Cem anos do Axioma da Escolha: boa ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff

Samuel Gomes da Silva
João Paulo Cirineu de Jesus

UFBA

Comemoramos em 2008 os cem anos da publicação, por Ernst Zermelo, do trabalho que iniciou a axiomatização da Teoria dos Conjuntos. Dentre os axiomas publicados, surgia o Axioma da Escolha, utilizado quatro anos antes por Zermelo em sua demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenado. Devido ao seu caráter não-construtivo, o Axioma da Escolha foi e ainda é alvo de muita discussão e polêmica.

Apresentamos neste artigo demonstrações para equivalências entre o Axioma da Escolha e proposições clássicas da matemática, a saber: o Teorema da Boa Ordem de Zermelo, que afirma que todo conjunto pode ser bem-ordenado; o Lema de Zorn; e o Teorema de Tychonoff para espaços compactos. O instrumental teórico necessário para essas demonstrações é apresentado com certo detalhamento, destacando-se os axiomas da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel e alguns resultados sobre conjuntos bem-ordenados.

Com relação à equivalência entre o Axioma da Escolha e o Teorema de Tychonoff, apresentada por Kelley no ano de 1950, acreditamos ser esta a primeira publicação em português e no Brasil de uma demonstração detalhada e válida também para a equivalência entre o Axioma da Escolha e a versão do Teorema de Tychonoff restrita aos espaços compactos T_1.

1. Introdução

Em fins do século XIX, os desenvolvimentos e as necessidades da Matemática impuseram a concepção do *infinito atual*,[1] a qual foi veiculada através da Teoria dos Conjuntos (*Mengenlehre*) que Georg Cantor (1845–1918) concebeu (entre 1879 e 1884) em uma seqüência de seis artigos, todos publicados na *Mathematische Annalen*. Criada nos anos de 1870 (e desenvolvida a um elevado grau de sofisticação) por Cantor, essa teoria nasceu da tentativa de solucionar um problema técnico a respeito da unicidade do desenvolvimento de funções em série trigonométrica (na Teoria das Séries de Fourier). Essa tentativa, por sua vez, levou Cantor a introduzir a noção de número ordinal e, posteriormente, a de número cardinal. Apesar de uma certa hostilidade a princípio, principalmente a de Leopold Kronecker, a maioria dos matemáticos, dentre eles David Hilbert, adotou decisivamente a nova teoria que logo se revelou um instrumento poderoso e indispensável para as investigações em Matemática, pois o desenvolvimento da noção de conjunto veio a se revelar de uma tal maleabilidade e eficácia que acomodou as construções matemáticas conhecidas até o momento, além de providenciar outras para as teorias que vinham surgindo. Destaca-se também a importância que teve essa teoria para a unificação dos vários ramos da Matemática que até então poderiam parecer isolados um do outro, como, por exem-

[1] *O infinito considerado como algo "completo e acabado" em contraposição à concepção aristotélica de* infinito potencial*, que é o infinito encarado como algo estando "em permanente processo de construção".*

plo, a Álgebra, a Geometria e a Análise. Também é fato que, ante uma tradição vigente de repulsa ao infinito atual, Cantor teve a "audácia" de desenvolver com sua teoria toda uma "aritmética" (a Teoria dos Números Transfinitos) para distingüir, comparar e hierarquizar os vários "tamanhos de infinito" que por ele foram descobertos através de seu célebre teorema.[2] Fatos como estes, juntamente com a clarificação das noções fundamentais em Matemática que foi promovida, contribuíram para que a Teoria de Cantor fosse progressivamente aceita. Observamos também que, antes de Cantor, Richard Dedekind e Bernard Bolzano já tinham feito estudos interessantes sobre certas propriedades dos conjuntos infinitos – principalmente com relação à existência de bijeções entre um conjunto infinito e algum de seus subconjuntos próprios.[3]

Contudo, posteriormente percebeu-se que a concepção de conjunto adotada até então era demasiadamente "ingênua",[4] devido à principal maneira de formar conjuntos, que, em essência, utilizava-se do *Princípio da Compreensão* (ou *da Abstração*). Este princípio postula que "dada qualquer propriedade ϕ, a coleção dos objetos (conjuntos) que satisfazem ϕ é um conjunto". O outro princípio básico associado a essa concepção é o *Princípio da Extensionalidade*, o qual declara que "quaisquer dois conjuntos que tenham exatamente os mesmos elementos são iguais" ou, em outras palavras, "um conjunto fica unicamente determinado por seus elementos". Enquanto o da Extensionalidade não foi contestado, pelo menos do ponto de vista da intuição, o da Compreensão mostrou-se insustentável por conduzir a paradoxos (ou antinomias) classificados como lógicos (ou sintáticos), tal como o *Paradoxo de Burali-Forti*.[5]

Ao final do século XIX, foram feitas tentativas de se apresentar os princípios da Teoria dos Conjuntos como sendo princípios puros da Lógica, i.e., como "verdades auto-evidentes" do pensamento dedutivo. O primeiro trabalho nessa direção é devido a Gottlob Frege (1848−1925). Seu trabalho foi publicado em dois volumes, um em 1893 e outro em 1903, nos quais ele indicava como toda a matemática conhecida até a sua época podia ser desenvolvida a partir dos princípios que ele considerava como sendo da Lógica. São justamente eles os Princípios da Compreeensão e da Extensionalidade. Contudo, quando o segundo volume estava prestes a ser publicado, Bertrand Russell (1872−1970) informava a Frege que tinha conseguido derivar uma contradição a partir de seus axiomas (especificamente, a partir do Princípio da Compreensão), a qual ficou conhecida como o *Paradoxo de Russell*.[6] A forma simples e direta com que este paradoxo

---

[2] *O* Teorema de Cantor *afirma que a cardinalidade de um conjunto A é estritamente menor que a do conjunto $\mathcal{P}(A)$, o conjunto de todos os subconjuntos de A. Na linguagem de cardinais, tal desigualdade se escreve na forma $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Precisamente, isto significa que "não existe sobrejeção alguma de A em $\mathcal{P}(A)$", fato que Cantor provou com uso de um notável argumento seu, chamado de argumento diagonal (ou de diagonalização).*

[3] *Sabe-se hoje que essa caracterização dos conjuntos infinitos – "um conjunto é infinito se e somente se possui uma bijeção com alguma parte própria" – necessita fortemente do Axioma da Escolha, ou pelo menos de alguma versão mais fraca desse axioma.*

[4] *O termo* ingênuo*, tradução da palavra francesa* naïve*, é utilizado aqui com as conotações de* pouco cauteloso, descuidado, despreocupado.

[5] *Este paradoxo, que será visto mais adiante no presente artigo, foi descoberto por Cesare Burali-Forti ao observar argumentos conjuntistas que se valiam da coleção de todos os números ordinais. Mesmo tendo sido publicado em 1897, esse paradoxo lógico já era do conhecimento de Cantor dois anos antes.*

[6] *Este paradoxo resulta de se considerar a propriedade "$x \in x$" e afirmar que a coleção de todos os conjuntos x que não a satisfazem é conjunto. Com efeito, admitindo-se o Princípio da Compreensão, existe um conjunto R tal que para todo conjunto x, tem-se que $x \in R$ sse $x \notin x$. Segue claramente disso a contradição: $R \in R$ sse $R \notin R$.*

segue do Princípio da Compreensão frustrou totalmente a tentativa de Frege de se fundamentar a Matemática sobre o tipo de teoria de conjuntos que ele havia proposto. Destaquemos que Cantor já havia observado que algumas coleções, tal como "a coleção de todos os conjuntos"(que origina o *paradoxo de Cantor* quando se supõe que seja um conjunto) tinham de ser consideradas "totalidades inconsistentes" contrapondo-se às "totalidades consistentes", com as quais se pode trabalhar sem o risco de contradições, como por exemplo os conjuntos numéricos (cf. [3], [13]). Com isso, vê-se que Cantor já prenunciava a distinção entre *classes próprias*[7] e conjuntos, a qual seria introduzida posteriormente por John von Neumann em seu artigo de 1925, no qual é apresentada uma axiomatização da Teoria dos Conjuntos que admite classes próprias como objetos legítimos. É interessante observarmos também que existem evidências de que Zermelo tinha ciência do chamado Paradoxo de Russell antes mesmo de Russell (cf. [13]); ele sabia ser contraditório supor que um conjunto tivesse como elementos todos os seus subconjuntos, conforme veremos em breve.

Finalmente, Ernst Zermelo (1871−1953), em um de seus artigos de 1908 (v. [20]), apresentava de fato a primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos. Essa axiomatização baseou-se na idéia de que os paradoxos surgem pelo fato de se admitir coleções demasiadamente "grandes", que é similar a uma idéia que ocorreu a Russell em 1906. Deste modo, Zermelo estava pondo em prática a idéia (anteriormente expressa por Cantor) de "limitar o tamanho" daquelas coleções que seriam conjuntos mediante uma restrição judiciosa do Princípio da Compreensão. A formulação restrita deste princípio é estabelecida na axiomática de Zermelo pelo chamado *Axioma da Separação*, o qual declara essencialmente que: *dada uma propriedade $\phi(x)$ e um conjunto A, se $\phi(x)$ está definida para todo elemento de A, então existe o conjunto B de todos os x em A para os quais $\phi(x)$ é satisfeita*. A notação usual para tal conjunto é $B = \{x \in A : \phi(x)\}$.

