MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 40 – junho/2006 – pp. 37–58

Aplicações de Métodos de Topologia Algébrica, Álgebra Comutativa e de Métodos Analíticos em Teoria de Grupos

DESSISLAVA H. KOCHLOUKOVA E FLÁVIA S. M. SILVA

1 Um pouco sobre teoria de grupos

A teoria de grupos é uma parte razoavelmente nova da matemática (seu principal desenvolvimento começou no século 20), embora um dos primeiros exemplos de grupos apareceu nos trabalhos de Galois em conexão com a teoria desenvolvida por ele (conhecida hoje como teoria de Galois). Essa teoria liga extensões de corpos $L \subseteq K$ (que têm algumas propriedades específicas) com o grupo de automorfismos $G = Aut(K \mid L)$ dessa extensão (esse grupo é chamado o grupo de Galois da extensão) e descreve as subextensões da extensão original por meio dos subgrupos de G. Assim, podem ser construídos exemplos de grupos finitos (no caso em que a extensão $L \subseteq K$ for finita, isto é, a dimensão de K como espaço vetorial sobre L é finita) e de grupos profinitos (no caso em que a extensão não for finita). Existe uma conjectura, que ainda está aberta, que diz que cada grupo finito pode ser realizado como o grupo de Galois de uma extensão finita $\mathbb{Q} \subseteq K$, embora é conhecido (e não é difícil de provar) que cada grupo finito pode ser realizado como o grupo de Galois de uma extensão finita de corpos.

Uma outra fonte importante de grupos vem da topologia e da geometria. A topologia estuda propriedades de objetos (chamados espaços topológicos) que são invariantes sobre deformações contínuas. Um invariante importantíssimo de um espaço topológico X é o seu grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ que, por definição, é o conjunto das classes de equivalência de caminhos fechados com ponto base $x_0 \in X$, sendo que dois caminhos são equivalentes se podem ser continuamente transformados um no outro sem mudar o ponto base x_0. Esse conjunto de classes de equivalência é considerado um grupo com a operação concatenação de caminhos. Em geral, um grupo G vem munido com uma operação produto $G \times G \to G$ (que associa a cada par $(g, h) \in G \times G$ um elemento $gh \in G$) satisfazendo as seguintes condições: associatividade (isto é, $(gh)t = g(ht)$ para todos $g, h, t \in G$); existência do elemento neutro 1_G (isto é, $g1_G = 1_G g = g$ para todo $g \in G$, e muitas vezes é denotado somente por 1) e cada elemento $g \in G$ tem inverso $g^{-1} \in G$ (isto é, $gg^{-1} = 1_G = g^{-1}g$, e é fácil ver que esse inverso é único). No caso em que X é conexo por caminhos o grupo $\pi_1(X, x_0)$ é independente da escolha do ponto base x_0, a menos de isomorfismo, e é denotado por $\pi_1(X)$. Um dos problemas estudados em topologia é se dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos, ou seja, se existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ tal que φ e φ^{-1} são contínuas. Se isso acontece então $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, y_0)$ para alguns pontos $x_0 \in X, y_0 \in Y$.

Existem outros invariantes de um espaço topológico X, os grupos fundamentais $\pi_i(X, x_0)$ de dimensão $i \geq 2$ que contêm as classes de equivalência de aplicações contínuas $\varphi : S^i \to X$ tais que $\varphi(*) = x_0$ para um ponto fixo $*$ da esfera i-dimensional $S^i \subset \mathbb{R}^{i+1}$ com respeito a relação de equivalência dada por deformações contínuas que preservam o ponto base x_0. Os grupos $G = \pi_i(X, x_0)$ para $i \geq 2$ são sempre abelianos (isto é, para cada $g, h \in G$ temos $gh = hg$) mas $\pi_1(X, x_0)$ não é necessariamente abeliano. Para um grupo arbitrário H é fácil construir um espaço topológico X conexo por caminhos com $\pi_1(X) \simeq H$.

Um grupo G, por definição, vem munido somente com as operações produto e inverso. Mas G mergulha naturalmente no anel RG (chamado anel de grupo G com coeficientes em R) para R um anel arbitrário. Por definição, o anel RG é a soma direta $\oplus_{g\in G}Rg$ com a operação soma dada por $(\sum_{g\in G}\alpha_g g) + (\sum_{g\in G}\beta_g g) = \sum_{g\in G}(\alpha_g + \beta_g)g$ e o produto induzido pelo produto em G, isto é, $(\sum_{g\in G}\alpha_g g)(\sum_{h\in G}\beta_h h) = \sum_{t\in G}\gamma_t t$ sendo que $\gamma_t = \sum_{gh=t}\alpha_g\gamma_h$.

Posteriormente, vamos precisar do conceito de S-módulo (à direita) M para um anel arbitrário S. O conjunto M vem munido com uma operação soma $+$ tal que M é um grupo abeliano com respeito a esta soma. Ainda mais, S age (à direita) sobre M satisfazendo um tipo de associatividade e distributividade, isto é, $m(s_1s_2) = (ms_1)s_2$ e $m(s_1 + s_2) = ms_1 + ms_2$ para todos $s_1, s_2 \in S, m \in M$. Se o anel S tem elemento neutro 1_S com respeito a multiplicação exigimos que $m1_S = m$ para cada $m \in M$. A mesma definição vale para S-módulos à esquerda se a ação de S for à esquerda. A menos que se diga o contrário, daqui para frente vamos considerar módulos à direita .

2 Grupos finitamente apresentáveis

Os grupos finitamente apresentáveis são um dos principais objetos estudados em teoria combinatorial de grupos. Um grupo F é dito um grupo livre com base X se X for um subconjunto de F com a propriedade que X gera F como grupo (isto é, o menor subgrupo de F que contém X é F) e não existe nenhuma relação não-trivial entre os elementos de X e X^{-1} (isto é, se o elemento neutro 1 pode ser escrito como um produto do tipo $x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n}$ onde $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$ então existe j tal que $x_j = x_{j+1}$ e $\epsilon_j = -\epsilon_{j+1}$). Por exemplo, se X tem exatamente um elemento então o grupo livre com base X é o grupo cíclico infinito. Se X tem mais de um elemento então F não é abeliano. Muitas vezes o grupo livre com base X é denotado por $F(X)$. Um grupo livre com base X é único a menos de isomorfismo que fixa os elementos de X.

