Euler e o problema da Basiléia

Geraldo Ávila
Unicamp/UFG

A primeira ocorrência de que se tem notícia de uma série infinita na matemática encontra-se num trabalho de Arquimedes sobre o cálculo da área de um segmento de parábola. Trata-se de uma série geométrica, e sobre isso escrevemos em artigo publicado na *Matemática Universitária* [1], quando abordamos também outros tópicos interessantes relacionados com Arquimedes, em particular, o engenhoso artifício que ele utiliza para evitar uma soma infinita. Isso aparece no livro *A quadratura da parábola*, que faz parte das obras de Arquimedes, disponíveis em inglês em traduções de dois eminentes conhecedores da matemática grega antiga, T. L. Heath [8] e E. J. Dijksterhuis [5].

Depois da ocorrência dessa série em Arquimedes, séries infinitas só voltaram a aparecer (no Ocidente, pelo menos) mais de mil anos mais tarde; e com força total a partir do século XVII. Neste e boa parte do século seguinte tornou-se "esporte preferido" de muitos matemáticos encontrar somas exatas de séries infinitas. E uma delas, que desafiou os matemáticos por quase cem anos, e que é muito importante, por estar ligada à função zeta de Riemann, é a série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \qquad (1)$$

Nosso objetivo principal neste artigo é apresentar a maneira ao mesmo tempo simples e engenhosa que Euler utilizou para obter a soma dessa série.

Origem e breve história do problema

Depois do aparecimento da série geométrica de Arquimedes, as séries infinitas só voltaram a aparecer no século XIV em conexão com estudos de Cinemática no Merton College da Universidade de Oxford; e a partir de meados do século XVI, desta vez no contexto do Cálculo Infinitesimal. E como instrumento de investigação e desenvolvimento de novos métodos e técnicas dessa disciplina, seu sucesso tem sido tão importante e crescente que as séries infinitas passaram a constituir um importante capítulo da matemática e das ciências aplicadas.

Foi o matemático italiano Pietro Mengoli (1625–1686), professor de Mecânica na Universidade de Bolonha, quem primeiro teve a idéia de encontrar a soma da série (1); e, segundo alguns autores, isso teria ocorrido em 1644. Não tendo êxito, ele tornou público o problema num livro que veio a lume em 1650 (veja [3], p. 1071).[1] Por quase cem anos essa questão desafiou os melhores matemáticos daqueles tempos, e estava pronta a fazer a fama de quem conseguisse resolvê-la.

Jacques Bernoulli (1654–1705) foi um dos muitos matemáticos que tentaram somar a série (1). Ele era um apaixonado por séries e já havia somado várias delas, quando viu-se impotente diante dessa nova série proposta por Mengoli. E, tendo a humildade de admitir sua derrota, tornou público o problema em uma de suas publicações (*Tractatus de seriebus infinitis*), com um apelo: "ficaremos muito gratos a quem conseguir somar essa série e nos comunicar o resultado, pois até agora não alcançamos esse intento". E como Jacques Bernoulli era professor na Basiléia, o problema ficou conhecido com o nome dessa cidade.

[1] *Este trabalho é um excelente apanhado da vida e obra de Euler no que se refere à função zeta.*

Coube a Leonardo Euler (1707–1783) a glória de encontrar a tão desejada solução. Embora Euler já fosse um matemático famoso, a engenhosidade de seu modo de obter a soma da referida série foi tão notável que fez sua fama crescer enormemente. E, por ter adotado um procedimento ao mesmo tempo muito didático e bastante ilustrativo de como procede um matemático em suas descobertas, vale a pena abordar esse procedimento nas páginas desta Revista.