Na verdade, o Axioma da Separação é um esquema de axiomas (ou *axioma-esquema*), pois com ele se obtém um axioma para cada propriedade que se considere. Um problema que surge com esse axioma é que em sua formulação usa-se uma noção imprecisa de propriedade, pois não se especifica exatamente quais asserções devam ser consideradas como tal – o que pode levar a paradoxos classificados como semânticos (ou "linguísticos"), tais como o *Paradoxo de Berry*.[8] Paradoxos deste tipo são essencialmente conseqüências das ambigüidades que surgem com o uso impreciso (este muitas vezes inevitável) das chamadas *linguagens naturais*. Observando a ocorrência deste fato na apresentação feita por Zermelo de seu Esquema de Separação, Thoralf Skolem propõe em 1922 que a solução mais adequada para tornar precisa a formulação desse axioma (além dos outros que serão apresentados a seguir) é a especificação prévia de uma linguagem formal para a teoria axiomática de Zermelo. Essencialmente, o que se faz é considerar a linguagem da Lógica de 1ª ordem (também conhecida como "linguagem do Cálculo de Predicados de 1ª ordem"), adicionando-se símbolos relacionais de igualdade ("=") e pertinência ("∈"), e considerando que a noção de "propriedade $\varphi(x)$" se traduz como "fórmula na qual x aparece como variável livre".[9]

[7] *A noção de classe própria será vista mais à frente no presente artigo.*

[8] *Este paradoxo foi proposto por Russell em 1906, que o atribuiu a G. G. Berry, um bibliotecário da Bodleian Library em Oxford. O paradoxo surge quando se define um número natural com n palavras declarando que essa definição não pode ser feita com menos de $n+1$ palavras. Veja o leitor que uma tal definição é auto-referencial.*

[9] *Uma variável é dita* livre *quando não estiver no* escopo *de*

Com essa linguagem formal, podemos agora enunciar de forma precisa os axiomas da Teoria dos Conjuntos:

1. **Axioma da Extensionalidade:**

$$\forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, (\forall \mathbf{z}\, (\mathbf{z} \in \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}) \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}).$$

2. **Axioma da Separação:** Para toda fórmula $\phi(x)$, possivelmente com outras variáveis livres além de x, e nenhuma delas sendo y, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\forall \mathbf{z}\, \exists\, \mathbf{y}\, \forall \mathbf{x}\, (\mathbf{x} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{z} \wedge \phi(\mathbf{x})).$$

Apenas com os dois axiomas dados já obtemos conseqüências profundas. Para ilustrar o ”poder” do Esquema de Separação, vejamos suas conseqüências imediatas: o Paradoxo de Russell é impedido e mostra-se que não existe um “conjunto-universo” – o qual seria o conjunto de todos os conjuntos.

Teorema 1.1 (Zermelo, 1908 [20]). *Valem as seguintes asserções:*

(i) $\neg\, \exists\, z\, \forall\, x\, (x \in z \leftrightarrow x \notin x)$.

(ii) $\neg\, \exists\, z\, \forall\, x\, (x \in z)$.

Demonstração: O item (i) é essencialmente o Paradoxo de Russell, mas agora, argumentando sintaticamente, somos levados à conclusão de que o objeto descrito por Russell, $R = \{x : x \notin x\}$, *não pode ser* um conjunto, pois ele nos leva a uma contradição! Intuitiva e semanticamente falando, o que nos “tranqüiliza” é a observação que tal objeto não cumpre as condições de construção prescritas pelo Esquema de Separação: ele não foi “separado” de nenhum outro conjunto pré-existente. Como ele não se constitui como conjunto, o Paradoxo de Russell não se estabelece, pois não faz mais sentido considerar a pergunta “$R \in R$?”, já que tal pergunta só pode ser feita para *conjuntos*.

Para o item (ii), o argumento de Zermelo é “construtivo”: dado um conjunto z arbitrário, podemos exibir um conjunto que não é elemento de z, o que mostra que o conjunto arbitrário z não pode ser o conjunto-universo. Na verdade, podemos dizer mais: *dado um conjunto z, existe um subconjunto de z que não é elemento de z.* De fato, basta usar o Esquema de Separação e considerar o conjunto $w = \{x \in z : x \notin x\}$.

É fácil agora usar argumentos do mesmo tipo que do Paradoxo de Russell e verificar que $w \notin w$ e $w \notin z$. ■

Uma outra maneira interessante de demonstrar o item (ii) do teorema anterior é a seguinte: supondo que existisse um conjunto-universo z, poderíamos aplicar o Esquema de Separação para z e a propriedade “$x \notin x$” e concluiríamos que $\{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ é um conjunto – contradizendo o item (i)!

O leitor já deve ter observado que o Axioma da Separação limita a formação de conjuntos a outros que têm de ser dados a priori e, por este motivo, só é eficaz se for possível garantir a existência de uma quantidade razoável de conjuntos para que se possa começar a desenvolver alguma teoria. Com este propósito, são introduzidos os seguintes axiomas de existência:

3. **Axioma do Vazio:**

$$\exists\, \mathbf{y}\, \forall \mathbf{x}\, (\mathbf{x} \notin \mathbf{y}).$$

Pelo Axioma 1 tem-se que um tal y é único – sendo usualmente denotado pelo símbolo $\emptyset$ e chamado de conjunto vazio.

É interessante observarmos que, na presença do Esquema de Separação, o Axioma 3 é equivalente à

quantificador algum que ocorra na fórmula (i.e., não sofre a ação de tais quantificadores). Por exemplo, na fórmula $\exists\, x\, (y \in x)$ apenas a variável y é livre. Já na fórmula $\exists\, y\, \forall x\, (x \notin y)$ nenhuma das variáveis é livre.

asserção "existe pelo menos um conjunto x" (em alguns textos, chamado de "Axioma da Existência"). De fato: supondo a existência de pelo menos um conjunto x, é fácil construir o conjunto $\{y \in x : y \neq y\}$, o qual verifica-se que não tem elementos – e assim construímos o conjunto $\emptyset$ aplicando o Esquema de Separação em x.

4. Axioma do Par:

$$\forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, \exists\, \mathbf{z}\, \forall \mathbf{w}\, (\mathbf{w} \in \mathbf{z} \leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{x} \vee \mathbf{w} = \mathbf{y}).$$

Do Axioma 1 segue que, para x e y fixados, um tal z é único – sendo usualmente denotado por $\{x, y\}$. Para cada x, representa-se $\{x, x\}$ simplesmente por $\{x\}$, como é usual.

5. Axioma da União:

$$\forall \mathbf{x}\, \exists\, \mathbf{y}\, \forall \mathbf{z}\, (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \exists\, \mathbf{w} (\mathbf{z} \in \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} \in \mathbf{x})).$$

Do Axioma 1 segue que, para cada x fixado, um tal y é único – sendo usualmente denotado por $\bigcup x$. Além disso, para cada z e w, é usual representar $\bigcup\{z, w\}$ por $z \cup w$. Para cada x, $S(x)$ representa $x \cup \{x\}$.

6. Axioma do Infinito:

$$\exists\, \mathbf{x}\, (\emptyset \in \mathbf{x} \wedge \forall \mathbf{y}\, (\mathbf{y} \in \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{y}) \in \mathbf{x})).$$

Este axioma garante a existência de um conjunto infinito (que, além disso, é "indutivo") com o qual é possível construir o conjunto dos números naturais, este último denotado por ω.

7. Axioma das Partes:

$$\forall \mathbf{x}\, \exists\, \mathbf{y}\, \forall \mathbf{z}\, (\mathbf{z} \subseteq \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}).$$

Neste enunciado, para cada x e z, a notação $z \subseteq x$ abrevia $\forall w\, (w \in z \rightarrow w \in x)$, o que vem a ser a definição formal da relação "z é subconjunto de x". Pelo Axioma 1 tem-se que, para cada x fixado, um tal y é único – sendo usualmente indicado pela notação $\mathcal{P}(x)$ (lê-se "conjunto das partes de x").

Em 1922, Abraham Fraenkel e Skolem (independentemente) propuseram um novo axioma-esquema, denominado *Esquema de Substituição*, cujo enunciado afirma que para todo conjunto w e para toda fórmula $\phi(x, y)$ que tenha caráter funcional em w (i.e., para cada $x \in w$, existe um único conjunto y tal que $\phi(x, y)$ é satisfeita), é possível formar o conjunto de todos os y que satisfazem $\phi(x, y)$ para algum $x \in w$. Mais precisamente, temos o

8. Axioma da Substituição: Para toda fórmula $\phi(x, y)$, possivelmente com outras variáveis livres além de x e y, e nenhuma delas sendo z, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\begin{aligned}&\forall \mathbf{w}\, (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{w}\, \exists!\, \mathbf{y}\, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\\ &\qquad \rightarrow \exists\, \mathbf{z}\, \forall \mathbf{y}\, (\mathbf{y} \in \mathbf{z} \leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{w}\, (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))).\end{aligned}$$

Intuitivamente, o que o Esquema de Substituição afirma é que "a imagem de um conjunto por uma função também deve ser um conjunto"; ele é utilizado, porém, quando não temos pré-especificado um contradomínio natural para "separar" o conjunto-imagem! Tanto Fraenkel quanto Skolem observaram que sem o Axioma 8 não se pode garantir a existência de um conjunto com cardinalidade $\aleph_\omega$. Observamos que, na presença do Axioma 3, o Axioma 2 é conseqüência do Axioma 8.

A essa lista de axiomas ainda se inclui o chamado *Axioma da Fundação*, também conhecido como *Axioma da Regularidade*, que afirma que "todo conjunto não-vazio possui um elemento $\in$-minimal", i.e., se $x \neq \emptyset$ então existe $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$. Em linguagem formal, temos:

9. Axioma da Regularidade:

$$\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{x} \neq \emptyset \rightarrow \exists\, \mathbf{y}\, (\mathbf{y} \in \mathbf{x} \wedge \neg \exists\, \mathbf{z}\, (\mathbf{z} \in \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} \in \mathbf{y}))).$$

Este axioma aparece em um trabalho de Zermelo de 1930 e baseia-se em idéias anteriores de von Neumann em seu artigo de 1925 (onde o axioma aparece explicitamente) e de Dimitry Mirimanoff em seu artigo de 1917 (onde o axioma aparece de forma implícita) (cf. [3]). É um axioma técnico, estrutural, irrelevante para as aplicações matemáticas "standard", cuja finalidade mais óbvia é impedir que ocorram certas patologias, tais como $x = \{x\}$, $x \in x$ e $x \in y \in x$, etc. Prova-se ainda que, na presença do Axioma da Regularidade, os conjuntos ficam organizados em níveis "hierárquicos cumulativos" que são obtidos por iteração "transfinita" das operações $\mathcal{P}$ de partes e $\bigcup$ de união, de tal maneira que todo conjunto pertença a algum desses níveis.