Um grupo G tem apresentação $\langle X \mid R\rangle$ se $R \subset F(X)$ e G é isomorfo a $F(X)/N$, onde N é o fecho normal de R em $F(X)$ (ou seja, N é o menor subgrupo normal de $F(X)$ que contém R). O grupo G é finitamente apresentável se existe uma apresentação com $X \cup R$ finito. A propriedade ser finitamente apresentável não depende da escolha do conjunto finito de geradores, ou seja, se $\langle X \mid R\rangle$ e $\langle X_1 \mid R_1\rangle$ são apresentações de G com X, X_1 e R finitos então existe um subconjunto S de R_1 tal que $\langle X_1 \mid S\rangle$ é uma apresentação finita de G.

Exemplos. O grupo livre $F(X)$ é finitamente apresentável se, e somente se, X é finito. Todo grupo abeliano finitamente gerado G é finitamente apresentável pois pelo teorema de classificação desses tipos de grupos segue que G é isomorfo a $\mathbb{Z}^n \oplus M$, onde $n \geq 0$ e M é um grupo abeliano finito. Portanto, se M não é trivial então é soma direta de grupos cíclicos (grupo cíclico = gerado por um elemento = quociente de $\mathbb{Z}$) de ordem finita igual a uma potência de números primos (não necessariamente diferentes). O grupo $\mathbb{Z}^n$ tem apresentação finita $\langle x_1, \ldots, x_n \mid \{[x_i, x_j]\}_{1\leq i<j\leq n}\rangle$, onde $[x_i, x_j]$ é o comutador $x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j$. Todo grupo cíclico tem apresentação finita e portanto M e $\mathbb{Z}^n \oplus M$ têm apresentações finitas.

O leitor interessado em aprender mais sobre grupos finitamente apresentáveis e aplicações de topologia algébrica em teoria combinatorial de grupos pode consultar [11].

3 CW-complexos e recobrimentos: gerando complexos exatos

CW-complexos X são exemplos específicos de espaços topológicos. Eles são "partidos" em células, isto é, $X = \cup_{i\geq 0} X^{(i)}$, onde $X^{(i)}$ é o i-ésimo esqueleto (de X) que contém todas as células de dimensão $\leq i$. Cada célula e de dimensão i é homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^i$ e existe uma aplicação contínua $B^i \to X^{i-1} \cup e$ que envia S^{i-1} no i-ésimo esqueleto X^{i-1} (isto define o bordo da célula) e cuja restrição $B^i \setminus S^{i-1} \to e$ é um homeomorfismo, onde $B^i = \{x \in \mathbb{R}^i \mid \ \|x\| \leq 1\}$ e S^{i-1} é a $(i-1)$-ésima esfera $\{x \in \mathbb{R}^i \mid \ \|x\| = 1\}$ em $\mathbb{R}^i$. Um CW-complexo tem topologia induzida pela topologia das células (isto é, um subconjunto T de X é fechado se a interseção de T com qualquer fecho $\overline{e}$ de uma célula e é fechado em $\overline{e}$ e os vértices $X^{(0)}$ constituem um subconjunto discreto de X). Ainda mais, o fecho $\overline{e}$ de cada célula e está contido numa união finita de células. Um CW-complexo X é dito finito se tem um número finito de células. Sempre vamos supor que X é conexo (então será conexo por caminhos). É fácil ver que o grupo fundamental $\pi_1(X)$ depende somente do 2-esqueleto $X^{(2)}$ de X.

A topologia algébrica estuda aplicações contínuas $p : Y \to X$, chamadas recobrimentos, que têm a propriedade que para cada ponto $x \in X$ existe um subconjunto aberto U de X tal que $p^{-1}(U)$ é a união disjunta $\cup_\alpha V_\alpha$ de subconjuntos abertos V_α de Y tais que a restrição de p sobre V_α é um homeomorfismo e a topologia de $p^{-1}(U)$ é induzida pela topologia das componentes V_α.

Exemplos. Um exemplo clássico de recobrimento é a projeção canônica $p : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Mais geralmente, se H é um grupo que age sobre um espaço Y via homeomorfismos e a ação de G é propriamente descontínua (isto é, para cada ponto $y \in Y$ existe uma vizinhança V tal que para cada $g \in G \setminus \{1\}$ tem-se que $gV \cap V = \emptyset$) então a projeção canônica $Y \to Y/H$ é um recobrimento.

Uma das propriedades importantes de um recobrimento $p : Y \to X$ é que p induz um isomorfismo $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$ para cada $i \geq 2$. O grupo fundamental $G = \pi_1(X)$ age sobre Y (através de levantamento de caminhos que não será discutido aqui mas pode ser encontrado em qualquer livro de topologia algébrica).

Se o grupo fundamental $\pi_1(Y)$ é trivial (ou seja, tem um único elemento, o elemento neutro) dizemos que p é um recobrimento universal. Daqui para frente vamos sempre supor que p é um recobrimento universal. Se Y é um CW-complexo e p uma aplicação que preserva estrutura celular (ou seja, envia célula para célula de mesma dimensão e p comuta com a aplicação bordo da definição de CW-complexo) então a ação do grupo $G = \pi_1(X)$ sobre Y permuta as células de mesma dimensão. Ainda mais, essa ação é livre, isto é, G não fixa nenhuma célula. Cada G-órbita de células de Y é enviada por p em única célula de X e isso dá uma correspondência entre as células de X e as G-órbitas de células de Y. A estrutura celular de Y é usada para definir a cadeia celular de Y

$$\mathcal{C}: \ldots \to C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \to \ldots \to C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0$$

onde C_i é a soma direta $\oplus \mathbb{Z}c$ com c percorrendo todas as células de dimensão i de Y e as aplicações ∂_i são induzidas pelas aplicações bordo da definição de CW-complexo. Como a ação de G sobre as células de Y é livre segue que C_i é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Z}G$ (isto é, um $\mathbb{Z}G$-módulo livre) e a cardinalidade de cópias de $\mathbb{Z}G$ nessa soma é a cardinalidade do conjunto de células de dimensão i de X (recorde que existe uma correspondência entre as G-órbitas de células de Y e as células de X).

