, temos que a reta refletida $P'Q'$ é distinta de PQ. As tangentes em P' e Q' são no entanto, paralelas às tangentes em P e Q (por serem estas paralelas ao eixo de reflexão). Por outro lado, em uma oval não podem existir três pontos de fronteira com tangentes paralelas entre si. Temos assim uma contradição pela qual o resultado fica estabelecido. O eixo PQ obtido a partir do eixo AB como foi feito acima é denominado **diâmetro ortogonal** a AB. Mostraremos agora que se tanto AB como PQ são eixos de simetria da oval, o ponto de encontro das retas AB e PQ é o seu centro. Para isso basta notar que a composta das reflexões definidas por esses dois diâmetros é a simetria cujo centro é o ponto comum às retas AB e PQ.

Diremos que **uma oval tem simetria diametral** se todo diâmetro for eixo de simetria. Temos então que, nesse caso, a oval tem centro e todos os diâmetros contém esse ponto.

Uma consequência importante da hipótese de simetria diametral é a seguinte:

Seja dada uma oval com simetria diametral e centro C e sejam A, B dois pontos distintos e arbitrários da fronteira dessa oval, com retas tangentes t_A e t_B respectivamente, e seja P o ponto comum a essas duas retas. Nessas condições temos:

a) o ponto comum às retas CP e AB é o ponto médio de A e B;

b) a reta tangente em F (ponto comum à CP e à fronteira da oval) é paralela à reta AB.

Para demonstrar, lembremos que a reta PC é eixo de uma reflexão que mantém a oval invariante. Como uma reflexão desse tipo preserva a tangência, temos que a imagem de t_A deve ser uma tangente à oval, passando por P. Portanto a imagem de A somente pode ser o ponto B. Daí vemos que a reta PC passa pelo ponto médio de A e B. Temos também que a reta tangente em F é a direção dessa reflexão, sendo, portanto, paralela à reta AB.

Chegamos agora ao resultado que é o objetivo principal desta seção:

Uma oval com simetria diametral tem como fronteira uma elipse.

O plano da demonstração é, por alto, o seguinte. Determinamos inicialmente uma elipse que encontra a oval em 4 pontos. Para esse fim utilizamos o fato de a oval ter centro. A seguir utilizamos a simetria diametral (tanto da elipse como da oval) para produzir, a partir destes 4 pontos comuns, um conjunto denso de pontos comuns. Aí, por passagem ao limite, concluímos pela igualdade das fronteiras da oval e da elipse.

A essa altura introduziremos mais alguns conceitos auxiliares, visando, como sempre, tornar a exposição mais transparente. Consideremos duas ovais com simetria diametral e com mesmo centro C. Um ponto comum às fronteiras dessas duas ovais é dito ser um ponto de contato se as tangentes nesse ponto também coincidirem. Temos agora o seguinte resultado:

Se A e B são dois pontos de contato distintos e sendo P o ponto de encontro das respectivas tangentes em A e B, a reta PC encontra as duas fronteiras em um mesmo ponto e este é um ponto de contato, ou seja, as tangentes nesse ponto coincidem.

Para demonstrar, sejam F, F' os pontos de cada uma das fronteiras, pertencentes à reta PC. Pelo resultado anterior temos que as tangentes t_F e $t_{F'}$ (em F e F') são paralelas à reta AB. Denotemos por K e K', respectivamente, os pontos onde essas tangentes encontram a reta AP. Ainda pelo resultado anterior, as retas CK e CK' devem cortar as retas FA e $F'A$ nos pontos médios de FA e de $F'A$, respectivamente. Um argumento geométrico simples nos mostra que isso somente é possível se os pontos F e F' coincidirem. Reiterando essa construção, obtemos uma seqüência de pontos F_n comuns às duas fronteiras e tendo como limite o ponto A. Devemos notar que cada reflexão de eixo CF_n e direção t_{F_n} deixa ambas as ovais invariantes. Vamos definir agora, por recorrência, uma seqüência duplamente indexada $F_{n,m}$, através das relações:

$F_{n,1}=F_n$, $F_{n,2}=F_{n+1}$, $F_{n,m+2}$ é o refletido de F_{m+1} pela reflexão de eixo CF_n.

Vemos sem maior dificuldade que os pontos da seqüência assim construída são densos em ambas as fronteiras. Como as fronteiras são conjuntos fechados, vemos que as duas ovais coincidem.

