Uma demonstração elementar de um resultado sobre a noção de diferencial em espaços normados

Cecília S. Fernandez
UFF

Neste trabalho vamos apresentar uma demonstração elementar de um resultado envolvendo a noção de diferenciabilidade de funções em espaços normados. Mais precisamente, dados E e F espaços normados sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dado A um subconjunto aberto conexo não vazio de E e dada $f : A \to F$ uma função diferenciável em A com $Df = 0$ provaremos, usando apenas a definição de diferencial, que f é uma função constante.

Na disciplina Cálculo 1 somos apresentados ao conceito de derivada e a várias de suas propriedades básicas. Uma dessas propriedades é o fato de que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ constante tem derivada nula em I, sendo I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$. Em geral, a recíproca deste resultado (de fato, os conjuntos conexos da reta são os intervalos) é apresentada numa primeira disciplina de Análise Real e pode ser enunciada como a seguir:

Proposição 1

Se A é um aberto conexo não vazio em $\mathbb{R}$ e se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função com derivada nula em A, então f é constante.

A demonstração que se encontra usualmente na literatura usa o Teorema do Valor Médio (cf. [2], [3] ou [6]). A versão da Proposição 1 no contexto das funções complexas de uma variável complexa é apresentada numa disciplina de Funções Complexas ou Análise Complexa e é geralmente provada com o auxílio das equações de Cauchy-Riemann para mostrar que as derivadas parciais da parte real e da parte imaginária da função são iguais a zero (cf. [1], [4] ou [5]). Com isto o que se faz é reduzir o problema do caso complexo para o caso real. Portanto, também no caso complexo, a demonstração usual se baseia no Teorema do Valor Médio. Uma pergunta que aparece naturalmente aqui é a seguinte: um resultado tão simples pode ter uma demonstração usando apenas a definição de derivada? A resposta é afirmativa. O objetivo do nosso trabalho é apresentar uma demonstração usando apenas a definição de derivada. Como esta demonstração pode ser dada para espaços normados quaisquer, ambos sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ela será apresentada neste contexto. Cabe observar que a demonstração usualmente encontrada na literatura no contexto dos espaços normados de dimensão infinita usa a Desigualdade de Lagrange (cf. [7] ou [8]).

Cálculo Diferencial em Espaços Normados

Nesta seção vamos apresentar o conceito de diferencial em espaços normados, já que este conceito não é apresentado ao nível da graduação. Para o leitor interessado em estudar mais sobre o assunto indicamos os excelentes livros de Mujica [7] e Nachbin [8]. Cabe observar aqui que o conceito de diferenciabilidade foi estendido, de modo natural e simples, aos espaços normados, reais ou complexos, por Maurice Fréchet[1]. Observamos que, no que se segue, a letra $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. As letras E e F denotam espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e o símbolo $\mathcal{L}(E, F)$ denota o conjunto de todas as funções lineares contínuas de E em F.

Seja A um subconjunto aberto de E. Uma função $f : A \to F$ é dita ser *diferenciável num ponto* $x_0 \in A$ se existe uma função u em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0. \qquad (1)$$

Observamos que a função u que aparece na definição acima é unicamente determinada por f e x_0. Ela é chamada de *diferencial de f em* x_0 e é usualmente denotada por $Df(x_0)$. Portanto,

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F).$$

Dizemos que uma função $f : A \to F$ é *diferenciável em* A, ou simplesmente diferenciável, se f for diferenciável em todos os pontos de A. Neste caso, a aplicação

$$x_0 \in A \mapsto Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$$

é chamada *a diferencial de f em A* e é denotada por Df. Vejamos, a seguir, alguns exemplos.

(a) Seja $a \in F$. Então a função constante

$$f : x \in E \longmapsto a \in F$$

tem diferencial igual a 0 em E. De fato, como f é constante, então $f(x) = f(x_0)$ para quaisquer x e x_0 em E. Portanto

$$f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0) = 0,$$

onde 0 no primeiro membro da igualdade acima denota a função nula de $\mathcal{L}(E, F)$. Assim,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0,$$

isto é, achamos a função linear contínua $0 : E \to F$ satisfazendo à condição da definição de diferenciabilidade. Resulta que f é diferenciável em x_0 e que $Df(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in E$.