Por definição o i-ésimo grupo homológico $H_i(Y)$ de Y é o grupo quociente $Ker(\partial_i)/Im(\partial_{i+1})$, e portanto esse grupo é abeliano com a operação soma. Esses grupos podem ser definidos para espaços topológicos arbitrários Z (no nosso caso Y é simplesmente conexo, ou seja, é conexo por caminhos e $\pi_1(Y)$ é trivial). Para tal espaço Z um teorema de Hurewicz afirma que

$$H_1(Z) \simeq \pi_1(Z)/[\pi_1(Z), \pi_1(Z)],$$

onde $[\pi_1(Z), \pi_1(Z)]$ denota o subgrupo gerado por todos os comutadores, isto é, por todos os elementos $[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ para $g_1, g_2 \in \pi_1(Z)$. Ainda mais, se para um $n \geq 1$ todos os grupos $\pi_i(Z)$ são triviais para $i \leq n$ então os grupos $\pi_{n+1}(Z)$ e $H_{n+1}(Z)$ são naturalmente isomorfos.

Agora, vamos supor que X tem a propriedade que $\pi_i(X)$ é trivial para todo $i \geq 2$ (tal X é dito um $K(G,1)$- complexo para $G = \pi_1(X)$). Então para o recobrimento universal $p: Y \to X$ temos que $\pi_i(Y)$ é trivial para todo $i \geq 1$. Isso implica que os grupos homológicos $H_i(Y)$ são triviais para todo $i \geq 1$. Então $\mathcal{C}$ é um complexo com todos os grupos homológicos triviais e tal complexo é dito exato.

4 Álgebra Homológica

"The title "Homological Algebra" is intended to designate a part of pure algebra which is the result of making algebraic homology theory independent of its original habitat in topology and building it up to a general theory of modules over associative rings. . . . The appearance of this book must mean that the experimental phase of homological algebra is now surpassed."

Resumo no MathSciNet para o livro
H. Cartan, S. Eilenberg, Homological algebra,
Princeton University Press, 1956.

É difícil explicar em uma página a importância da álgebra homológica e definir a base de sua teoria. Funtores homológicos aparecem em qualquer área da matemática e a álgebra homológica fornece as propriedades gerais de tais funtores. Vamos discutir aqui um pouco sobre o funtor *Tor* por causa das suas aplicações nos invariantes de Bieri-Neumann-Renz-Strebel que aparecerão na seção 6.

Seja R um anel. Uma seqüência

$$\mathcal{P} \ldots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\partial_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \to P_0 \xrightarrow{\partial_0} P_{-1} \longrightarrow \ldots \tag{1}$$

é dita um complexo de R-módulos se todos $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ são R-módulos, todos $\{\partial_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ são homomorfismos de R-módulos (preservam a operação $+$ e a ação de R, isto é, $\partial_i(m_1+m_2) = \partial_i(m_1)+\partial_i(m_2), \partial_i(mr) = \partial_i(m)r$ para todos $m_1, m_2, m \in M, r \in R$) e a imagem $Im(\partial_{i+1})$ é um subconjunto do núcleo $Ker(\partial_i)$ para todo i. O i-ésimo grupo homológico do complexo $\mathcal{P}$ é o grupo quociente

$$H_i(\mathcal{P}) = Ker(\partial_i)/Im(\partial_{i+1})$$

que é abeliano com a operação soma $+$.

O complexo $\mathcal{P}$ é dito exato na dimensão i se $H_i(\mathcal{P}) = 0$. Um complexo é exato se ele é exato em todas as dimensões.

Toda a teoria de álgebra homológica está baseada na existência de resoluções livres de R-módulos. Por definição, se M é um R-módulo então um complexo exato

$$\mathcal{F} : \ldots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \longrightarrow \ldots \to F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0 \qquad (2)$$

é uma resolução livre de M se todos os F_i são R-módulos livres, ou seja, cada F_i é uma soma direta (finita ou infinita) de cópias de R. Vimos na última seção que a teoria de recobrimentos pode ser usada para dar exemplos de resoluções livres do $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}$, onde a ação de G sobre $\mathbb{Z}$ é trivial (isto é, cada elemento de G fixa cada elemento de $\mathbb{Z}$).

Um dos objetos estudados pela álgebra homológica são os funtores derivados, em particular, os funtores Tor e Ext que são funtores derivados do funtor produto tensorial $\otimes$ e do funtor homomorfismo Hom, respectivamente. O produto tensorial $\otimes_R$ pode ser definido para qualquer anel R. Para um R-módulo à direita M e um R-módulo à esquerda N o produto tensorial $M \otimes_R N$ é um grupo abeliano com a operação $+$, como grupo é gerado pelos elementos $m \otimes n$ para $m \in M, n \in N$ (ditos tensores puros) módulo as seguintes relações: $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$, $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$ e $n \otimes rm = nr \otimes m$ para todos $m_1, m_2, m \in M, n_1, n_2, n \in N$, $r \in R$.

Exemplo. $\mathbb{Z}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_j = \mathbb{Z}_d$, onde d é o máximo divisor comum de i e j e $\mathbb{Z}_k$ denota o quociente $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

O funtor Tor_i^R é definido para qualquer $i \geq 0$. Por definição, $Tor_i^R(M, N)$ é o i-ésimo grupo homológico do complexo $\mathcal{F}^{del} \otimes_R N$, onde $\mathcal{F}^{del}$ é o complexo obtido de $\mathcal{F}$ substituindo M com o módulo zero. O funtor Tor_i^R vai ter papel importantíssimo na demonstração da conjectura da E. Rapaport Straser que será discutida posteriormente.