As séries de potências

As *séries de potências*, em sua forma mais simples

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

começaram a surgir logo no início do Cálculo, como aproximações de funções mais complicadas do que polinômios. De fato, os polinômios eram as funções mais simples de que dispunham os matemáticos. Em se tratando de outras funções, como logaritmo, exponencial, as funções trigonométricas, etc., eles procuravam aproximá-las por séries de potências, que costumavam tratar como se fossem polinômios. Com manipulações puramente formais, sobre séries de potências de somas conhecidas, as somas de outras séries foram sendo obtidas para uma grande variedade de funções, o que facilitava o estudo dessas funções. Assim, da mais simples dessas séries, que é a série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

convergente no intervalo $|x| < 1$, obtemos também, por simples troca de x por $-x^2$, a série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots;$$

e desta, por integração termo a termo, resulta a série de potências da função $\operatorname{arc\,tg} x$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (2)$$

Fazendo $x = 1$ obtemos a famosa *série de Leibniz*:[2]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (3)$$

A série do seno e a demonstração de Euler

Para os propósitos da demonstração de Euler, necessitamos da série de potências da função seno, facilmente obtida da fórmula geral de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

a qual converge para todo x real ou complexo. Repare que podemos fatorar x e escrever

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x f(x),$$

onde

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \quad (4)$$

Lembremos que um polinômio de grau n,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

possui n raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (algumas das quais, ou todas, podendo ser complexas) e se decompõe em fatores do primeiro grau assim:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n &= \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \end{aligned}$$

Se o coeficiente a_0 for igual a 1, todas as raízes serão diferentes de zero e essa decomposição poderá ser escrita na forma

$$\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Euler recorre à série de potências da função seno, que ele trata como polinômio infinito. Assim, como a

[2] *Observamos que podemos justificar a substituição de $x = 1$ na série (2) com o Teorema de Abel ([2], p. 230). Essa preocupação não existia no tempo de Leibniz.*

função $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ que aparece em (4) tem raízes $k\pi$, com $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, por analogia com a decomposição de polinômios em fatores do primeiro grau, Euler escreve

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\ldots$$

Observe agora que as expressões desses parênteses, tomadas sucessivamente aos pares, são do tipo

$$(1-a)(1+a) = 1 - a^2.$$

Em conseqüência,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots$$

O termo em x^2 nesta última expressão é obtido da seguinte maneira: multiplicamos o termo $-x^2/\pi^2$ do primeiro parênteses com todos os termos unitários dos outros parênteses; em seguida o termo $-x^2/4\pi^2$ do segundo parênteses com todos os termos unitários dos outros parênteses; e assim por diante. Juntamos tudo e igualamos ao termo $-x^2/3!$ da expressão anterior de $f(x)$, resultando em

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \ldots$$

Finalmente, multiplicando tudo por $-\pi^2$, vem o resultado procurado:[3]

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (5)$$

A apresentação dessa demonstração de Euler encontra-se em [6], um excelente livro sobre a vida e a obra de Euler.

[3] *Deixamos ao leitor a tarefa de justificar o procedimento puramente formal de Euler, principalmente no que diz respeito a produtos infinitos. Uma boa referência é o texto de Knopp [7].*

Reflexões quase finais

Não deixa de ser surpreendente que o número π venha "mostrar sua cara" em lugares onde ele menos seria esperado, como é o caso das séries (3) e (5)!... Com efeito, um número que surgiu como razão da circunferência para o diâmetro agora aparece nas somas de séries que aparentemente nada têm a ver com circunferência! Euler enunciou seu resultado afirmando que *seis vezes a soma da série é igual ao quadrado de uma circunferência de diâmetro unitário.*

Na verdade o número π aparece na soma de muitas outras séries e em um sem-número de outros lugares. Fenômenos como esse, por difíceis que sejam de serem compreendidos ou explicados, no entanto têm a virtude de exibir a extraordinária unidade de toda a Matemática.

Euler obteve imediatamente a soma dos inversos dos quadrados dos números pares, ou seja,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots$$

Para isso, fatorando $1/2^2$, esta série se escreve na forma

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Fica agora muito fácil obter a soma dos inversos dos quadrados dos números ímpares, bastando, para isto, subtrair este último resultado de (5).

