MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 40 – junho/2006 – pp. 59–74

O Mínimo Múltiplo Comum e o Máximo Divisor Comum Generalizados

Cydara C. Ripoll, Jaime B. Ripoll, Alveri A. Sant'Ana

1 Introdução

Na disciplina "Tecnologia de Informação e Comunicação em Educação Matemática", do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS, os alunos foram solicitados a explorar o programa GraphEquation, e lá calcularam o mínimo múltiplo comum entre números reais, obtendo, por exemplo[1],

$$\operatorname{lcm}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Paralelamente, na disciplina de Fundamentos de Matemática B, lhes era dito que o mínimo múltiplo comum entre dois racionais (ou reais) pode ser sempre tomado igual a 1, simplesmente porque $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$) é um corpo. Estas duas informações geraram, naturalmente, uma confusão entre os alunos, ocasionando um debate entre estes e seus professores. Considerando a polêmica ensejada por esta discussão, bem como certas

[1] lcm =least common multiple=mínimo múltiplo comum

questões levantadas como, por exemplo, a da utilidade da noção do mmc entre reais, escrevemos o presente trabalho, com os seguintes objetivos:

i) esclarecer em que sentido as duas afirmações acima estão corretas;

ii) abordar questão similar com relação ao máximo divisor comum;

iii) apresentar exemplos de aplicações para o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre números reais.

Começamos relembrando os conceitos e algumas propriedades do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum entre inteiros.

Definição 1.1. *Dizemos que um inteiro v é **múltiplo** de um inteiro u, ou que u é um **divisor** de v, se*

$$v = tu \tag{2}$$

*para algum inteiro t. Dizemos que ℓ é **múltiplo comum** de dois inteiros u e v se ℓ é múltiplo de u e de v. Finalmente, dizemos que M é o **mínimo múltiplo comum entre** u e v, e escrevemos $M = \mathsf{mmc}(u, v)$, se:*

i) $M > 0$,

ii) M é múltiplo comum de u e v,

iii) M é o menor dos múltiplos comuns, no sentido de que se M' é um múltiplo comum de u e v e $M' > 0$ então $M \leq M'$.

Definição 1.2. *Dados dois inteiros u e v, dizemos que um natural D é o **máximo divisor comum entre** u e v, e escrevemos $D = \mathsf{mdc}(u, v)$, se:*

i) D é um divisor comum de u e v, isto é, D é divisor tanto de u quanto de v,

ii) D é o maior dos divisores comuns, no sentido de que se D' é um divisor comum de u e v então $D' \leq D$.

Propriedades do mmc e do mdc:

As provas das propriedades a seguir podem ser encontradas em [2]:

1. Sempre existem o mmc e o mdc entre dois inteiros u e v.
2. Dados dois inteiros u e v, tem-se

$$uv = \mathsf{mmc}(u, v) \times \mathsf{mdc}(u, v) \tag{3}$$

3. Para quaisquer inteiros u, v, w,

$$\mathsf{mmc}(uw, vw) = |w|\mathsf{mmc}(u, v) \tag{4}$$

e

$$\mathsf{mdc}(uw, vw) = |w|\mathsf{mdc}(u, v) \tag{5}$$

Embora as noções de mmc e de mdc sejam introduzidas principalmente para o estudo dos números inteiros, elas admitem uma extensão para pares de reais comensuráveis, como mostramos a seguir.

2 Números reais comensuráveis, mmc e mdc generalizados

A noção de comensurabilidade, historicamente, foi introduzida e utilizada como uma forma de comparar o tamanho de dois segmentos de reta:

Definição 2.1. *Dizemos que dois segmentos de reta são **comensuráveis** quando ambos podem ser obtidos através de um número inteiro de emendas de um mesmo segmento de reta.*

Os gregos da Antigüidade acreditaram, por muito tempo, que dois quaisquer segmentos de reta eram sempre comensuráveis. Entre 450 e 400 a.C., contudo, provou-se que o segmento diagonal de um quadrado não era comensurável com o seu lado. Isto gerou uma forte crise na Matemática grega, chamada Crise dos Incomensuráveis, que só foi resolvida depois de muitos anos de discussão; discussão esta que levou à formulação precisa do problema da comensurabilidade em termos de *medida* de segmentos de retas e que se encerrou com a criação dos números reais absolutos.