Exercício. *Mostre que o Axioma da Regularidade impede a ocorrência das chamadas "circularidades" $x \in x$, $x \in y \in x$, $x \in y \in z \in x$, etc. (Sugestão: Aplique o Axioma da Regularidade a $\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}$, etc.)*

Chamamos de Axiomática **ZF** (de Zermelo-Fraenkel) o sistema formado pelos axiomas 1 até 9. Nas subseções a seguir sempre iremos considerar a Axiomática **ZF** como sendo esta última lista de axiomas. Além disso, a Teoria **ZF** é definida como a teoria resultante da Axiomática **ZF**.

Dentre os axiomas introduzidos por Zermelo em 1908, aquele que levantou maiores problemas conceituais foi, sem dúvida nenhuma, o seu famoso *Axioma da Escolha*. Este é um axioma polêmico devido justamente ao seu caráter inerentemente *não-construtivo*, pois ele garante ao matemático a possibilidade de fazer infinitas escolhas arbitrárias – o que não pode ser demonstrado por processos construtivos e finitísticos de prova! Intuitivamente, o Axioma da Escolha afirma que, dada uma família infinita de conjuntos não-vazios, podemos formar um conjunto "escolhendo" exatamente um elemento de cada um dos conjuntos não-vazios da família. Apresentaremos mais adiante um enunciado preciso do Axioma da Escolha.

Cabe aqui esclarecermos o que entendemos por "infinitas escolhas arbitrárias", e para tanto usaremos um célebre exemplo alegórico, introduzido por Russell. Imagine o leitor que desejemos, dada uma família infinita de *pares de sapatos*, escolher exatamente um sapato de cada par. Para isto, não é necessário o uso de escolhas arbitrárias, pois podemos estabelecer uma regra de escolha bastante específica: por exemplo, podemos tomar, em cada par, sempre o sapato correspondente ao pé esquerdo! O mesmo não ocorre se considerarmos uma família infinita de *pares de meias*: em um par de meias, cada meia é indistingüível da outra, e assim, para escolhermos exatamente uma meia de cada par, somos obrigados a fazer infinitas escolhas arbitrárias! Logo, o Axioma da Escolha não é necessário para a situação com infinitos pares de sapatos – mas é necessário para o caso com infinitos pares de meias.

Matemáticos franceses como Borel, Baire e Lebesgue se posicionaram contra o Axioma da Escolha – apesar deles próprios terem utilizado infinitas escolhas arbitrárias em seus trabalhos. Já italianos como Peano e Levi identificavam perfeitamente a necessidade de se realizar escolhas infinitas em determinados argumentos, mas acreditavam ser sempre necessário o uso de alguma regra específica de escolha – eles não se sentiam nada confortáveis com escolhas arbitrárias, e se opunham a isso explicitamente. Em muitas situações envolvendo os números reais, a existência de máximos e mínimos para subconjuntos compactos facilita bastante a introdução de regras específicas de escolha em alguns argumentos. No entanto, existem situações em que se sabe que as escolhas arbitrárias não podem ser evitadas – por exemplo, a asserção "a reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável" depende fortemente do Axioma da

Escolha (ou pelo menos do chamado *Axioma da Escolha Enumerável*, versão restrita do Axioma da Escolha para famílias enumeráveis de conjuntos não-vazios). De fato, existem modelos de **ZF** nos quais $\mathbb{R}$ pode ser escrito como reunião enumerável de conjuntos enumeráveis! Para todas as afirmações e resultados descritos neste parágrafo, indicamos [13] para a obtenção de referências aos trabalhos originais.

Quando se inclui o Axioma da Escolha na axiomática de uma teoria de conjuntos, é costume notacional juntar à direita da sigla dessa axiomática a letra **C** (do inglês *choice*). Assim sendo, **ZFC** é a Axiomática **ZF** acrescida do Axioma da Escolha. Naturalmente, a Teoria **ZFC** fica definida como a teoria resultante da Axiomática **ZFC**.

Nas próximas seções, apresentaremos todo o instrumental necessário para apresentarmos demonstrações de equivalência entre **(AC)** e proposições clássicas da matemática. As noções de ordem, boa ordem, indução e recursão serão essenciais.

2. Boa ordenação, indução e recursão

Nesta seção, relações e funções são, como é usual em textos axiomáticos de Teoria dos Conjuntos, entendidos como conjuntos cujos elementos são pares ordenados (com xRy denotando $\langle x, y\rangle \in R$, se R é relação, e $y = f(x)$ denotando $\langle x, y\rangle \in f$, se f é função; "R é relação sobre A" significa simplesmente que $R \subseteq A \times A$). Usaremos as convenções de escrita padronizadas em [8] e [11].[10]

Ordem, Boa Ordem e Ordinais

Nesta subseção, $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ denota sempre um *conjunto parcialmente ordenado* (i.e., $\mathbb{P}$ é um conjunto e $\leqslant$ é uma ordem parcial, i.e., uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica sobre $\mathbb{P}$)[11]. Às vezes abusamos da linguagem e chamamos o par $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$, ou o próprio conjunto $\mathbb{P}$, de ordem parcial. Nessas condições, sabe-se que a ordem parcial estrita $<$ (definida da maneira óbvia) é irreflexiva e transitiva (e, portanto, assimétrica). Se uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é tal que para quaisquer $x, y \in \mathbb{P}$ vale $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, então diremos que $\leqslant$ é *ordem total* e $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é um *conjunto totalmente ordenado*, situação na qual $<$ é tricotômica.

Um exemplo importante da definição de ordem parcial é a relação de inclusão entre conjuntos $\subseteq$. A *inclusão estrita*, que será sempre denotada neste texto por $\subset$, é, portanto, um exemplo de ordem parcial estrita.

Suporemos conhecidas as noções de *ordem induzida para subconjuntos de* $\mathbb{P}$, *limitantes inferiores e superiores*, *supremos e ínfimos*, *elementos maximais e minimais* e *elementos máximos e mínimos*. Uma *cadeia* numa ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathbb{P}$ (i.e., um subconjunto de $\mathbb{P}$ no qual a ordem induzida é uma ordem total).

Uma ordem parcial $\leqslant$ sobre um conjunto $\mathbb{P}$ é dita uma *boa ordem* se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{P}$ possui um elemento mínimo. Diremos nessa situação que $\leqslant$ *bem-ordena* $\mathbb{P}$, ou que $\mathbb{P}$ é bem-ordenado por $\leqslant$. Note que se $\leqslant$ é uma boa ordem, então $<$ é uma ordem total estrita: se $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é uma boa ordem e x, y são elementos distintos de $\mathbb{P}$, então $\{x, y\}$ possui elemento mínimo m. Conforme $m = x$ ou $m = y$, teremos respectivamente $x < y$ ou $y < x$.

[10] *[8] e [11] são livros avançados de Teoria dos Conjuntos e são utilizados principalmente em cursos de pós-graduação. Como referências mais básicas, sugerimos [3] e [7].*

[11] *No que segue, x, y e z denotam elementos de $\mathbb{P}$. Uma relação R sobre $\mathbb{P}$ é:* reflexiva *se xRx para todo x;* irreflexiva *se $\neg(xRx)$ para todo x;* transitiva *se xRy e yRz implicam xRz;* anti-simétrica *se xRy e yRx implicam $x = y$; e é* assimétrica *se xRy implica $\neg(yRx)$. R será dita* tricotômica *se, para quaisquer x e y, vale uma e somente uma entre xRy, $x = y$ e yRx; note que se R é tricotômica então R é irreflexiva e assimétrica (e, se for também transitiva, será uma ordem total estrita).*

Sejam $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ e $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$ ordens parciais estritas. Se existir uma bijeção $f : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{P}_1\,(x <_1 y \leftrightarrow f(x) <_2 f(y))$, diremos que $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ é *isomorfo* a $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$ (ou, que ambos são *isomorfos*) e escreveremos $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle \cong \langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$. Chamaremos tal f de um *isomorfismo* de $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ em $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$ (ou, entre um e outro).

Introduziremos agora uma das importantes noções conjuntistas: a de *ordinal*. A Teoria dos Ordinais de von Neumann pode ser desenvolvida utilizando-se a axiomática restrita denominada **ZF**$^-$, composta pelos Axiomas 1 até 8 (ou seja, **ZF**$^-$ é a axiomática que se obtém de **ZF** "deletando-se" o Axioma da Regularidade). Destaquemos aqui o papel crucial que cumpre o Axioma do Infinito: sem ele, não poderíamos garantir a existência do conjunto ω dos números naturais – ou, mais geralmente, garantir a existência dos chamados *ordinais limite*. Na verdade, sem este axioma não podemos mostrar que existe um conjunto infinito, já que não é difícil construir um modelo de **ZFC** $-$ Axioma do Infinito $+$ "Todos os conjuntos são finitos".[12]

Definição 2.1.

(i) *Um conjunto a é dito **transitivo** se*

$$\forall x\, \forall y\, ((y \in x \wedge x \in a) \rightarrow y \in a).$$

(ii) *Um conjunto a é dito um **ordinal** se for transitivo e bem-ordenado por $\in$.*

No item (ii) da definição anterior, o que se quer dizer com "a é bem-ordenado por $\in$" é que a relação de pertinência restrita a a (denotada usualmente por $\in_a$) se comporta como uma ordem total estrita na qual todo subconjunto não-vazio possui elemento mínimo.

[12] *Este é o sistema axiomático que se obtém de **ZFC** trocando-se o Axioma do Infinito pela asserção "todos os conjuntos são finitos" e mantendo-se todos os demais axiomas.*

É claro que $\emptyset$ é ordinal, pois, por vacuidade, é transitivo e bem ordenado por $\in_\emptyset = \emptyset$. Facilmente conclui-se que $\{\emptyset\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ são também ordinais. No entanto, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ não é ordinal, mesmo sendo transitivo, já que $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$. Dado um ordinal a, a expressão $a \cong \langle \mathbb{P}, < \rangle$ indicará que $\langle a, \in_a \rangle \cong \langle \mathbb{P}, < \rangle$, para $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ uma boa ordem estrita – ou seja, a relação de ordem $\in_a$ no ordinal a ficará subentendida, o mesmo valendo nos casos de considerarmos supremos, ínfimos, máximos, mínimos, etc.