5 Grupos de tipo homológico FP_m

Agora podemos definir grupos G de tipo homológico FP_m. Tais grupos tem resoluções livres como em (2) para $M = \mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}G$ e ainda, para $i \leq m$ todos os F_i são $\mathbb{Z}G$-módulos finitamente gerados (isto é, cada F_i é soma direta finita de cópias de $\mathbb{Z}G$). A condição para um grupo G ser de tipo FP_m é uma condição muito forte se $m \geq 2$. Todo grupo G tem tipo FP_0 pois em (2) F_0 pode ser escolhido igual $\mathbb{Z}G$ e ∂_0 a aplicação "augmentation"(ou seja, $\partial_0(g) = 1$). Um grupo G tem tipo homológico FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado como grupo.

Sejam G um grupo finitamente apresentável e $\langle X \mid R \rangle$ uma apresentação finita de G. Então existe uma resolução livre como em (2) onde os $\mathbb{Z}G$-módulos livres F_0, F_1 e F_2 têm cardinalidades 1, $\mid X \mid$ e $\mid R \mid$, respectivamente. Portanto, todo grupo finitamente apresentável tem tipo homológico FP_2. Por muito tempo foi um problema em aberto saber se as propriedades FP_2 e finitamente apresentável eram equivalentes. Os primeiros exemplos de grupos de tipo FP_2 que não são finitamente apresentáveis surgiram em [2]. Ainda mais, esses exemplos têm a propriedade FP_∞, isto é, são FP_m para todo m.

Não é difícil ver que um grupo G é finitamente apresentável se, e somente se, existir um CW-complexo X tal que a ação de G sobre X por permutação de células é livre e tal que a ação de G sobre o 2-esqueleto $X^{(2)}$ de X é co-compacta (ou seja, o espaço quociente $X^{(2)}/G$ é compacto) e X é 1-conexo (ou seja, $\pi_1(X) = 1$ e X é conexo). E também que, um grupo G tem tipo homológico FP_2 se, e somente se, existir um CW-complexo X tal que a ação de G sobre X por permutação de células é livre e tal que a ação de G sobre o 2-esqueleto $X^{(2)}$ de X é co-compacta, X é conexo e 1-acíclico (ou seja, $H_i(X) = 0$ para $i \leq 1$). Assim, a propriedade FP_2 pode ser considerada a versão homológica da propriedade finitamente apresentável.

6 Os invariantes de Bieri-Neumann-Renz-Strebel

6.1 Propriedades básicas

Os invariantes de Bieri-Neumann-Renz-Strebel (que vamos chamar de invariantes de BNRS) estudam os homomorfismos

$$\chi : G \to \mathbb{R},$$

onde G é um grupo abeliano com relação a operação produto e $\mathbb{R}$ é um grupo abeliano com relação a soma tradicional. Dado um homomorfismo

χ consideremos o monóide

$$G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\},$$

isto é, G_χ é fechado com relação ao produto, mas em geral não é fechado com relação ao inverso. Assim, $\mathbb{Z}G_\chi = \oplus_{g \in G_\chi} \mathbb{Z}g$ é um subanel de $\mathbb{Z}G$. Dizemos que χ é m − *bom* se existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo tal que todos os módulos livres em dimensão $\leq m$ são finitamente gerados (isto é, $\mathbb{Z}$ visto como um $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo tem tipo FP_m). Por definição o m-ésimo invariante de BNRS é

$$\Sigma^m(G, \mathbb{Z}) = \{[\chi] \mid \chi \neq 0 : G \to R \text{ é um homomorfismo m-bom } \},$$

onde $[\chi]$ denota a classe de equivalência $\mathbb{R}_{>0}\chi$ (a relação de equivalência $\sim$ é definida por: $\chi_1 \sim \chi_2$ se, e somente se, $\mathbb{R}_{>0}\chi_1 = \mathbb{R}_{>0}\chi_2$).

Como G é um grupo abeliano então o quociente $G/[G, G]$ é um grupo abeliano finitamente gerado e portanto isomorfo a $\mathbb{Z}^n \oplus T$, onde T é um grupo abeliano finito. Assim, para o conjunto $Hom(G, \mathbb{R})$ de todos os homomorfismos de G em $\mathbb{R}$ temos que

$$Hom(G, \mathbb{R}) \simeq Hom(G/[G, G], \mathbb{R}) \simeq Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \simeq Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R})^n \simeq \mathbb{R}^n$$

e ainda que

$$\Sigma^m(G, \mathbb{Z}) \subseteq S(G) := \{[\chi] \mid \chi \in Hom(G, \mathbb{R}) \backslash \{0\}\} \simeq (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) / \sim = S^{n-1}$$

onde S^{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir mostra que os invariantes de BNRS de um grupo G estão ligados com o tipo homológico dos subgrupos de G que contêm o comutador de G.

Teorema 1. [7] *Seja G um grupo de tipo homológico FP_m e N um subgrupo normal de G que contém o comutador (isto é, G/N é abeliano). Então N tem tipo homológico FP_m se, e somente se, para cada homomorfismo $\chi : G \to \mathbb{R}$ tal que $\chi \neq 0$ e $\chi(N) = 0$ têm-se que $[\chi] \in \Sigma^m(G, \mathbb{Z})$.*

A primeira versão dos invariantes de BNRS surgiu em [8] (de forma um pouco diferente mas equivalente) para $m = 1$ e G um grupo metabeliano (por definição, um grupo G é metabeliano se existe um subgrupo normal abeliano A de G tal que o grupo quociente G/A também é abeliano). Nesse caso específico, o invariante foi usado para classificar os grupos metabelianos de tipo FP_2. Acontece que para a classe de grupos metabelianos finitamente gerados todo grupo de tipo FP_2 é finitamente apresentável (já discutimos que isso não vale para grupos arbitrários). O resultado a seguir mostra que a classificação dos grupos metabelianos finitamente apresentáveis fica reduzida ao estudo do invariante $\Sigma^1(G, \mathbb{Z})$.