Euler somou muitas outras séries numéricas, algumas delas aparentadas com a série (5), como essas duas últimas de que falamos.

A distribuição dos números primos

Observe que a série (5) é o valor, para $s = 2$, da função $\zeta(s)$ assim definida:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

a qual também se exprime na forma do produto infinito de Euler

$$\zeta(s) = \Pi_p(1 - 1/p^s)^{-1},$$

onde o produtório se estende a todos os números primos. Fica aparente, nesta representação, que $\zeta(s)$ tem algo a ver com os números primos. Isto se tornou da maior importância depois que Riemann (1826–1866) escreveu um importante trabalho em 1859 com um estudo aprofundado da função zeta, direcionado a demonstrar a conjectura de Gauss (1777–1855) sobre a distribuição dos números primos. Denotando com $\pi(n)$ o número de números primos menores do que n, Gauss e Legendre (1752–1833) conjecturaram, independentemente um do outro, que

$$\lim \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1,$$

o que equivale a dizer, num certo sentido, que $\pi(n)$ é assintoticamente igual a $n/\log n$. Duas demonstrações dessa conjectura foram publicadas em 1896, uma pelo matemático francês Jacques Hadamard (1865–1963) e a outra pelo belga Charles de la Vallée Poussin (1866–1962). Desde então os matemáticos têm tentado melhorar o resultado da conjectura de Gauss-Legendre, para o que seria decisiva a resolução da Hipótese de Riemann, de que falaremos a seguir.

Os zeros de ζ (s) e a Hipótese de Riemann

Observamos que $\zeta(s)$, definida inicialmente no semiplano complexo $\Re(s) > 1$, pode ser estendida como função holomorfa a todo o plano complexo, exceto por um pólo no ponto $s = 1$. Ela possui zeros nos inteiros negativos pares, os quais são os assim chamados *zeros triviais da função zeta.* Riemann enunciou uma conjectura sobre os demais zeros dessa função. Segundo Riemann, eles seriam números complexos, todos com a parte real igual a $1/2$. Esta afirmação, conhecida como *Hipótese de Riemann*, é o problema não resolvido mais famoso da matemática. Mais famoso e mais importante, tendo em vista suas extraordinárias conseqüências em uma variedade de questões da matemática pura e da ciência aplicada. Dentre essas conseqüências está um dos mais profundos, surpreendentes e intrigantes resultados de toda a matemática, o chamado *Teorema da Distribuição dos Números Primos*, que nada mais é do que uma versão mais precisa da conjectura de Gauss-Legendre. O leitor interessado em mais informações sobre esse assunto poderá consultar [9] e a bibliografia lá indicada; [4] é outra boa referência.

Referências

[1] ÁVILA, G. Arquimedes, o rigor e o método. *Matemática Universitária*, n. 4, p. 27–45, dez. 1986.

[2] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1993. 254p.

[3] AYOUB, R. Euler and the zeta function. *American Mathematical Monthly*, v. 81, n. 10, p. 1067–1086, dez. 1974.

[4] CONREY, J. B. The Riemann Hypothesis. *Notices of the American Mathematical Society*, v. 50, n. 3, p. 341–353, mar. 2003.

[5] DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes*. Copenhagen: Ejnar Munksgaard, 1956. 422p.

[6] DUNHAM, W. *Euler: the master of us all*. Washington: Mathematical Association of America, c1999. 185p.

[7] KNOPP, K. Single-valued functions. In:. *Theory of functions, II: applications and continuation of the general theory*. New York: Dover. Cap. 1, p. 1–22, 1947

[8] HEATH, T. L. (Ed.) *The works of Archimedes*. New York: Dover, 2002. 582p.

[9] VOLOCH, J. F. A distribuição dos números primos. *Matemática Universitária*, n. 6, p. 71–82, dez. 1987.