Mostraremos a seguir que, dada uma oval com simetria diametral e com centro C, podemos adaptar a esta uma elipse (que é fronteira de uma oval com simetria diametral) de centro C, e tendo ambas dois elementos de contato distintos. Ou seja, essas duas ovais têm centro comum e pelo menos dois pontos A e B comuns, com mesma tangente. Cuidaremos ainda que A e B não sejam colineares com C. Para esse fim escolhemos os pontos A e B na fronteira da oval dada de modo que a reta AB seja paralela à tangente t_F. Sabemos, nesse caso, que existe uma elipse de centro C passando por A e por B, com tangentes coincidindo em cada um desses pontos, com as tangentes à oval. Vemos assim que a fronteira da oval e a elipse devem coincidir. Com isso ficou demonstrado que **a fronteira de toda oval com simetria diametral é uma elipse.**

Epílogo:

Recorrendo aos argumentos apresentados, mostraremos, finalmente, a parte principal da caracterização de elipsóides de Blaschke:

A fronteira de um ovalóide cujas linhas de penumbra são planas é um elipsóide.

Como fizemos anteriormente, denotemos por M um tal ovalóide de fronteira $\mathcal{F}$. A seguir tomemos dois pontos A, B, extremidades de um diâmetro de M e seja d a reta que contém esses pontos. Segue daí que os planos tangentes $T_A\mathcal{F}$ e $T_B\mathcal{F}$ são paralelos. Tomemos agora uma reta variável t contendo A e contida em $T_A\mathcal{F}$. Seja D um ponto variável situado na reta d e estando entre A e B. Denotamos por η_D o plano por D, paralelo ao plano $T_A\mathcal{F}$. É claro que esse plano contém a reta que passa por D e é paralela à t. Foi visto que D é o centro da oval

$M \cap \eta_D$. Daí vem que a seção do ovalóide pelo plano que passa por t e d é uma oval que tem simetria diametral relativamente ao seu diâmetro d. Seja agora h um outro diâmetro dessa última oval. Vimos que, no caso das linhas de penumbra serem planas, todo diâmetro dessa oval é também diâmetro do ovalóide. Portanto h é diâmetro do ovalóide. Pelo mesmo argumento usado para mostrar que a oval possui simetria diametral em d, mostramos que esta possui simetria diametral em h. Conseqüentemente a fronteira da oval é uma elipse, sendo seu centro o ponto médio de A e B. Usando esses argumentos para a reta variável t, mostramos que toda seção do ovalóide por plano contendo a reta AB tem como fronteira uma elipse. Também vemos de imediato que o ovalóide tem centro em C.

Consideremos agora o plano ω passando por C e sendo paralelo à $T_A\mathcal{F}$. Aqui temos novamente que a fronteira de $\omega \cap M$ é uma elipse. Da teoria das quádricas sabemos que existe um único elipsóide de centro C, contendo essa elipse, além dos pontos A, B e tendo nesses pontos planos tangentes $T_A\mathcal{F}$ e $T_B\mathcal{F}$ respectivamente. Considerando seções do ovalóide por planos que contém a reta AB e lembrando que as fronteiras dessas seções são elipses cujas tangentes em A e em B estão, respectivamente em $T_A\mathcal{F}$ e $T_B\mathcal{F}$, segue de um argumento de unicidade que a fronteira do ovalóide e o elipsóide coincidem ao longo de cada uma destas elipses. Conseqüentemente os dois conjuntos convexos coincidem.

Agradecimentos

Os autores agradecem as boas sugestões e os comentários do referee que foram devidamente levados em conta melhorando a redação final.

O segundo autor agradece à FCT (Portugal) pelo apoio financeiro através do Programa POCTI / FEDER e do Projeto MAT/199/94-20199.

Referências

[1] W. Blaschke. *Kreis und Kugel.* Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

[2] J. Favard. *Cours de Géométrie differentielle Locale.* Gauthier-Villars, Paris, 1957.

Carlos E. Harle
Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, USP, Rua do Matão, 1010- CEP 05508-900, São Paulo, Brasil.
harle@ime.usp.br

Waldyr M. Oliva
CAMGSD and ISR, Instituto Superior Técnico, UTL, Av. Rovisco Pais, 1049–001 Lisboa, Portugal; e Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, USP, Rua do Matão, 1010- CEP 05508-900, São Paulo, Brasil.
wamoliva@math.ist.utl.pt