Teorema 2. [8] *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado. Então as seguintes condições são equivalentes :*

a) G é finitamente apresentável;

b) G tem tipo homológico FP_2;

c) $S(G) \setminus \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ não tem pontos antípodas.

6.2 Aplicações de álgebra comutativa

No caso específico de um grupo metabeliano G, o invariante $\Sigma^1(G, \mathbb{R})$ pode ser descrito através da teoria de valorizações reais da álgebra comutativa. Uma valorização real v de um anel comutativo S é uma aplicação

$$v : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vem munido com uma ordem $\leq$ que estende a ordem natural dos números reais mais a condição que ∞ é maior que qualquer elemento real e a operação soma de $\mathbb{R}$ é estendida a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ com $r + \infty = \infty = \infty + \infty$;
2. $v(0) = \infty$;
3. $v(s_1 s_2) = v(s_1) + v(s_2)$;
4. $v(s_1 + s_2) \geq min\{v(s_1), v(s_2)\}$.

A última condição implica $v(s_1 + s_2) = min\{v(s_1), v(s_2)\}$ se $v(s_1) \neq v(s_2)$.

No caso de um grupo metabeliano G (isto é, G tem um subgrupo normal abeliano A e o quociente $Q = G/A$ é abeliano) temos que $[\chi] \notin \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$ se, e somente se, $\chi(A) = 0$ e o homomorfismo $\overline{\chi} : Q \to \mathbb{R}$ (induzido por χ) pode ser estendido a uma valorização $v : \mathbb{Z}Q/Ann_{\mathbb{Z}Q}(A) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, onde A é visto como $\mathbb{Z}Q$-módulo com a operação $+$ induzida pela operação do grupo G e a ação de Q dada por conjugação à direita (isto é, $aq = g^{-1}ag$ para cada $q \in Q$, $a \in A$ e onde g é qualquer elemento de G que através da projeção canônica $G \to Q$ é enviado no elemento q) e $Ann_{\mathbb{Z}Q}(A)$ é o anulador de A (isto é, o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid A\lambda = 0\}$).

Exemplo. Seja Q um grupo livre abeliano de posto dois com base $\{x,y\}$. Consideremos o anel

$$A = \mathbb{Z}Q/(x+y-1)\mathbb{Z}Q$$

que é um $\mathbb{Z}Q$-módulo via produto. O grupo G com apresentação infinita

$$\langle x, y, a \mid x^{-1}y^{-1}xy, (x^{-1}ax)(y^{-1}ay)a^{-1}, \{[a^{x^r y^s}, a^{x^d y^z}]\}_{r,s,d,z\in\mathbb{Z}}\rangle$$

tem subgrupo normal abeliano (que é o fecho normal de a em G) isomorfo a A e o quociente $G/A \simeq Q$. Seja $v : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma valorização. Então a igualdade $x + y - 1 = 0$ em A implica $v(x) = v(y)$ ou $v(x) = v(1) = 0$ ou $v(y) = v(1) = 0$ e os 3 casos acontecem. Assim, $S(G) \setminus \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$ tem exatamente 3 pontos $[\chi_1], [\chi_2], [\chi_3]$ definidos por $\chi_i(a) = 0$ para cada i, $\chi_1(x) = \chi_1(y) \neq 0$, $\chi_2(x) = 0, \chi_2(y) \neq 0$ e $\chi_3(y) = 0, \chi_3(x) \neq 0$. Portanto, $S(G) \setminus \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$ não tem pontos antípodas e daí G é um grupo finitamente apresentável (e de tipo FP_2) embora G tenha sido definido inicialmente com um número infinito de relações.

6.3 Aplicações de topologia algébrica

A conjectura abaixo afirma que o grupo G do exemplo anterior não tem tipo homológico FP_3.

$\mathbf{FP_m}$-Conjectura [5]: *Seja G um grupo metabeliano finitamente gerado. Então G tem tipo homológico FP_m se, e somente se, para quaisquer $[\chi_1], \ldots, [\chi_m] \in S(G) \setminus \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$ tem-se que $\chi_1 + \ldots + \chi_m \neq 0$.*

Embora a FP_m-conjectura ainda esteja em aberto ela já foi provada em muitos casos particulares, por exemplo, para $m = 2$ em [8]; para $m = 3$ se G é uma extensão semi-direta de dois grupos abelianos (isto é, existe dois subgrupos abelianos A e Q de G tais que A é normal em G, $G = A.Q$ e $A \cap Q = 1$, observe que isso acontece no nosso exemplo acima) em [6]; para m arbitrário se G tem posto de Prüfer finito (isto é, existe um número natural d tal que se um subgrupo de G pode ser gerado por um número finito de elementos então o mesmo subgrupo pode ser gerado por d elementos) em [1]. Em todos os casos as demonstrações misturam métodos algébricos com métodos topológicos. A parte topológica envolve a construção de um CW-complexo Y munido com uma ação de G que permuta as células (mas em geral esta ação não é livre) com as seguintes propriedades:

1) se G fixa uma célula (isto é, envia a célula em si mesma) então fixa cada vértice da célula;

2) o espaço quociente $Y^{(m)}/G$ é compacto (isto é, a ação de G sobre o m-esqueleto $Y^{(m)}$ de Y é co-compacta);

3) se para quaisquer $[\chi_1], \ldots, [\chi_m] \in S(G) \setminus \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ tem-se que $\chi_1 + \ldots + \chi_m \neq 0$ (note que essa é a condição da FP_m-Conjectura) o espaço topológico Y é $(m-1)$-conexo (i.e. $\pi_i(Y) = 1$ para todo $i \leq m-1$);

4) os estabilizadores $G_e = \{g \in G \mid eg = e\}$ de células e de dimensão $i \leq m$ são grupos de tipo homológico FP_{m-i}.