Os dois teoremas a seguir apresentam as principais propriedades dos ordinais, as quais mostram que estes, de forma satisfatória, cumprem o papel que lhes foi atribuído historicamente: o de *representantes canônicos* das boas ordens. Omitiremos a demonstração do seguinte resultado, a qual pode ser obtida em nossas referências principais.

Teorema 2.2. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se x é um ordinal e $y \in x$, então y é um ordinal e $y = \{z \in x : z \in y\}$. Conseqüentemente, um ordinal pode ser escrito como o conjunto dos ordinais que o precedem segundo a ordem definida por $\in$, i.e., se x é ordinal então $x = \{y \in x : y \text{ é ordinal}\}$.*

(ii) *Se x e y são ordinais tais que $x \cong y$, então $x = y$.*

(iii) *Para quaisquer ordinais x e y vale uma, e somente uma, das seguintes asserções : $x \in y$, $x = y$, $y \in x$. Conseqüentemente,*
$\forall x\, ((x \neq \emptyset \wedge x \text{ é ordinal}) \longrightarrow \emptyset \in x)$.

(iv) *Se x, y e z são ordinais tais que $x \in y$ e $y \in z$, então $x \in z$.*

(v) *Para quaisquer ordinais x e y tem-se que: $x \subseteq y \longleftrightarrow (x \in y \vee x = y)$ ou, equivalentemente, entre os ordinais a inclusão estrita "$\subset$" coincide com a pertinência "$\in$".*

(vi) *Se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ é um conjunto de ordinais (i.e., para cada*

$x \in \mathcal{C}$ *tem-se que x é ordinal), então* $\bigcap \mathcal{C}$ *é um ordinal,* $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{C}$ *e, mais ainda,* $\bigcap \mathcal{C} = \min(\mathcal{C})$.

(vii) *Se* $\mathcal{C}$ *é um conjunto de ordinais, então* $\bigcup \mathcal{C}$ *é um ordinal e, mais ainda,* $\bigcup \mathcal{C} = \sup(\mathcal{C})$. *Em particular, se* $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$, *então* $\bigcup \mathcal{C} = \max(\mathcal{C})$.

Corolário 2.3. *Seja* a *um conjunto de ordinais. Se* a *é transitivo, então* a *é ordinal.*

De fato, os itens (iii) e (iv) do teorema anterior garantem que $\in$ é uma ordem total estrita em qualquer conjunto de ordinais, e (vi) garante que $\in$ é uma boa ordem estrita.

Corolário 2.4. *Vale a seguinte asserção:*

$$\neg \exists z \forall x\, (x \text{ é ordinal} \to x \in z).$$

Em outras palavras, está sendo dito que não existe um conjunto z tal que todos os ordinais sejam elementos de z. De fato: suponha, por absurdo, que exista um tal conjunto z. Pelo Esquema de Separação (e pelo Axioma da Extensionalidade), obtém-se então o conjunto de todos os ordinais, digamos $On = \{x \in z : x \text{ é } ordinal\} = \{x : x \text{ é } ordinal\}$. Como conseqüência imediata do item (i) do Teorema 2.2, segue que On é transitivo. Assim, pelo corolário anterior, conclui-se que On é ordinal. Portanto, tem-se que $On \in On$, o que é um absurdo pois contradiz a tricotomia entre os ordinais (item (iii) do Teorema 2.2).

O corolário anterior mostra que em **ZF** (logo em **ZFC**) fica impedida a ocorrência do já mencionado Paradoxo de Burali-Forti: este matemático italiano havia observado que se On fosse conjunto teríamos a contradição $On \in On$. Como On não constitui um conjunto, não há mais contradição alguma. Destaquemos também que a coleção de todos os ordinais constitui um exemplo clássico do que chamaremos de *classe própria*, conforme será explicado mais adiante.

Exercício. *Convença-se que não é necessário o Axioma da Regularidade para evitar a ocorrência de "$x \in x$", se x é ordinal. Idem para $x \in y \in x$, $x \in y \in z \in x$, etc., no caso de todos os conjuntos envolvidos serem ordinais.*

Voltando aos nossos objetivos, apresentemos agora o mais importante dos resultados desta subseção, o qual estabelece que para toda boa ordem existe um ordinal que a representa de forma única. Este resultado é enunciado de maneira mais precisa no teorema a seguir:

Teorema 2.5. *Seja* $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ *uma boa ordem estrita. Então, existe um único ordinal* a *tal que* $\langle \mathbb{P}, < \rangle \cong a$.

Omitiremos também a demonstração deste último teorema, mas observamos que este é um dos resultados da Teoria dos Conjuntos onde a utilização do Esquema de Substituição ocorre de maneira mais crucial. A validade do teorema anterior nos fornece a justificativa para se estabelecer a seguinte

Definição 2.6. *Seja* $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ *uma boa ordem estrita. Chamaremos o único ordinal* a *tal que* $\langle \mathbb{P}, < \rangle \cong a$ *de* ***tipo de ordem*** *de* $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ *e o denotaremos por* $\mathrm{t.o.}(\mathbb{P}, <)$.

Ou seja, o Axioma da Substituição é essencial para se poder definir "tipo de ordem". A noção de tipo de ordem formaliza o comentário que fizemos anteriormente: de fato, os ordinais podem ser considerados como sendo os representantes canônicos das boas ordens.

Observamos que, se existir um isomorfismo entre duas boas ordens estritas dadas, então este será único (Lema 6.2 de [11]). Conseqüentemente, para uma boa ordem estrita e para o único ordinal que lhe é isomorfo, é também único o isomorfismo existente entre eles.

De agora em diante, iremos usar as letras gregas minúsculas α, β, γ, δ, ζ, η, ξ, ... para designar ordinais. Além disso, como $\in$ define uma ordem estrita sobre qualquer conjunto de ordinais, escreveremos usualmente $\alpha < \beta$ para significar $\alpha \in \beta$ e, naturalmente, $\alpha \leqslant \beta$ para denotar $(\alpha < \beta \vee \alpha = \beta)$. Como para um dado ordinal α vale que $\alpha = \{x \in \alpha : x$ é *ordinal*$\}$ (pelo item (i) do Teorema 2.2), podemos escrever simplesmente $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

Não iremos definir aqui a chamada *aritmética ordinal*, mas podemos descrever algumas de suas propriedades, omitindo as demonstrações. A aritmética ordinal é definida de modo a estender a aritmética dos chamados *números naturais*, que, para a Teoria dos Conjuntos, são objetos bastante específicos.

Se α é um ordinal, então $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ é um ordinal, chamado de o *ordinal sucessor* de α. $S(\alpha)$ é o menor ordinal que é estritamente maior do que α, e na aritmética ordinal ele é denotado exatamente como $\alpha + 1$!

Diremos que um ordinal α é um *ordinal sucessor* se $\exists \beta\, (\alpha = S(\beta))$. α é dito um *ordinal limite* se $\alpha \neq \emptyset$ e α não é ordinal sucessor.

Cabe aqui comentar rapidamente que o Esquema da Substituição também é imprescindível para construir ordinais limites estritamente maiores que o conjunto ω dos números naturais, tal como o ordinal de von Neumann $\omega + \omega$ (cf. [5]). De fato, $\omega + \omega$ é definido como sendo o *tipo de ordem* do conjunto $(\omega \times \{0\}) \cup (\omega \times \{1\})$, bem-ordenado da maneira "óbvia" (na qual $\omega \times \{0\}$ é um segmento inicial).

Já podemos descrever quem são os chamados *números naturais de von Neumann*. Teremos $0 = \emptyset$, $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$, $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$, $4 = S(3) = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $5 = S(4) = 4 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, etc.

Note que podemos escrever $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in 4 \in 5 \in \ldots$, ou ainda $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 4 \subset 5 \subset \ldots$ Ambas as situações refletem o que desejamos, i.e., $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$

Mais formalmente, podemos dizer que um ordinal α é um *número natural* sse $\forall \beta \leqslant \alpha\, (\beta = 0 \vee \beta$ é ordinal sucessor$)$ – ou seja, os números naturais são exatamente os ordinais que não são maiores ou iguais a algum ordinal limite! E o menor ordinal limite é exatamente $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais![13]

Intuitivamente, os números naturais são os ordinais obtidos a partir de 0 aplicando-se a operação de sucessor S um número finito de vezes. Formalmente, a noção de *finitude* não foi definida neste texto, mas podemos estabelecê-la através da noção de número natural (veja as nossas referências principais; essencialmente, um conjunto é finito se existir uma bijeção entre esse conjunto e um certo número natural).

Perceba o cuidado que temos que tomar com nossas definições: se quiséssemos definir os números naturais a partir da noção de finitude, formalizando a intuição descrita no início deste parágrafo, então não poderíamos usar os números naturais para definir essa mesma noção – pois isso seria obviamente um argumento circular! O usual é definir-se os números naturais primeiro, e partir deles definir a noção de finitude.

Iremos denotar os números naturais pelas letras minúsculas latinas k, l, m, n, etc, como usualmente se faz.

Os números naturais de von Neumann satisfazem os chamados *Axiomas de Peano*; não entraremos nestes detalhes aqui, mas observamos que, para a Lógica e para a Ciência da Computação, o conceito de "conjunto dos números naturais" fica reduzido a "estrutura que satisfaz a Axiomática de Peano".