Embora sendo um conceito geométrico, a comensurabilidade pode ser equivalentemente definida como uma relação entre dois números reais quaisquer:

Definição 2.2. *Dois números reais r e s são* ***comensuráveis*** *se existem inteiros não nulos m, n tais que*

$$mr = ns. \tag{6}$$

Exemplos:

1. Dois racionais são sempre comensuráveis.
2. Dois irracionais podem ser comensuráveis: por exemplo, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.
3. Dois reais quaisquer nem sempre são comensuráveis: basta tomar um racional e um irracional, mas também a maioria de pares de irracionais, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. De fato, se existissem naturais m e n tais que

$$m\sqrt{2} = n\sqrt{3} \tag{7}$$

então, elevando ao quadrado a expressão acima, teríamos

$$2m^2 = 3n^2. \tag{8}$$

Considerando a fatoração em primos de inteiros, temos em (8) um absurdo, pois é ímpar o número de vezes que o primo 2 aparece na fatoração em primos de $2m^2$, enquanto que é par o número de vezes que 2 aparece na fatoração em primos de $3n^2$. Assim, concluímos que não existem naturais m e n para os quais (7) seja verdadeira.

A noção de comensurabilidade de dois números reais motiva uma primeira extensão da definição de múltiplo e divisor, como segue:

Definição 2.3. *Dizemos que um número real r é um* ***múltiplo inteiro*** *de um real s, ou que s é um* ***divisor inteiro*** *de r, se existe um inteiro a tal que $r = as$.*

Decorre das definições de comensurabilidade e de múltiplo inteiro de um real o seguinte fato:

Proposição 2.4. *Sejam r e s dois reais não nulos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) r e s são comensuráveis;

b) o quociente r/s é um número racional;

c) existe um real t que é múltiplo inteiro comum de r e de s;

d) existe um real u que é divisor inteiro comum de r e de s.

Prova. *(a)⇒(b):* Se r e s são comensuráveis então existem $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tais que $mr = ns$. Conseqüentemente,

$$\frac{r}{s} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}.$$

(b)⇒(c): Suponhamos que $r/s \in \mathbb{Q}$, digamos,

$$\frac{r}{s} = \frac{n}{m}.$$

então, multiplicando a igualdade acima por sm obtemos que $t := mr = ns$ é um múltiplo inteiro comum de r e de s.

(c)⇒(d): Seja $t \in \mathbb{R}$ um múltiplo inteiro comum de r e de s, digamos, $t = mr = ns$, com $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Então o número

$$u := \frac{r}{n} = \frac{s}{m}$$

é um divisor inteiro comum de r e de s.

(d)⇒(a): Seja u um divisor inteiro comum de r e de s, digamos, $r = un$ e $s = um$,com $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Então $mr = ns$. ∎

Considerando a proposição anterior, ficam naturais as seguintes definições:

Definição 2.5. *Sejam r e s dois reais comensuráveis não nulos.*

Dizemos que t é o ***mínimo múltiplo comum generalizado entre*** *r e s, e escrevemos*

$$t = \mathsf{mmcg}(r, s),$$

se:

a) $t > 0$,

b) t é um múltiplo inteiro comum de r e s,

c) se t' é múltiplo inteiro comum de r e s e $t' > 0$, então $t \leq t'$.

*Dizemos que u é o **máximo divisor comum generalizado entre** r e s, e escrevemos*

$$u = \mathsf{mdcg}(r, s),$$

se:

a) u é um divisor inteiro comum de r e s

b) se u' é divisor inteiro comum de r e de s então $u' \leq u$.

No teorema que segue obtemos uma fórmula para o mmcg e para o mdcg entre dois reais comensuráveis quaisquer.

Teorema 2.6. *Sejam r e s dois reais comensuráveis não nulos. Então*

$$\mathsf{mmcg}(r, s) = |vr| = |us| \quad e \quad \mathsf{mdcg}(r, s) = \left|\frac{r}{u}\right| = \left|\frac{s}{v}\right|,$$

onde u/v é a forma irredutível do racional r/s.