Essas propriedades garantem que o grupo G tem tipo homológico FP_m [9]. É interessante observar que em todos os casos onde um espaço Y com as quatro propriedades descritas acima já foi construído (para G metabeliano) Y sempre é um sub-complexo de um produto finito de árvores e cada árvore é associada a uma classe de homomorfismo $[\chi] \in S(G) \setminus \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$. Embora essa construção é topológica (usa grupos que agem sobre CW-complexos) as demonstrações das propriedades 2 e 3 são completamente algébricas. Por exemplo, a propriedade 2 se reduz a resolver um sistema de equações independentes de valorizações num anel (esse tipo de problema é tratado em álgebra comutativa, em geral, tal sistema sempre tem soluções se o anel é corpo mas no caso geral de anéis isso não vale nem para domínios, isso explica a dificuldade do problema).

7 Os invariantes e os anéis de Novikov

Seja G um grupo e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um homomorfismo. O anel de Novikov $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ associado com χ é o conjunto das somas formais (podem ser infinitas) $\sum_{g \in G} z_g g$, onde para cada número natural s o conjunto $\{g \in G \mid \chi(g) \leq s, z_g \neq 0\}$ é finito. Assim, $\mathbb{Z}G \subseteq \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ e as operações soma e produto de $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ estendem as respectivas operações de $\mathbb{Z}G$ e portanto $\mathbb{Z}G$ é um subanel de $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$.

Exemplo. Consideremos o caso em que χ é um homomorfismo discreto (isto é, a imagem de χ é isomorfa a $\mathbb{Z}$). Nesse caso G é o produto semi-direto $N.Q$ onde N é o núcleo $Ker(\chi)$ de χ e Q é o grupo cíclico infinito com gerador t tal que $\chi(t) = 1$. Então os elementos de $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ são do tipo $\sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i t^i$ com $n_i \in \mathbb{Z}N$ e se o conjunto $\{i \in \mathbb{Z} \mid n_i \neq 0\}_{i \in \mathbb{Z}}$ não é vazio tem elemento minimal, mas pode não ter elemento maximal. Assim $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi = \cup_{i \in \mathbb{Z}} t^i (\mathbb{Z}N)[[t]]$, onde $(\mathbb{Z}N)[[t]]$ denota o anel de potências formais (podem ser infinitas) com coeficientes no anel $\mathbb{Z}N$.

O resultado a seguir mostra que os invariantes de BNRS de um grupo G estão ligados com o anel de Novikov. Aqui aparecem os funtores homológicos Tor introduzidos na seção 4.

Teorema 3. [3] *Sejam G um grupo de tipo homológico FP_m e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um homomorfismo não nulo. Então*

$$[\chi] \in \Sigma^m(G, \mathbb{Z})$$

se, e somente se,

$$Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi, \mathbb{Z}) = 0$$

para cada $i \leq m$.

8 Uma conjectura de E. Rappaport Strasser e anéis de Novikov

Um grupo G é dito grupo de tipo de nó se:

1) G é finitamente apresentável;

2) a deficiência $def(G) = 1$ onde

$$def(G) = sup\{| X | - | R |: \langle X \mid R \rangle \text{ é uma apresentação finita de } G\};$$

3) o quociente $G/G' \simeq \mathbb{Z}$ (ou seja, o grupo cíclico infinito) onde $G' = [G, G]$ é o comutador de G.

Tais grupos existem e a motivação do estudo destes grupos vem da topologia algébrica. Os grupos de nó (isto é, grupos que são isomorfos ao grupo fundamental $\pi_1(S^3 \setminus Im(X))$, onde $X : S^1 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação contínua (chamada nó) e S^3 é considerada como uma compactificação de $\mathbb{R}^3$) satisfazem as três propriedades descritas acima.

A conjectura de E. Rappaport Straser [20] afirma que para um grupo G de tipo de nó tal que o comutador G' é finitamente gerado, o comutador G' é sempre um grupo livre. O caminho da demonstração sugerida em [16] é cohomológico com o objetivo de demonstrar que a dimensão cohomológica $cd(G') \leq 1$.

A dimensão cohomológica de um grupo H, denotada por $cd(H)$, é um invariante importantíssimo e seu valor pode ser qualquer número inteiro não negativo (sendo que zero corresponde ao grupo trivial) ou infinito. Por definição, $cd(H)$ é finita se existe uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}H$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ de comprimento finito, isto é, um complexo exato

$$\mathcal{P} : 0 \to P_s \xrightarrow{\partial_s} P_{s-1} \xrightarrow{\partial_{s-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0$$

onde todos P_i são módulos projetivos (um módulo é projetivo se, e somente se, ele é um somando de um módulo livre) e $cd(H)$ é o mínimo de todos os comprimentos s de possíveis resoluções projetivas $\mathcal{P}$. O famoso teorema de Stallings [19] afirma que os grupos de dimensão cohomológica um são exatamente os grupos livres.

A seguir iremos fazer um esboço da demonstração da conjectura de E. Rapaport-Straser. O fato que o comutador G' é finitamente gerado implica (usando métodos analíticos não muito triviais) que a dimensão cohomológica de G é no máximo 2. Ainda mais, por [14] existe uma resolução livre

$$\mathcal{P} : 0 \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{m_2} \xrightarrow{\partial_2} (\mathbb{Z}G)^{m_1} \xrightarrow{\partial_1} (\mathbb{Z}G) \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0.$$

Como a deficiência de G é 1 e no complexo acima m_1 e m_2 podem ser escolhidos, respectivamente, iguais ao número de geradores e o número de relações da apresentação que define a deficiência segue que

$$m_2 - m_1 + 1 = 0.$$

Seja $\chi : G \to \mathbb{R}$ um homomorfismo não nulo. Então $G' \subseteq Ker(\chi)$ e como $G/G' \simeq \mathbb{Z}$ temos que χ é discreto. O fato que G' é finitamente gerado implica pelo Teorema 1 que $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ e daí pelo Teorema 3 segue que $Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi, \mathbb{Z}) = 0$ para $i \leq 1$. Aplicando o funtor $\otimes_{\mathbb{Z}G}\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ ao complexo $\mathcal{P}$ obtemos um novo complexo:

$$\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi : 0 \longrightarrow D_2 = \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_2} \xrightarrow{\partial_2} D_1 = \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1} \xrightarrow{\partial_1}$$

$$D_0 = \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi \xrightarrow{\partial_0} D_{-1} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi = 0 \to 0$$

que é exato nas dimensões 0 e 1. Mostraremos que esse complexo também é exato na dimensão 2. Então o 2-ésimo grupo homológico do complexo $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ é zero e daí, pela definição do funtor Tor, $Tor_2^{\mathbb{Z}G}(\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi, \mathbb{Z}) = 0$. Logo, aplicando novamente o Teorema 3 obtemos que $[\chi] \in \Sigma^2(G, \mathbb{Z})$ e pelo Teorema 1 segue que G' tem tipo homológico FP_2.