Dentre os Axiomas de Peano, consta o chamado *Princípio da Indução Finita*:

$$\forall X \subseteq \omega\, (0 \in X \wedge \forall n \in X\, (S(n) \in X) \to X = \omega).$$

[13] *Uma maneira cômoda de definir o conjunto ω dos números naturais é caracterizá-lo como sendo a "intersecção de todos os conjuntos indutivos", o que pode ser feito facilmente a partir dos Axiomas do Infinito e da Separação.*

É um interessante exercício, em qualquer curso de álgebra em nível de graduação, mostrar a equivalência, em $\mathbb{N}$ (onde $\mathbb{N}$ é o conjunto "ingênuo" dos números naturais), entre o chamado "Princípio da Boa Ordem" (que diz que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ possui um elemento mínimo) e as formas usuais de indução finita (com passos de indução "$P(k) \implies P(k+1)$" e "$P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots \wedge P(k) \implies P(k+1)$", conforme o caso). Tal equivalência pode ser generalizada, i.e., uma ordem total com elemento mínimo é uma boa ordem se e somente se satisfaz esquemas de indução.

Indução e Recursão Transfinita

Vamos introduzir a definição de α-seqüência e fazer um breve comentário a respeito da noção de classe, que será feito com o objetivo de simplificar os enunciados dos Teoremas de Indução e de Recursão Transfinita. Sejam α um ordinal e s uma função com $dom(s) = \alpha$. Nessas condições, diremos que s é uma *seqüência de comprimento* α ou, simplesmente, uma α-*seqüência*. Para cada $\xi < \alpha$, usualmente denotaremos $s(\xi)$ por s_ξ e escreveremos $s = \langle s_\xi : \xi < \alpha \rangle$. Diremos que uma α-seqüência injetora s é uma *enumeração* de sua imagem $im(s) = \{s_\xi : \xi < \alpha\}$. Em particular, se uma α-seqüência $s : \alpha \longrightarrow A$ é bijetora, então s é dita uma enumeração de $A = \{s_\xi : \xi < \alpha\}$. O fato mais importante que relaciona boas ordens e enumerações é a seguinte

Observação 2.7. *Um conjunto x pode ser bem-ordenado se, e somente se, existe uma enumeração de x.*

De fato: observe que se $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ é uma boa ordem e $\alpha = \text{t.o.}(\mathbb{P}, <)$ o seu tipo de ordem, então o único isomorfismo $p : \alpha \longrightarrow \mathbb{P}$ é, claramente, uma α-seqüência. Portanto, $p = \langle p_\xi : \xi < \alpha \rangle$ é, por ser bijeção, uma enumeração de $\mathbb{P} = im(p) = \{p_\xi : \xi < \alpha\}$, a qual chamaremos de a enumeração *canônica* de $\mathbb{P}$. Reciprocamente, se uma α-seqüência p é enumeração de um conjunto $\mathbb{P}$ (i.e., $p : \alpha \longrightarrow \mathbb{P}$ é bijetora), verifica-se facilmente que a relação binária $<_\mathbb{P}$ definida por $p_\beta <_\mathbb{P} p_\gamma$ sse $\beta < \gamma < \alpha$ é uma boa ordem estrita sobre $\mathbb{P}$, que $p : \alpha \longrightarrow \mathbb{P}$ é um isomorfismo e que, portanto, $\alpha = \text{t.o.}(\mathbb{P}, <_\mathbb{P})$.

Quanto à noção de classe, embora não seja formalmente estabelecida pelos axiomas da teoria **ZF** (e **ZFC**), a sua introdução é motivada por razões de utilidade prática, pois classes são muito mais simples de manipular do que fórmulas. Informalmente, para cada fórmula $\phi(x)$ iremos chamar de *classe* a coleção de todos os objetos (conjuntos) x que satisfaçam $\phi(x)$, que será denotada por $\{x : \phi(x)\}$ (ou seja, o Princípio da Compreensão "ingênuo" de Frege nos fornece, em geral, classes). Veja que todo conjunto x é uma classe, pois $x = \{y : y \in x\}$.

Todo conjunto é uma classe – mas existem classes que não são conjuntos. Uma classe que não é um conjunto é denominada *classe própria*. Usualmente utilizam-se letras maiúsculas latinas em negrito para denotar classes próprias. Devido ao Teorema 1.1, conclui-se que as classes $\mathbf{R} = \{x : x \notin x\}$ (a *Classe de Russell*) e $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ (a *Classe Universal*) não são conjuntos, sendo exemplos clássicos de classes próprias. É interessante observarmos que podemos considerar $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}$ em $\mathbf{ZF}^-$, mas em **ZF** (com o impedimento de circularidades dado pelo Axioma da Regularidade) necessariamente tem-se $\mathbf{R} = \mathbf{V}$!

Outro exemplo de classe própria, como já foi dito acima, é $\mathbf{ON} = \{x : x \text{ é } \textit{ordinal}\}$ (a *Classe dos Ordinais*). Outra classe própria muito importante para a Teoria dos Conjuntos é $\mathbf{L}$, a *classe dos construtíveis de Gödel*.

Seja $\mathbf{C} = \{x : \phi(x)\}$ uma classe própria. A expressão "$z \in \mathbf{C}$" (que não é uma expressão "oficial" da Teoria dos Conjuntos) deve ser encarada como uma simples abreviatura de "$\phi(z)$". De modo geral, expressões com classes próprias são abreviaturas de fórmulas da linguagem de **ZFC**.

Estamos agora em condições de enunciar, com simplicidade e rigor, o seguinte

Teorema 2.8 (Indução Transfinita sobre **ON**). *Seja* $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{ON}$ *uma classe tal que:*

(i) $0 \in \mathbf{C}$.

(ii) *Para todo* $\alpha > 0$, *se* $\alpha \subset \mathbf{C}$ *então* $\alpha \in \mathbf{C}$.

Então, $\mathbf{C} = \mathbf{ON}$.

A demonstração é simples: suponha por absurdo que valem (i) e (ii) do teorema anterior mas que $\mathbf{C} \neq \mathbf{ON}$. Existe então um ordinal $\beta \in \mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}$, que podemos supor, sem perda de generalidade, ser o mínimo para tal propriedade (note que se β não for o mínimo então $\beta \cap (\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}) \neq \emptyset$ e na argumentação que segue podemos "trocar" β pelo mínimo de $\beta \cap (\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C})$). Mas $\beta \neq 0$, por (i), e por minimalidade tem-se $\beta \subset \mathbf{C}$ – daí teríamos por (ii) que $\beta \in \mathbf{C}$, contradição.

Uma conseqüência importante do teorema anterior é que torna-se possível obter funções-classe[14] definidas por recursão na classe dos ordinais – isto é, de modo que todo ordinal α possua uma imagem bem definida a partir das imagens de todos os ordinais menores que α. Mais precisamente, isso é o que declara o

Teorema 2.9 (Recursão Transfinita sobre **ON**). *Seja* $\mathbf{G} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *uma função-classe. Então, existe uma única função-classe* $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que*

$$\forall\alpha\,(\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)),$$

em que $\mathbf{F} \restriction \alpha = \mathbf{F} \cap (\alpha \times \mathbf{V})$.

[14] *Uma função-classe com "domínio" numa classe* $\mathbf{C}$ *é uma classe* $\mathbf{F}$ *onde os elementos são pares ordenados* $\langle x, y\rangle$ *com* $x \in \mathbf{C}$ *e que "se comporta" como uma função, i.e., se tivermos* $\langle x, y\rangle \in \mathbf{F}$ *e* $\langle x, z\rangle \in \mathbf{F}$ *então* $y = z$.

Não faremos neste texto a prova deste teorema, mas indicamos como fontes para se obtê-la as nossas referências principais. Enunciamos os teoremas de indução e recursão transfinita sobre a classe dos ordinais, porém pode-se facilmente enunciar versões restritas a um ordinal específico – ou, mais geralmente, restritas a qualquer conjunto bem-ordenado.

3. Proposições equivalentes ao Axioma da Escolha

O Axioma da Escolha difere dos outros axiomas de **ZFC** por postular, sob certas condições, a existência de um conjunto (uma função) sem estabelecer uma forma de como construí-lo (ao contrário, por exemplo, dos Axiomas do Par e da União – ou mesmo do Axioma do Infinito!). A polêmica entre os matemáticos a propósito deste axioma é devida justamente ao seu caráter essencialmente não-construtivo, pois permite que escolhas, em número infinito, sejam feitas arbitrariamente – i.e., sem dar qualquer descrição explícita de como fazê-las. As discussões sobre o Axioma da Escolha foram extremamente intensas entre aqueles matemáticos que se posicionavam a seu favor, devido às conseqüências importantes que dele derivam, e aqueles que se posicionavam contra, pois consideravam ilegítima a sua utilização. Apesar da forte oposição inicial feita ao Axioma da Escolha, ele foi pouco a pouco sendo aceito pela maioria dos matemáticos, principalmente por ter sido mostrado que esse axioma era necessário em diversas áreas da Matemática, não somente na Teoria dos Conjuntos, como também, por exemplo, na Topologia, na Álgebra e na Análise Funcional. Ao final dos anos de 1930, **(AC)** veio a se tornar ferramenta matemática padrão na forma do *Lema de Zorn* – um princípio maximal inspirado em vários princípios de mesmo tipo introduzidos pela chamada "escola polonesa" de Sierpiński, Kuratowski e Hausdorff, entre outros.

O Axioma da Escolha foi proposto por Zermelo originalmente em seu artigo de 1904 (v. [18]) como pré-requisito para demonstração da asserção, conjecturada anos antes por Cantor, de que "todo conjunto pode ser bem ordenado", a qual chamamos de *Teorema da Boa Ordem*. Posteriormente, em seus artigos de 1908 (v. [19], [20]), Zermelo apresentava uma versão de seu axioma que é essencialmente a mesma que adotamos no presente texto e que se revelou bastante útil para a descrição de versões mais fracas desse axioma (cf. [13]).

Em 1938, Kurt Gödel demonstra a consistência do Axioma da Escolha *relativa* aos axiomas de **ZF**, i.e., ficou estabelecido que se **ZF** não deriva contradições, então adicionando o Axioma da Escolha aos axiomas de **ZF** continuaremos sem derivar contradições. Em 1963, Paul Cohen prova a independência do Axioma da Escolha relativa aos axiomas de **ZF**, i.e., ficou estabelecido que este axioma e a sua negação não são demonstráveis a partir dos axiomas de **ZF**, ou seja, que ambos não são teoremas de **ZF**. Para a obtenção de referências aos trabalhos originais de Gödel e Cohen, indicamos o livro de Paul Cohen que descreve a sua construção ([2])[15].