Prova. Consideraremos aqui apenas o caso r e s positivos. Observamos inicialmente que se a, b, c, d são inteiros tais que

$$ar = bs \quad \text{e} \quad cr = ds$$

então

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

e este número nada mais é do que o número r/s. Assim, os menores naturais a, b que satisfazem $ar = bs$ são claramente obtidos quando tomamos o numerador e o denominador da fração irredutível que representa o racional r/s. Daí, pela Definição 2.5, se u/v é tal fração irredutível,

$$\mathsf{mmcg}(r, s) = vr = us \quad \text{e} \quad \mathsf{mdcg}(r, s) = \frac{r}{u} = \frac{s}{v},$$

o que completa prova do teorema. ∎

No caso de r e s serem números racionais, as fórmulas dadas no teorema acima podem ser reescritas em termos das representações destes racionais em frações irredutíveis:

Corolário 2.7. *Sejam r, s racionais não nulos e sejam a, b, c, d inteiros tais que a/b e c/d são as representações para r e s, respectivamente, na forma de fração irredutível. Então*

$$\mathsf{mmcg}(r,s) = \frac{\mathsf{mmc}(a,c)}{\mathsf{mdc}(b,d)} \quad e \quad \mathsf{mdcg}(r,s) = \frac{\mathsf{mdc}(a,c)}{\mathsf{mmc}(b,d)}. \tag{9}$$

Prova. Novamente aqui provamos apenas para o caso r e s positivos. Como $\mathsf{mdc}(a,b) = 1 = \mathsf{mdc}(b,d)$, temos

$$\frac{r}{s} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'},$$

onde

$$a' = \frac{a}{\mathsf{mdc}(a,c)}, \quad b' = \frac{b}{\mathsf{mdc}(b,d)}, \quad c' = \frac{c}{\mathsf{mdc}(a,c)}, \quad d' = \frac{d}{\mathsf{mdc}(b,d)}.$$

É claro então que a fração $a'd'/b'c'$ é irredutível, e portanto, pelo Teorema 2.6, temos

$$\begin{aligned} \mathsf{mmcg}(r,s) = rb'c' &= \frac{a}{b}\frac{b}{\mathsf{mdc}(b,d)}\frac{c}{\mathsf{mdc}(a,c)} \\ &\overset{(3)}{=} \frac{\mathsf{mmc}(a,c)}{\mathsf{mdc}(b,d)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathsf{mdcg}(r,s) = \frac{r}{a'd'} &= \frac{a}{b}\frac{\mathsf{mdc}(a,c)}{a}\frac{\mathsf{mdc}(b,d)}{d} \\ &\overset{(3)}{=} \frac{\mathsf{mdc}(a,c)}{\mathsf{mmc}(b,d)}, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ∎

Observação 2.8. *A hipótese "na forma de fração irredutível" no Corolário 2.7 é imprescindível, isto é, a fórmula (9) quando aplicada a frações não irredutíveis não proporciona necessariamente o* $\mathsf{mmcg}(r,s)$ *e o* $\mathsf{mdcg}(r,s)$*, como nos mostra o exemplo a seguir. Seja $r = 10/6$ e $s = 1/7$ então*

$$\tfrac{\mathsf{mmc}(10,1)}{\mathsf{mdc}(6,7)} = 10 \neq 5 = \tfrac{\mathsf{mmc}(5,1)}{\mathsf{mdc}(3,7)} = \mathsf{mmcg}(r,s)$$

e

$$\tfrac{\mathsf{mdc}(10,1)}{\mathsf{mmc}(6,7)} = \tfrac{1}{42} \neq \tfrac{1}{21} = \tfrac{\mathsf{mdc}(5,1)}{\mathsf{mmc}(3,7)} = \mathsf{mdcg}(r,s)$$

Exemplos:

1) Da observação acima obtemos $\mathsf{mmcg}\left(\frac{10}{6},\frac{1}{7}\right)=\mathsf{mmcg}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{7}\right)=5.$

e $\mathsf{mdcg}\left(\frac{10}{6},\frac{1}{7}\right)=\mathsf{mdcg}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{7}\right)=\frac{\mathsf{mdc}(5,1)}{\mathsf{mmc}(3,7)}=\frac{1}{21}.$

2) $\mathsf{mmcg}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathsf{mmc}(1,3)}{\mathsf{mdc}(2,4)}=\frac{3}{2}$ e $\mathsf{mdcg}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathsf{mdc}(1,3)}{\mathsf{mmc}(2,4)}=\frac{1}{4}$

(note que este cálculo explica o valor encontrado pelo GraphEquation (1)).