Agora, um resultado de R. Bieri [4] mostra que se N é um subgrupo normal de um grupo G, os grupos G e G/N têm dimensões cohomológicas finitas (G tem dimensão cohomológica finita implica que N também tem dimensão cohomológica finita) e, ambos, G e N têm tipo cohomológico FP_∞, então temos a seguinte fórmula aditiva

$$cd(N) + cd(G/N) = cd(G). \tag{3}$$

Observamos que para um grupo G de dimensão cohomológica $cd(G) = n$ ser de tipo FP_∞ é equivalente a ser de tipo FP_n.

Aplicando a fórmula (3) para $N = G'$ temos que

$$cd(G') = cd(G) - cd(G/G') = cd(G) - cd(\mathbb{Z}) = cd(G) - 1.$$

Como $cd(G) \leq 2$ temos que $cd(G') \leq 1$ como prometido.

Finalmente, mostraremos que o complexo $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ é exato na dimensão 2. Consideremos o epimorfismo (isto é, homomorfismo sobrejetivo) de $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$-módulos

$$\varphi = \partial_2 \oplus id_{D_0} : D_2 \oplus D_0 \to Im(\partial_2) \oplus D_0.$$

O fato que o complexo $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ é exato na dimensão 1 implica que $Im(\partial_2) = Ker(\partial_1)$. Como D_0 é um $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$-módulo livre segue que D_1 é isomorfo a $Ker(\partial_1) \oplus D_0$. Logo,

$$Im(\partial_2) \oplus D_0 \simeq D_1 = \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1} = \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_0} \oplus \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_2} = D_2 \oplus D_0.$$

Então o epimorfismo φ pode ser reescrito

$$\varphi : \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1} \to \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1}$$

e como $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1}$ é um $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$- módulo livre existe um $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$-homomorfismo $\rho : \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1} \to \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1}$ tal que $\varphi\rho = id_{\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1}}$. Como em álgebra linear, φ e ρ correspondem a matrizes quadradas (de tamanho $m_1 \times m_1$) A e B com coeficientes em $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ e o produto AB corresponde ao homomorfismo $\varphi\rho$ e portanto AB é a matriz identidade I_n.

Teorema 4. [16] *Seja G um grupo finitamente gerado, $\chi : G \to \mathbb{Z}$ um homomorfismo não nulo e n um número natural. Então o anel de matrizes $n \times n$ com coeficientes no anel de Novikov $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ é von Neumann finito, isto é, inverso à direita é inverso à esquerda e vice-versa.*

O teorema acima implica que $BA = I_n$. Assim, reescrevendo na linguagem de homomorfismos temos que $\rho\varphi$ é a identidade de $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi^{m_1}$ e então $\varphi = \partial_2 \oplus id_{D_0}$ deve ser injetivo. Em particular, ∂_2 é injetivo e portanto o complexo $\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}G} \widehat{(\mathbb{Z}G)}_\chi$ é exato na dimensão 2.

9 Anéis que são von Neumann finitos

Na última seção vimos que a propriedade von Neumann finito para matrizes quadradas com coeficientes no anel de Novikov foi crucial na demonstração da conjetura de E. Rapaport Strasser. A demonstração desse resultado usa métodos de análise funcional, em particular, módulos de Hilbert junto com a existência de dimensão de von Neumann para tais módulos.

Nessa seção vamos discutir a demonstração do resultado que o anel $\mathbb{Z}G$ é von Neumann finito para qualquer grupo G. Em geral, vale mais, a álgebra de qualquer grupo com coeficientes num domínio de característica 0 é um anel von Neumann finito e todas as demonstrações existentes usam métodos de análise funcional [15], [17], [18]. Preferimos discutir o caso da álgebra $\mathbb{Z}G$ do que do anel de Novikov $\widehat{(\mathbb{Z}G)}_{\chi}$, pois é mais simples. O leitor que quer aprender mais sobre as aplicações de métodos analíticos em teoria de grupos pode consultar [12], [13].

Recordemos que um anel com unidade 1_S (isto é, elemento neutro da multiplicação) S é dito von Neumann finito se para cada dois elementos $s_1, s_2 \in S$ a propriedade $s_1 s_2 = 1_S$ implica que $s_2 s_1 = 1_S$ (isto é, cada inverso à direita é inverso à esquerda). É fácil construir exemplo de anel que não é von Neumann finito. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K com base $\{e_i\}_{i \geq 1}$, S o anel de todos endomorfismos lineares de V (isto é, todas as aplicações lineares de V a V não são necessariamente bijetivas) com o produto dado pela composição. Definimos $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ com $\varphi_1(e_i) = e_{i+1}$ e $\varphi_2(e_i) = e_{i-1}$ onde e_0 por definição é elemento nulo de V. Então $\varphi_2\varphi_1 = 1_S$ mas $\varphi_1\varphi_2(e_1) = 0_V \neq e_1$ e, em particular, $\varphi_1\varphi_2 \neq 1_S$.