É claro que os resultados de Gödel e Cohen, tais como quaisquer resultados de consistência relativa, só fazem sentido se for admitido que **ZF** é *consistente*, i.e., que a partir de seus axiomas não se possa obter uma contradição.[16]

[15] *Cohen anunciou o seu resultado em um artigo de apenas cinco páginas em 1963. Seu livro [2], publicado em 1966, apresentou os detalhes de sua construção – e do método por ele inventado para demonstrar o seu resultado, o chamado método de forcing.*

[16] *Um célebre resultado de Gödel – o Segundo Teorema da Incompletude – nos garante que teorias consistentes que contenham a aritmética não podem provar a sua própria consistência. Em particular, assumir a consistência de **ZF** é um "ato de fé", realizado diariamente por qualquer matemático!*

Existem várias formulações conjuntistas para o Axioma da Escolha, mas preferimos para este texto aquela que estabelece a existência de uma *função-escolha* para certos conjuntos, que será enunciada de forma mais precisa na subseção a seguir. Para isso, precisaremos da seguinte

Definição 3.1. *Seja X um conjunto. Diremos que uma função $f : X \longrightarrow \bigcup X$ é uma **função-escolha** para X se $f(x) \in x$, para todo $x \in X$.*

Exemplos 3.2.
(i) Seja Y um conjunto. Considere $X = \{\{y\} : y \in Y\}$. É imediato ver que $f = \{\langle\{y\}, y\rangle : y \in Y\}$ é uma função-escolha para X. Neste caso, claramente vemos que é a única que podemos obter. Apesar de ser um exemplo muito trivial, o mesmo nos mostra que há casos em que não é preciso fazer escolhas arbitrárias para se eleger um elemento de cada conjunto pertencente a uma família (conjunto) de conjuntos não-vazios dada. Observe que tanto a existência de X quanto a de f podem ser garantidas formalmente em **ZF**.
(ii) Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\omega)$ é uma família de subconjuntos não-vazios de ω, então $\mathcal{F}$ possui uma função-escolha naturalmente: definimos $f : \mathcal{F} \longrightarrow \omega$ pondo $f(x) = \min(x)$ para todo $x \in \mathcal{F}$. Note que a boa ordenação em ω garante que essa função está bem definida. Note ainda que em lugar de ω poderia se ter qualquer outro conjunto bem ordenado.

O Teorema da Boa Ordem e o Lema de Zorn: a equivalência com o Axioma da Escolha

Nossa meta agora é estabelecer a equivalência lógica entre o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordem e o Lema de Zorn, cujos respectivos enunciados que consideramos aqui são os apresentados a seguir. Cabe uma observação: é tradicional em matemática o uso da palavra *família* para designar o que se imagina intuitivamente que sejam "conjuntos de conjuntos" – porém, para a Teoria dos Conjuntos, qualquer conjunto é um conjunto de conjuntos! Assim, quando utilizamos a palavra "família", trata-se apenas de um sinônimo para "conjunto".

(AC) Axioma da Escolha:

Toda família cujos elementos são conjuntos não-vazios possui uma função-escolha.

(WO) Teorema da Boa Ordem de Zermelo:

Todo conjunto pode ser bem ordenado.

(ZL) Lema de Kuratowski-Zorn:

Seja $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ uma ordem parcial não-vazia (i.e, com $\mathbb{P} \neq \emptyset$). Se toda cadeia em $\mathbb{P}$ possui um limitante superior, então $\mathbb{P}$ possui um elemento maximal.

Podemos agora apresentar a nossa redação para as equivalências entre as três asserções acima.

Teorema 3.3. *Valem as seguintes equivalências:*

$$\textbf{(AC)} \Longleftrightarrow \textbf{(WO)} \Longleftrightarrow \textbf{(ZL)}.$$

Demonstração:

(AC)$\Longrightarrow$(WO): Seja X um conjunto qualquer. Para provar que existe uma boa ordem sobre X, é suficiente, pela Observação 2.7, exibir uma enumeração de X. É claro que se $X = \emptyset$, nada precisa ser feito. Caso contrário, seja, por conseqüência de **(AC)**, $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ uma função-escolha para $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Segue do Teorema 2.9 que existe uma (única) função-classe $\mathbf{F}$ definida em $\mathbf{ON}$ tal que $x_0 = \mathbf{F}(0) = f(X)$ e, para todo $\alpha > 0$,

$$x_\alpha = \mathbf{F}(\alpha) = \\ = \begin{cases} f(X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\}), \text{se } X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \neq \emptyset. \\ \qquad x_0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha, por absurdo, que $X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \neq \emptyset$, para todo $\alpha > 0$. Então, teremos que $x_\alpha = f(X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\}) \in X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq X$, para todo $\alpha > 0$. Como $x_0 = f(X) \in X$, iremos concluir que para todo $\alpha \in \mathbf{ON}$ tem-se $x_\alpha \in X$. Assim sendo, do Esquema de Separação seguirá que $Y = \{y \in X : \exists\, \alpha\, (\alpha \in \mathbf{ON} \wedge x_\alpha = y)\} = \{x_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$ é um conjunto. Além disso, se $\beta < \gamma$, então pela definição de $\mathbf{F}$ concluiremos que $x_\beta \neq x_\gamma$. Com isso, para todo $y \in Y$, existirá um único α tal que $\alpha \in \mathbf{ON}$ e $x_\alpha = y$. Segue, portanto, do Esquema de Substituição (e de Separação) que $\{\alpha \in \mathbf{ON} : \exists\, y \in Y\, (x_\alpha = y)\} = \{\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\} = \mathbf{ON}$ é um conjunto, em contradição com o Corolário 2.4. Conseqüentemente, existe $\alpha > 0$ tal que $X = \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Agora, seja β o menor ordinal que cumpra essa condição. Portanto, segue disso, e da definição de $\mathbf{F}$, que $\langle x_\xi : \xi < \beta \rangle$ é injetora e, por conseguinte, uma enumeração de $X = \{x_\xi : \xi < \beta\}$.

(WO)$\Longrightarrow$(ZL): Seja $\langle \mathbb{P}, \preceq \rangle$ uma ordem parcial não-vazia tal que toda cadeia em $\mathbb{P}$ possui um limitante superior. Por **(WO)**, $\mathbb{P}$ pode ser bem ordenado. Denotemos por $\leqslant$ uma tal boa ordem sobre $\mathbb{P}$. Em virtude da Observação 2.7, consideremos a enumeração canônica: $\mathbb{P} = \{p_\xi : \xi < \alpha\}$, em que $\alpha = \text{t.o.}(\mathbb{P}, <)$. Assim sendo, considere a seguinte definição recursiva sobre α:

$$\mathcal{C}_0 = \{p_0\},$$

$$\mathcal{C}_\xi = \begin{cases} \left(\bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma \right) \cup \{p_\xi\}, \text{se } \left(\forall x \in \bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma\right) (x \prec p_\xi). \\ \qquad \bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com isso, segue facilmente que:

(i) $\mathcal{C}_\gamma \subseteq \mathcal{C}_\xi$, sempre que $\gamma < \xi < \alpha$.

(ii) Para todo $\xi < \alpha$, tem-se que $\mathcal{C}_\xi$ é uma cadeia em $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$.

Seja então $\mathcal{C} = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{C}_\xi$. Segue de (i) e (ii) que $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$. Pela hipótese acima, concluímos que $\mathcal{C}$ possui um limitante superior $M \in \mathbb{P}$ segundo $\preceq$. Afirmamos que M é um elemento maximal de $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$. De fato, seja um $x \in \mathbb{P}$ tal que $M \preceq x$. Segue da enumeração de $\mathbb{P}$ que existe $\xi < \alpha$

tal que $x = p_\xi$. Com isso, $M \preceq p_\xi$. Por construção, $p_\xi \in \mathcal{C}_\xi \subseteq \mathcal{C}$. Assim, como M é limitante superior de $\mathcal{C}$, temos que $p_\xi \preceq M$. Portanto, segue da antisimetria de $\preceq$ que $M = p_\xi$, i.e., que $M = x$. Perceba o leitor que usamos a boa-ordem $<$ do conjunto para "percorrê-lo" e construir uma cadeia segundo $\prec$, e a hipótese dessa cadeia ter um limitante superior faz com que a mesma "estacione" num elemento maximal segundo $\preceq$.

(ZL)$\Longrightarrow$(AC): Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não-vazios. Assim, considere o conjunto $\mathbb{P} = \{f : \exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}\,(f \text{ é função-escolha para } \mathcal{S})\}$. Por vacuidade, $f = \emptyset$ é uma função-escolha para $\mathcal{S} = \emptyset$. Com isso, $\emptyset \in \mathbb{P}$ e, por conseguinte, $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Como também é claro que $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ é uma ordem parcial, basta agora verificarmos que toda cadeia em $\mathbb{P}$ possui um limitante superior. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em $\mathbb{P}$ e considere então $G = \bigcup \mathcal{C}$. Afirmamos que G é uma função. De fato: como todos os elementos de G são pares ordenados, sejam então $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in G$ quaisquer. Existem funções $f, g \in \mathcal{C}$ tais que $\langle x, y \rangle \in f$ e $\langle x, z \rangle \in g$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia segundo $\subseteq$, segue que $f \subseteq g$ ou $g \subseteq f$. Sem perda de generalidade, suponha que $f \subseteq g$. Então, $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in g$, implicando que $y = z$, o que mostra que G é uma função. Claramente, G é uma função-escolha para o subconjunto $\bigcup \{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{C}\}$ de $\mathcal{F}$ e, portanto, um limitante superior de $\mathcal{C}$ segundo $\subseteq$. Por **(ZL)**, conclui-se que existe um elemento maximal $H \in \mathbb{P}$. Suponha, por absurdo, que $\mathrm{dom}(H) \subset \mathcal{F}$ (inclusão estrita !), i.e., que exista $a \in \mathcal{F} \setminus \mathrm{dom}(H)$. Assim, $a \neq \emptyset$ e existe $b \in a$. Como conseqüência disso e das conclusões anteriores, segue que $H \cup \{\langle a, b \rangle\} \in \mathbb{P}$ e que $H \subset H \cup \{\langle a, b \rangle\}$, o que contradiz a maximalidade de H em $\mathbb{P}$. Portanto, $\mathrm{dom}(H) = \mathcal{F}$ e H é uma função-escolha para $\mathcal{F}$. ∎

Nossa demonstração para **(AC)** $\Longrightarrow$ **(WO)** utiliza um argumento envolvendo classes próprias – essencialmente, usamos o fato de uma classe própria (no caso, **ON**) ser "muito grande" para ser injetada em um conjunto. É interessante observar que, em 1904, ainda existiam dúvidas sobre como o argumento original de Zermelo (que também se baseava numa função-escolha nas partes não-vazias de um conjunto X arbitrário) se comportaria se aplicado ao conjunto de todos os ordinais; vê-se portanto que é crucial destacarmos que não existe o *conjunto* de todos os ordinais.