3) $\mathsf{mmcg}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathsf{mmc}(1,1)}{\mathsf{mdc}(2,1)}=1$ e $\mathsf{mdcg}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathsf{mdc}(1,1)}{\mathsf{mmc}(2,1)}=\frac{1}{2}.$

4) $\mathsf{mmcg}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{4}\pi\right)=2\pi$ e $\mathsf{mdcg}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{2\pi/3}{8}=\frac{1}{12}\pi,$

pois

$$\frac{2\pi/3}{\pi/4}=\frac{8}{3},\text{ e então } 3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi=8\times\frac{\pi}{4}.$$

5) $\mathsf{mmcg}(16\sqrt{3},5\sqrt{3})=5\times 16\sqrt{3}=80\sqrt{3}.$

Mostramos agora que as identidades (3), (4) e (5) se generalizam também para mmcg e mdcg entre reais comensuráveis:

Corolário 2.9. *Sejam r e s dois reais não nulos comensuráveis. Então:*

i) $rs=\mathsf{mdcg}(r,s)\times\mathsf{mmcg}(r,s)$;

ii) dado qualquer real não nulo c, temos ainda cr e cs comensuráveis e

$$\mathsf{mmcg}(cr,cs)=|c|\times\mathsf{mmcg}(r,s)$$
$$\mathsf{mdcg}(cr,cs)=|c|\times\mathsf{mdcg}(r,s)$$

Prova. Consideraremos aqui apenas o caso c,r e s positivos. Suponhamos que m,n são naturais não nulos tais que

$$\frac{r}{s}=\frac{n}{m}\quad\text{e}\quad\mathsf{mdc}(n,m)=1.$$

Daí temos

$$\mathsf{mmcg}(r,s)=mr=ns\quad\text{e}\quad\mathsf{mdcg}(r,s)=\frac{r}{n}=\frac{s}{m},$$

de onde segue que

$$\mathsf{mdcg}(r,s) \times \mathsf{mmcg}(r,s) = \frac{r}{n} \times ns = rs,$$

o que prova *(i)*.

Além disso, como

$$\frac{cr}{cs} = \frac{n}{m},$$

temos

$$\begin{aligned}\mathsf{mmcg}(cr,cs) &= mcr = c \times \mathsf{mmcg}(r,s)\\ \mathsf{mdcg}(cr,cs) &= \frac{cr}{n} = c \times \mathsf{mdcg}(r,s),\end{aligned}$$

o que prova *(ii)*. ■

O Corolário a seguir nos mostra que as propriedades acima nos permitem calcular o mínimo múltiplo comum generalizado entre dois racionais de expansão decimal finita de uma forma mais rápida. Não é difícil se convencer que este resultado também vale quando substituímos a base 10 de numeração por uma base b qualquer.

Corolário 2.10. *Se r e s são dois números racionais que podem ser representados por uma fração decimal, digamos,*

$$r = \frac{u}{10^k} \quad e \quad s = \frac{v}{10^l}$$

e se $t \geq k$ e $t \geq l$ então

$$\mathsf{mmcg}(r,s) = \frac{\mathsf{mmc}(10^t r, 10^t s)}{10^t} \qquad e \qquad \mathsf{mdcg}(r,s) = \frac{\mathsf{mdc}(10^t r, 10^t s)}{10^t}$$

Prova. Imediata. ■

Exemplo: No Exemplo 2 acima, poderíamos ter calculado o mmcg da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathsf{mmcg}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) &= \mathsf{mmcg}(0.5\ ;\ 0.75) = \frac{\mathsf{mmc}(100 \times 0.5, 100 \times 0.75)}{100}\\ &= \frac{\mathsf{mmc}(50,75)}{100} = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3 Divisibilidade em anéis

Relembramos que um anel é um conjunto munido de duas operações que satisfazem certas propriedades. Para a definição precisa indicamos [3].