Teorema 5. ([15]) *Sejam n um número natural e R um domínio de característica 0. Então o anel $M_n(RG)$ de matrizes $n \times n$ com coeficientes em RG é von Neumann finito.*

Vamos restringir ao caso em que R é o anel dos números complexos. O anel $\mathbb{C}G$ pode ser munido com um produto interno de maneira natural

$$(\sum \alpha_g g, \sum \beta_g g) = \sum \alpha_g \overline{\beta_g}$$

onde $\overline{\beta_g}$ é o conjugado complexo de β_g e assim temos a norma

$$\|\sum \alpha_g g\| = \sqrt{\sum_g |\alpha_g|^2)}.$$

Definimos para os elementos de $\mathbb{C}G$:

$$\text{o traço } tr(\sum_g \alpha_g g) = \alpha_1, \text{ o valor absoluto } |\sum_g \alpha_g g| = \sum_g |\alpha_g|$$

$$\text{e o conjugado } \overline{\sum_g \alpha_g g} = \sum_g \overline{\alpha_g} g^{-1}.$$

É fácil verificar que as seguintes propriedades valem para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}G$

$$(\alpha, \beta) = tr(\alpha\overline{\beta}) \quad \text{e} \quad (\alpha, \beta\gamma) = (\alpha\overline{\gamma}, \beta) = (\overline{\beta}\alpha, \gamma)$$

isto é, a conjugação é o operador adjunto dos operadores dados pela multiplicação à esquerda e à direita com respeito ao nosso produto interno.

Seja $e \neq 0$ um elemento idempotente em $\mathbb{C}G$ (ou seja, $e^2 = e$). O objetivo será mostrar que $tr(e) > 0$. Observemos que $I = e\mathbb{C}G$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}G$. Definimos $d = inf_{\alpha \in I}\|\alpha - 1\|$ e portanto d pode ser considerado um tipo de distância entre I e 1. Assim, existem $f_n \in I$ tais que $\|f_n - 1\|^2 < d^2 + 1/n^4$. Não é difícil ver ([18, Lemma 1.6]) que para $r' = d + 2$ e $(r'')^2 = (d+1).\mid e\overline{e} \mid$ temos que

$$|\ \|f_n\|^2 - tr(f_n)| \leq r'/n, \quad |tr(f_n e) - tr(e)| \leq \|e - f_n e\| \leq r''/n. \tag{4}$$

Como $f_n \in e\mathbb{C}G$ segue que $ef_n = f_n$ e $tr(f_n e) = tr(ef_n) = tr(f_n)$. Isto junto com (4) implica que

$$tr(e) = lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2 \geq 0. \tag{5}$$

Ainda mais, $\|e\| \leq \|e - f_n e\| + \|f_n e\| \leq r''/n + \|f_n\|.|e|$. Fazendo n tender para $+\infty$ temos que $\|e\| \leq lim_{n\to\infty}\|f_n\|.|e| = tr(e)^{1/2}|e|$, ou seja,

$$tr(e) \geq \|e\|^2/|e|^2 > 0. \tag{6}$$

Agora, vamos supor que e é um idempotente diferente de 0 e 1. Então $1 - e$ também é um idempotente diferente de 0 e por (6)

$$1 - tr(e) = tr(1) - tr(e) = tr(1 - e) > 0. \tag{7}$$

Suponha que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}G$ e $\alpha\beta = 1$. Então $e = \beta\alpha$ é idempotente. É fácil ver que $e \neq 0$. Ainda mais, se $e \neq 1$ aplicando (7) temos que $0 < tr(e) < 1$, o que nos dá uma contradição pois $tr(e) = tr(\beta\alpha) = tr(\alpha\beta) = tr(1) = 1$. Isso termina a demonstração do Teorema 5 no caso $n = 1$ e $R = \mathbb{C}$.

Referências Bibliográficas

[1] H. Åberg, Bieri- Strebel valuations (of finite rank), Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986) 269-304.

[2] M. Bestvina, N. Brady, Morse theory and finiteness properties of groups. Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 445–470.

[3] R. Bieri, Deficiency and the geometric invariants of a group, with an appendix by P. Schweitzer, submetido.

[4] R. Bieri, Homological dimension of discrete groups. Second edition. Queen Mary College Mathematical Notes. Queen Mary College, Department of Pure Mathematics, London, 1981.

[5] R. Bieri, J.R.J. Groves, Metabelian groups of type FP_∞ are virtually of type FP, Proc. London Math. Soc. (3)45, (1982), 365–384.

[6] R. Bieri, J. Harlander, On the FP_3-Conjecture for metabelian groups, J. London Math. Soc., 64 (2001), no. 3, 595–610.

[7] R.Bieri, B.Renz, Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups, Comment. Math. Helv. 63(1988), 464–497.

[8] R. Bieri, R. Strebel, Valuations and finitely presented metabelian groups, Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980) 439-464.

[9] K. S. Brown, Finiteness properties of groups, J. Pure Appl. Algebra 44 (1987) 45-75.

[10] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological algebra. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[11] D. E. Cohen, Combinatorial group theory: a topological approach. London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[12] B. Eckmann, Introduction to l_2-methods in topology: reduced l_2-homology, harmonic chains, l_2-Betti numbers. Notes prepared by Guido Mislin. Israel J. Math. 117 (2000), 183–219.

[13] B. Eckmann, Idempotents in a complex group algebra, projective modules, and the von Neumann algebra. Arch. Math. (Basel) 76 (2001), no. 4, 241–249.

[14] J. A. Hillman, On L^2-homology and asphericity. Israel J. Math. 99 (1997), 271–283.

[15] I. Kaplansky, Fields and Rings, Chicago Lecture Notes in Math., University of Chicago Press, Chicago, 1969.

[16] D. Kochloukova, Some Novikov rings that are von Neumann finite and knot-like groups, a aparecer em Comment. Math Helvetici.

[17] M. S. Montgomery, Left and right inverses in group algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969 539–540.

[18] D. S. Passman, The algebraic structure of group rings. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1985.

[19] J. R. Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends. Ann. of Math. (2) 88, 1968, 312–334.

[20] E. Rapaport Strasser, Knot-like groups. Knots, groups, and 3-manifolds (papers dedicated to the memory of R.H. Fox), pp. 119–133. Ann. of Math. Studies, No. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1975.

DESSISLAVA H. KOCHLOUKOVA E FLÁVIA S. M. SILVA

IMECC, UNICAMP