No entanto, não é difícil exibir uma prova para **(AC)** $\Longrightarrow$ **(WO)** evitando o uso de argumentos sobre classes; entretanto, seria necessário desenvolver aqui um pouco a teoria de cardinais e cardinalidades.[17] Com um uso cuidadoso dos Axiomas das Partes e da Substituição, podemos, dado um conjunto X arbitrário, construir um conjunto denominado *função de Hartogs de X* – que consiste no conjunto de todos os ordinais que podem ser injetados em X, i.e., $H(X) = \{\alpha \in \mathbf{ON} : \exists f : \alpha \longrightarrow X \text{ injetora}\}$. Mostra-se que $H(X)$ é um ordinal (por ser transitivo) e que não pode ser injetado em X (caso contrário, teríamos $H(X) < H(X)$, absurdo !), logo a recursão transfinita na demonstração de **(AC)** $\Longrightarrow$ **(WO)** pode ser restrita a $H(X)$. Optamos por não desenvolver a teoria dos cardinais neste trabalho, mas é interessante observarmos que a construção de Hartogs mostra que não é necessário o Axioma da Escolha para definirmos uma noção apropriada de "cardinal sucessor": aplicado num cardinal qualquer κ, $H(\kappa)$ é exatamente o menor cardinal que é estritamente maior que κ !

Destacamos que, além dos dois princípios acima, existem muitas outras asserções equivalentes a

[17] *Se x é um conjunto que pode ser bem ordenado, define-se a cardinalidade de x (denotada por $|x|$) como sendo o menor ordinal que possua alguma bijeção com x. Note que, sob* **(AC)***, todo conjunto possui cardinalidade. Um ordinal κ é dito um* cardinal *se $|\kappa| = \kappa$.*

(AC). De uma vasta lista de equivalentes a **(AC)**, citemos apenas como exemplos o *Princípio Maximal de Hausdorff*, o *Teorema da Existência de Bases de Hamel-Banach*, o *Teorema da Existência de Ideais Maximais*, os *Teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski* e o *Teorema de Tychonoff para espaços compactos*.

O citado Teorema de Hamel-Banach é a seguinte asserção, indispensável para a Álgebra Linear: "todo espaço vetorial possui uma base". Tal teorema (bastante conhecido desde o início do século XX) segue do Axioma da Escolha via Lema de Zorn, pois mostra-se facilmente que todo espaço vetorial possui um subconjunto linearmente independente maximal, e tal objeto é uma base para o espaço. Quanto à recíproca, ou seja, a afirmação de que "a existência de bases para todos os espaços vetoriais implica o Axioma da Escolha", apenas na década de 80 Andreas Blass estabeleceu esse resultado. Não iremos apresentar aqui a sua prova, pois isto exigiria a introdução de ferramentas matemáticas avançadas, as quais estão fora do alcance do presente texto. Contudo, sugerimos como referência o próprio trabalho original de Blass [1].

Na próxima e última seção do presente artigo, trataremos do Teorema de Tychonoff, apresentando uma demonstração detalhada de que o Teorema de Tychonoff implica o Axioma da Escolha.

Antes de encerrar esta seção, cumpre também salientar o fato de que muitos resultados de importância fundamental em Análise Matemática, presentes no estudo de seqüências, continuidade e compacidade em espaços métricos, são todos conseqüências sutis de **(AC)** (mais precisamente, de formas mais fracas deste axioma)[18].

Usualmente em matemática, para estes e vários outros resultados, utilizamos argumentos envolvendo escolhas arbitrárias, porém de maneira um tanto quanto despercebida – quase de forma inconsciente. Dessa forma, fazemos uso de princípios de escolha, muitas vezes sem darmos muita importância a questões de fundamentos como essas.

4. O Teorema de Kelley: (TT) $\Longrightarrow$ (AC)

Para a presente seção, estamos subentendendo que o leitor tenha familiaridade com os conceitos fundamentais da Topologia Geral, em particular o de *compacidade*. Um espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. A caracterização de compacidade que utilizaremos é baseada em famílias de fechados com a p.i.f. (propriedade da intersecção finita)[19]. Um espaço topológico X é compacto se e somente se toda família de fechados de X com a p.i.f. possui intersecção não-vazia. É importante observarmos aqui que tal caracterização não necessita de **(AC)**.

O Teorema de Tychonoff **(TT)** declara que *o espaço-produto (de Tychonoff) de espaços compactos é compacto*, tendo aplicações diversas tanto nos ramos da Topologia quanto nos ramos da Análise Matemática. Por exemplo, **(TT)** é fundamental para a teoria das compactificações em Topologia Geral. Este teorema topológico, em sua versão original, foi provado pelo próprio Andrei Tychonoff através de vários métodos, todos eles utilizando **(AC)**, em seu artigo de 1930 (cf. [16]).[20] Indicamos o livro de Elon Lages

[18] *Por exemplo, as caracterizações usuais a partir de seqüências e subseqüências (para: pontos no fecho de um subconjunto, compacidade de um espaço métrico e continuidade de uma função em um ponto) podem ser todas derivadas do Axioma da Escolha Enumerável (ver Exemplo 2.4.3 de [9]).*

[19] *Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma família com a* propriedade da intersecção finita *se todo subconjunto finito e não-vazio de $\mathcal{F}$ possui intersecção não-vazia.*

[20] *Em verdade, o teorema original de Tychonoff era sobre a compacidade de potências arbitrárias do intervalo fechado $[0,1]$, mas as argumentações envolvendo pontos de acumulação puderam ser generalizadas. A formulação que chamamos de* **(TT)** *foi dada posteriormente por Eduard Čech, em um artigo seu de 1937 (cf. [13], [16]).*

Lima (v. [12]) para a consulta de uma demonstração do Teorema de Tychonoff: nesse texto dá-se bastante destaque para o fato de que tal demonstração necessita fortemente do Lema de Zorn (e, portanto, do Axioma da Escolha). Podemos supor então estabelecida a implicação **(AC)⟹(TT)** em **ZF**. Quanto à recíproca, foi conjecturada por Shizuo Kakutani, em seu artigo de 1935 (cf. [10]). Contudo, deve-se a John L. Kelley, em seu artigo de 1950 ([10]), a prova que estabeleceu portanto a implicação **(TT)⟹(AC)**.

Podemos trabalhar em **ZF**$^-$ para demonstrar o seguinte teorema (ou seja, sem utilizar o Axioma da Regularidade). Como desejamos demonstrar que uma determinada proposição é equivalente ao Axioma da Escolha, obviamente não podemos utilizá-lo na demonstração a seguir.

Teorema 4.1 (**Kelley, 1950** (ZF$^-$)). *O Teorema do Produto de Tychonoff* **(TT)** *implica o Axioma da Escolha* **(AC)**.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos não-vazios, indexada por algum conjunto I. Segue do Teorema 1.1, da não-existência do conjunto-universo, que existe um conjunto $p \notin \bigcup \mathcal{F}$. Considere então, para cada $i \in I$, o conjunto $X_i = A_i \cup \{p\}$. Agora, para cada $i \in I$, considere σ_i a topologia cofinita sobre X_i, i.e., $\sigma_i = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X_i : X_i \setminus U$ é finito$\}$. É imediato verificar que, para todo $i \in I$,

(i) $\tau_i = \sigma_i \cup \{\{p\}\}$ é uma topologia sobre X_i.

(ii) $A_i \cap \{p\} = \emptyset$, $A_i = X_i \setminus \{p\}$ e A_i é um fechado de X_i (segundo τ_i).[21]

(iii) $\langle X_i, \tau_i \rangle$ é um espaço compacto, e isto segue da compacidade de $\langle X_i, \sigma_i \rangle$.

Em todos os argumentos a seguir, consideraremos, para cada $i \in I$, X_i munido da topologia compacta τ_i.

Em conseqüência de **(TT)**, sabemos que o espaço-produto (de Tychonoff) $Y = \prod_{i \in I} X_i$ é um espaço compacto. Como, para todo $i \in I$, a projeção na i-ésima coordenada, $\pi_i : Y \longrightarrow X_i$, é uma aplicação contínua, tem-se que $\pi_i^{-1}[A_i]$ é um fechado de Y. Além disso, verifica-se com facilidade que $\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}[A_i]$.

Assim sendo, para se provar que $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, é suficiente verificar que $\mathcal{G} = \{\pi_i^{-1}[A_i] : i \in I\}$ satisfaz a p.i.f., visto que $\mathcal{G}$ é uma família de fechados do espaço compacto Y.