Definição 3.1. *Seja A um anel. Dados $a, b \in A$, dizemos que a é* ***múltiplo*** *de b, ou que b é um* ***divisor*** *de a, se $a = tb$ para algum $t \in A$.*

Exemplos:

1) Se $A = \mathbb{Z}$, então a definição acima coincide com a Definição 1.1.

2) Se A é o anel de polinômios com coeficientes reais, então o polinômio $3X^3 + 4X^2 + 3X + 4$ é múltiplo de $X^2 + 1$, pois

$$3X^3 + 4X^2 + 3X + 4 = (X^2 + 1)(3X + 4).$$

3) Se A é o anel dos inteiros de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

então $(1 + 2i)$ é divisor de 5, pois $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$.

Note que, no caso em que o anel A é até um corpo (ou seja, todo elemento não nulo de A tem inverso multiplicativo), como $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ por exemplo, todo elemento não nulo a de A é divisor de 1, pois

$$1 = a(a^{-1}),$$

e portanto 1 é múltiplo comum a quaisquer dois elementos não nulos de A. Mais até: num corpo, quaisquer elementos não nulos a, b, c satisfazem a propriedade de que qualquer um deles é um múltiplo comum e também um divisor comum dos demais. Por exemplo,

$$b(b^{-1}c) = c = a(a^{-1}c)$$

e

$$b = c(c^{-1}b) \quad \text{e} \quad a = c(c^{-1}a).$$

Portanto, não faz sentido falar em mmc e mdc em corpos, se pensamos em múltiplos e divisores como dados pela Definição 3.1, ficando assim justificada a segunda afirmação feita na introdução deste trabalho.

4 Voltando à motivação deste trabalho

As justificativas para as duas afirmações mencionadas na Introdução foram explicadas por duas generalizações diferentes da idéia de múltiplo e de divisor de inteiros (compare as Definições 1.1, 2.3 e 3.1). Tais generalizações dependeram da maneira como encaramos o produto na igualdade (2):

- por um lado, concentrando-nos na soma de inteiros, $v = tu$ significa, supondo $t > 0$, que

$$v = \underbrace{u + ... + u}_{t \text{ vezes}}$$

  (para $t < 0$ encaramos tu como a soma de $-t$ parcelas iguais a $-u$);

- por outro lado, concentrando-nos no produto de inteiros, $v = tu$ significa que v é o produto de dois elementos do anel $\mathbb{Z}$.

A primeira maneira de encarar a igualdade (2) nos permite considerar a idéia de múltiplo inteiro em qualquer conjunto que possua a estrutura de $\mathbb{Z}-$módulo (ou seja, em qualquer grupo). Já a segunda maneira nos permite considerar a idéia de múltiplo e divisor em qualquer conjunto que possua a estrutura de anel.

Assim, as duas afirmações do início deste trabalho, que foram apresentadas aos alunos em contextos distintos, estão corretas. No entanto, a simples nomenclatura "lcm" (mínimo múltiplo comum) utilizada pelo GraphEquation em lugar de "glcm - Mínimo Múltiplo Comum Generalizado" é que causou, ao nosso ver, a maior confusão por parte dos alunos, pois não proporcionou a reflexão sobre o assunto. O termo "generalizado", se utilizado, teria instigado o aluno a refletir: "Por que 'generalizado'? Como o conceito tradicional de mmc entre inteiros está sendo generalizado?".

Antes de passarmos às aplicações, um último comentário sobre a utilização da nomenclatura "mínimo múltiplo comum": é comum nos deparmos no Ensino Médio com cálculos do tipo

$$\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \tag{10}$$

e, impensadamente, chamarmos o denominador $4\sqrt{6}$de mmc entre $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{3}$. Esta nomenclatura não está adequada, mesmo segundo a definição que demos aqui de mínimo múltiplo comum generalizado, pois $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{3}$ não são reais comensuráveis. No entanto, salientamos que o cálculo é válido. De fato, num corpo podemos também utilizar a notação de fração, com o seguinte significado: dados r, s elementos de um corpo K, com $s \neq 0$, denotamos por r/s o elemento rs^{-1}. Desta maneira, utilizando as propriedades das operações $+$ e $\times$ definidas em K, temos ainda válida em K a regra de somar frações: dados $r, s, u, v \in K$ com $s \neq 0 \neq v$, temos

$$\frac{r}{s}+\frac{u}{v}=rs^{-1}+uv^{-1}=s^{-1}v^{-1}(rv+su)=(sv)^{-1}(rv+su)=\frac{rv+su}{sv}. \tag{11}$$