Com efeito, basta observar as conclusões obtidas nos itens a seguir:

(iv) Seja J um subconjunto finito e não-vazio qualquer de I. Pode-se então escrever $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ para algum n fixado, $1 \leqslant n < \omega$. Como para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se que $A_{i_j} \neq \emptyset$, segue então que $(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}) \neq \emptyset$.[22]

[21] *Na prova original, devida a Kelley, é cometido um pequeno erro justamente nessa parte, pois se considerou $\tau_i = \sigma_i$. Tal erro é descrito pela seguinte observação: se, para algum $i_0 \in I$, X_{i_0} é infinito (i.e., A_{i_0} é infinito), então $\{p\} \notin \sigma_{i_0}$ (i.e., A_{i_0} não é um fechado de X_{i_0} segundo σ_{i_0}), pois, obviamente, $\{p\} \neq \emptyset$ e $X_{i_0} \setminus \{p\} = A_{i_0}$ é infinito. Portanto, caso não se adicione o unitário de p a cada σ_i, tem-se comprometida a validade de quase todos os argumentos que são dados posteriormente. Destaquemos que isto foi observado logo após a publicação da prova de Kelley, em um artigo de Łoś e Ryll-Nardzewski, na edição subseqüente da mesma revista em que tal prova foi publicada (cf. [16]). Contudo, este pequeno erro é facilmente corrigível e o resultado em questão (i.e, "*__(TT)⟹(AC)__*") continua sendo creditado a Kelley. Uma prova corrigida – que difere da original apenas pela escolha das topologias – é devida a Plastria, e foi apresentada em um artigo seu de 1972 ([15]).*

[22] *Observe que nessa parte da prova não é necessário usar* **(AC)** *para se concluir a não-vacuidade do produto cartesiano finito. Em outras palavras, "para se fazer escolhas finitas não precisamos do Axioma da Escolha" – escolhas finitas podem ser formalizadas pela Lógica, que é finitária.*

Conseqüentemente, também segue que $\prod_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \emptyset$, pois, como se pode ver facilmente, existe uma identificação natural entre $\prod_{j=1}^{n} A_{i_j} = \{a : J \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j} \mid a(i) \in A_i\,,\text{ para todo } i \in J\}$ e $A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n} = \{\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\rangle \mid a_i \in A_i\,,\text{ para todo } i \in J\}$. Também verifica-se facilmente que $\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}\left[A_{i_j}\right] = \prod_{i\in I} Z_i$, em que $Z_i = \begin{cases} A_i\,, \text{se } i \in J \\ X_i\,, \text{se } i \in I \setminus J \end{cases}$.

(v) Fixe, portanto, algum $a = \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\rangle \in \prod_{j=1}^{n} A_{i_j}$, i.e., alguma função $a : J \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$ tal que $a_i \in A_i$, para todo $i \in J$. Defina agora, para essa função a, uma extensão

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} Z_i = (\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}) \cup (\bigcup_{i\in I\setminus J} X_i)\,,$$

pondo-se: $f(i) = \begin{cases} a_i\,, & \text{se } i \in J \\ p\,, & \text{se } i \in I \setminus J \end{cases}$.

(vi) Vê-se claramente que f está bem definida, por construção, e que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $f(i_j) = a_{i_j} \in A_{i_j}$ e para todo $i \in I \setminus J$, tem-se $f(i) = p \in X_i$. Conclui-se, então, que a função $f \in \prod_{i\in I} Z_i$.[23]

Por conseguinte, tem-se $\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}\left[A_{i_j}\right] \neq \emptyset$. Como J, acima definido, foi tomado arbitrário, segue que a família $\mathcal{G}$ de fato tem a p.i.f.. Assim, pode-se concluir que $\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}\left[A_i\right] = \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$, pelo fato de Y ser um compacto e $\mathcal{G}$ uma família de fechados de Y com a p.i.f..

Segue que $\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}\left[A_i\right] \neq \emptyset$. Como **(AC)** é equivalente à afirmação de que "o produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos não-vazios é não-vazio", tem-se, portanto, que a implicação **(TT)**$\Longrightarrow$**(AC)** está demonstrada. ∎

Algum leitor mais atento pode ter notado que poderíamos ter definido topologias mais simples para os conjuntos X_i – por exemplo, definindo para cada X_i a topologia $\{\emptyset, X_i, \{p\}\}$ teríamos topologias compactas a partir das quais poderíamos ter levado a cabo todos os nossos argumentos. No entanto, tais topologias não satisfazem, em geral, o axioma de separação T_1 (lembramos ao leitor que uma topologia é T_1 se, e só se, todos os conjuntos unitários são fechados) – enquanto que as topologias que utilizamos em nossa demonstração são sempre T_1. Sendo **(TT)**$_{T_1}$ o "Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos T_1", temos que nossa demonstração mostra que **(TT)**$_{T_1}$ $\Longrightarrow$ **(AC)**, e portanto temos em **ZF** as implicações

$$\textbf{(AC)} \Longrightarrow \textbf{(TT)} \Longrightarrow \textbf{(TT)}_{T_1} \Longrightarrow \textbf{(AC)},$$

o que nos permite dizer que o Axioma da Escolha é equivalente ao Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos T_1 – que seria, a princípio, uma proposição mais fraca do que o Teorema de Tychonoff, mas que demonstra-se ser equivalente ao mesmo.

É natural agora nos perguntarmos se podemos enfraquecer ainda mais o Teorema de Tychonoff e ainda assim mantermos a equivalência com o Axioma da Escolha. Por exemplo, **(TT)**$_{T_2}$ – o Teorema de Tychonoff para espaços compactos Hausdorff – é equivalente a **(AC)**? A resposta é não: na verdade **(TT)**$_{T_2}$ é equivalente a uma certa conseqüência do Axioma da Escolha que não pertence ao rol dos seus equivalentes (ou seja, trata-se de uma asserção estritamente mais fraca do que esse axioma), a saber o "Teorema do Ideal Booleano Primo" **(BPI)** (veja [6]). A asserção **(BPI)** é, por sua vez, equivalente ao chamado "Teorema do Ultrafiltro", que é a afirmação de que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.

[23] *Note também que nessa outra parte da prova não são utilizadas escolhas arbitrárias, já que a função f é dada de forma explícita. Por este motivo, vê-se o quanto é crucial a adição daquele conjunto p a cada membro da família $\mathcal{F}$.*

Este trabalho é resultado das atividades de Iniciação Científica do segundo autor, sob a orientação do primeiro, e recebeu o Prêmio da Área de Ciências Exatas e da Terra no VIII Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação, organizado pela Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFBA em novembro de 2007.

Agradecimentos. Agradecemos à FAPESB – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (Convênio PIBIC/FAPESB) pelo auxílio financeiro a essas atividades. Agradecemos também aos demais professores do Grupo de Lógica, Conjuntos e Topologia da UFBA (Andreas Brunner, Peter Malcolm Johnson e Steffen Lewitzka) e ao (à) parecerista, pelos comentários, sugestões e correções.

Samuel Gomes da Silva e ***João Paulo Cirineu de Jesus***

Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia

Rua Adhemar de Barros, s/n, Campus Ondina

CEP: 40170-110 Salvador, BA – *samuel@ufba.br* e *jpcirineu@ufba.br*

Referências

[1] BLASS, Andreas. Existence of bases implies the Axiom of Choice. In: BAUMGARTNER, J. E.; MARTIN, D. A.; SHELAH, S. (Eds.). *Axiomatic Set Theory*. Providence: AMS, 1984. p. 31-33. (Contemporary Mathematics, 31)

[2] COHEN, Paul J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: W. A. Benjamin, 1966. 154p.

[3] ENDERTON, Herbert B. *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press, 1977. 279p.

[4] ENGELKING, Ryszard. *General Topology*. rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. 529p. (Sigma Series in Pure Mathematics, 6)

[5] FERREIRA, Fernando. Teoria dos Conjuntos: uma vista. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Lisboa, n. 38, p. 29-47, 1998.

[6] HALPERN, James D.; LÉVY, Azriel. The Boolean Prime Ideal Theorem does not imply the Axiom of Choice. In: JECH, Thomas J.; SCOTT, Dana S. (Eds.). *Axiomatic Theory*. Providence: AMS, 1971. p. 83-134. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 13, part 1)

[7] HRBACEK, Karel; JECH, Thomas J. *Introduction to Set Theory*. 3.ed. rev. and expanded. New York: Marcel Dekker, c1999. 291p. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 220)

[8] JECH, Thomas J. *Set Theory*. New York: Academic Press, 1978. 621p. (Pure and Applied Mathematics, a Serie of Monographs and Textbooks, 79)

[9] JECH, Thomas J. *The Axiom of Choice*. Amsterdam: North-Holland, 1973. 202p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 75)

[10] KELLEY, John L. The Tychonoff Product Theorem implies the Axiom of Choice. *Fundamenta Mathematicae*, Warsaw, v. 37, n. 1, p. 75-76, 1950.

[11] KUNEN, Kenneth. *Set Theory: an introduction to the independence proofs*. Amsterdam: North-Holland, 1980. 313p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102)

[12] LIMA, Elon L. *Elementos de Topologia Geral*. 2.ed. Rio de Janeiro: Ao Livro técnico, 1976. 299p.

[13] MOORE, Gregory H. *Zermelo's Axiom of Choice: its origins, development, and influence*. New York: Springer, 1982. 410p. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 8)

[14] OLIVEIRA, Augusto J. F. *Lógica e Aritmética: uma introdução informal aos métodos formais*. 2.ed. rev. e ampliada. Lisboa: Gradiva Publ. Ltda, 1996. (Trajectos Ciência)

[15] PLASTRIA, Frank. Two loose results in General Topology. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Bruxelles, v. 24, p. 380-385, 1972.

[16] SCHECHTER, Eric. Kelley's specialization of Tychonoff's Theorem is equivalent to the Boolean Prime Ideal Theorem. *Fundamenta Mathematicae*, Warsaw, v. 189, p. 285-288, 2006.

[17] VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967. 664p. (Source Books in the History of the Sciences)

[18] ZERMELO, Ernst. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe). *Mathematische Annalen*, Berlin, v. 59, p. 514-516, 1904. Translated in: VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Godel*. p. 139-141, 1967.

[19] ZERMELO, Ernst. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, Berlin, v. 65, p. 107-128, 1908. Translated in: VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Gödel*. p. 183-198, 1967.

[20] ZERMELO, Ernst. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I. *Mathematische Annalen*, Berlin, v. 65, p. 261-281, 1908. Translated in: VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Gödel*. p. 199-215, 1967.