Ainda, dado $a \in K$, $a \neq 0$, tal que $s = as'$ e $v = av'$, temos

$$\frac{r}{s}=\frac{1}{a}\frac{r}{s'} \quad \text{e} \quad \frac{u}{v}=\frac{1}{a}\frac{u}{v'};$$

daí, poderíamos também operar em K da seguinte maneira:

$$\frac{r}{s}+\frac{u}{v}=\frac{1}{a}\frac{r}{s'}+\frac{1}{a}\frac{u}{v'}=\frac{1}{a}\left(\frac{r}{s'}+\frac{u}{v'}\right)=\frac{1}{a}\frac{rv'+us'}{s'v'}.$$

Ora, no caso em que $s = m\sqrt{p}$ e $v = n\sqrt{q}$, com m, n inteiros e $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ não comensuráveis, podemos escrever

$$s = \mathsf{mdc}(m,n)m'\sqrt{p} \quad \text{e} \quad v = \mathsf{mdc}(m,n)n'\sqrt{q},$$

onde $m' = \dfrac{m}{\mathsf{mdc}(m,n)}$ e $n' = \dfrac{n}{\mathsf{mdc}(m,n)}$. Portanto, temos

$$\frac{r}{m\sqrt{p}}+\frac{u}{n\sqrt{q}}=\frac{1}{\mathsf{mdc}(m,n)}\left(\frac{r}{m'\sqrt{p}}+\frac{s}{n'\sqrt{q}}\right)\overset{(11)}{=}\frac{1}{\mathsf{mdc}(m,n)}\left(\frac{rn'+sm'}{m'n'\sqrt{pq}}\right).$$

Mas, por (3),

$$\frac{1}{\mathsf{mdc}(m,n)}\frac{1}{m'n'} = \frac{1}{\mathsf{mdc}(m,n)}\frac{[\mathsf{mdc}(m,n)]^2}{mn} = \frac{\mathsf{mdc}(m,n)}{mn} = \mathsf{mmc}(m,n)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{r}{m\sqrt{p}} + \frac{s}{n\sqrt{q}} = \frac{1}{\mathsf{mdc}(m,n)}\left(\frac{rn'+sm'}{m'n'\sqrt{pq}}\right) = \frac{rn'+sm'}{\mathsf{mmc}(m,n)\sqrt{pq}}$$

que nada mais é do que a fórmula aplicada em (10).

5 Aplicações:

Apresentamos a seguir duas aplicações dos conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum generalizados:

I) Para o mmcg:

Definição 5.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita* ***periódica*** *quando existe um número real $p \neq 0$ tal que*

$$f(x+p) = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Dizemos que p é um ***período*** *de f, ou também que f é uma* ***função periódica de período*** *p.*

Note que se f é uma função periódica de período p, então kp também é um período para f, para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Podemos então provar:

Teorema 5.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções periódicas de períodos p_f e p_g respectivamente. Se p_f e p_g são números* ***comensuráveis*** *então as funções: $f+g$ e $f.g$ são periódicas de período* $\mathsf{mmcg}(p_f, p_g)$.

Prova. Faremos aqui apenas a demonstração para o caso $f+g$. Sendo p_f e p_g por hipótese comensuráveis, está bem definido $M = \mathsf{mmcg}(p_f, p_g)$. Existem então $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tais que

$$mp_f = np_g = M. \tag{13}$$

Obviamente, como m, n, p_f, p_g são todos não nulos, temos que M é também não nulo. Agora, dado $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}(f+g)(x+M) &= f(x+M) + g(x+M)\\ &= f(x+np_f) + g(x+mp_g)\\ &= f(x) + g(x) = (f+g)(x),\end{aligned}$$

o que prova que $f+g$ é periódica de período $\mathsf{mmcg}(p_f, p_g)$. ■

Exemplo 5.3. *$f(x) = \text{sen}3x$ e $g(x) = \cos 7x$ são funções periódicas de períodos fundamentais $p_f = \frac{2\pi}{3}$ e $p_g = \frac{2\pi}{7}$, respectivamente. Como p_f e p_g são comensuráveis, temos que a função h dada por*

$$h(x) = \text{sen}3x + \cos 7x$$

é periódica, admitindo 2π para período, pois

$$\mathsf{mmcg}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{7}\right) = 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi,$$

já que

$$\frac{2\pi/3}{2\pi/7} = \frac{7}{3}.$$

II) Para o mdc:

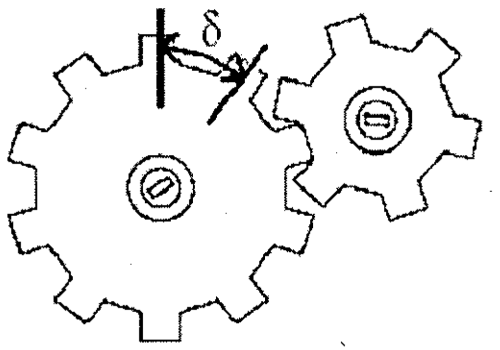
Geometricamente, se dois segmentos AB e CD têm medidas comensuráveis r e s, respectivamente, então o $\mathsf{mdcg}(r, s)$ é a medida do maior segmento OU que, quando escolhido para nova unidade de medida para medir segmentos de reta, proporciona medidas inteiras para AB e CD.

Podemos aplicar esta idéia ao ajuste de engrenagens: suponhamos que queiramos ajustar duas rodas num sistema de engrenagens, frezando dentes nas mesmas, todos de mesmo tamanho. Ora, cada roda deve ter um número inteiro de dentes e, obviamente, o desgaste sobre as rodas será mínimo quando os comprimentos das circunferências forem comensuráveis: de fato, denotando por δ o dobro do comprimento do dente (para levarmos em conta o espaço entre dentes - veja figura), e denotando por r_1 e r_2 os raios das rodas, temos que existem m, n naturais tais que $2\pi r_1 = m\delta$ e $2\pi r_2 = n\delta$ se e só se

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{m\delta}{n\delta},$$

ou ainda, se e só se r_1 e r_2 forem comensuráveis:

$$nr_1 = mr_2.$$



Portanto, o maior valor de δ é precisamente

$$\mathsf{mdcg}(2\pi r_1, 2\pi r_2) \overset{\text{Cor.2.9}}{=} 2\pi \times \mathsf{mdcg}(r_1, r_2),$$

e se, na prática, este comprimento se revelar inviável (por ser, por exemplo, muito "curvo" um arco de comprimento δ), então, para minimizar o desgaste, teremos que tomar comprimentos iguais a δ/k com k natural.

Salientamos que, no caso de raios incomensuráveis, teremos inevitavelmente um desgaste sobre as rodas dentadas, mas este é tornado mínimo quando utilizamos a teoria das frações contínuas para calcular o valor de δ (veja [1] e [4]).

Referências Bibliográficas

[1] Beskin, N., *Frações Contínuas,* Coleção Iniciação à Matemática, Ed. MIR, 1980.

[2] Coelho, S.P. - Millies, C.P., *Números: Uma introdução à Matemática,* EDUSP, 3^a edição, 2003.

[3] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra,* Projeto Euclides, IMPA, 3^a edição, 1995.

[4] Lequain, Y., *Aproximação de um número real por números racionais,* 19^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1994.

[5] http://www.euler.mat.ufrgs.br/~portosil/ol-peri.html

[6] http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares ou http://www.peda.com/grafeq

Cydara Cavedon Ripoll, Jaime Bruck Ripoll, Alveri Alves Sant'Ana
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Avenida Bento Gonçalves 9500
91 509 - 900 Porto Alegre - RS
Brasil
cydara@mat.ufrgs.br, ripoll@mat.ufrgs.br, alveri@mat.ufrgs.br