(b) Seja $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Então u é diferenciável em E e Du é a função constante $x \in E \longmapsto u \in \mathcal{L}(E, F)$. De fato, pela linearidade de u, temos que

$$u(x) - u(x_0) - u(x - x_0) = 0$$

para quaisquer x e x_0 em E. Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||u(x) - u(x_0) - u(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0.$$

Assim, achamos $u \in \mathcal{L}(E, F)$ que satisfaz (1). Portanto, u é diferenciável em x_0 e sua diferencial neste ponto é $Df(x_0) = u$.

(c) Tome r um número real positivo. Considere a função

$$f : x \in B_1(0) \mapsto rx \in E,$$

onde $B_1(0) = \{x \in E : ||x|| < 1\}$. Então f é diferenciável em $B_1(0)$ e $Df(x_0) : x \in E \longmapsto rx \in E$ para todo $x_0 \in B_1(0)$.

(d) Seja $x_1 \in E$ e considere a função

$$f : x \in E \mapsto x + x_1 \in E.$$

Temos que f é diferenciável em E e $Df(x_0) = id_E$ para todo $x_0 \in E$, onde id_E denota a função identidade em E.

Se E e F são espaços normados complexos, então devemos estar atentos à diferenciabilidade complexa de $f : A \subset E \to F$ e à diferenciabilidade real de $f : A \subset E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$, onde $E_{\mathbb{R}}$ e $F_{\mathbb{R}}$ denotam os

[1] *René-Maurice Fréchet nasceu em setembro de 1878 na França. Fréchet publicou vários artigos. Porém, seu mais importante trabalho é sua tese de doutorado, na qual pela primeira vez se apresenta uma teoria geral sobre espaços métricos.*

espaços normados E e F sobre o corpo $\mathbb{R}$. É claro que diferenciabilidade complexa implica diferenciabilidade real, mas a recíproca é falsa, como já mostra o seguinte exemplo clássico da Análise Complexa. Sendo $E = F = \mathbb{C}$ e, portanto, $E_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, a função $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$-diferenciável, mas não é $\mathbb{C}$-diferenciável, ou seja, é diferenciável no sentido real, mas não o é no sentido complexo.

Seja $f : A \to F$ uma função diferenciável em $x_0 \in A$. Então pela definição (1), existe uma função u em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0.$$

Ora, pela linearidade de u, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f(x) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\| + \|u(x) - u(x_0)\|, \end{aligned}$$

para quaisquer x e $x_0 \in A$. Agora, pela continuidade de u, segue que o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $x \to x_0$. Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} ||f(x) - f(x_0)|| = 0,$$

o que mostra que f é contínua em x_0. Com isto, verificamos que *se $f : A \to F$ é diferenciável em um ponto $x_0 \in A$, então f é contínua em x_0.*

Observamos que na definição (1) supusemos a existência de $u \in \mathcal{L}(E, F)$, isto é, a continuidade de u. Pelo que vimos no parágrafo anterior, esta hipótese nos permite concluir sobre a continuidade de f. Outros autores supõem a continuidade de f e a existência de $u : E \to F$ *apenas* linear, para depois demonstrarem que u é contínua. São pontos de vista equivalentes.

A priori pode nos parecer estranho considerar $Df(x_0)$ sendo uma função linear contínua. Mas a definição (1) é uma extensão natural da definição de derivada, no caso de funções reais de uma variável real ou no caso de funções complexas de uma variável complexa. De fato, se I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real e $x_0 \in I$, a *derivada de f no ponto x_0*, representada por $f'(x_0)$, é definida como sendo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (2)$$

desde que o limite exista, caso no qual se diz que f é *derivável em x_0*. Claramente, em (2) se subentende que $x \in I$. Observamos que podemos escrever a definição de derivada, de modo equivalente, como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ou ainda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0. \qquad (3)$$

Ora, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial e as funções lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são da forma

$$u : t \in \mathbb{R} \mapsto at \in \mathbb{R},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é fixo e determina u, sendo único para cada função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Na expressão em (3), o termo

$$f'(x_0)(x - x_0)$$

é o valor em $x - x_0$ da função linear

$$u : t \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)t \in \mathbb{R}.$$

Assim, dizer que f é derivável em $x_0 \in I$ é dizer que existe uma função linear (contínua[2]) $u : t \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

As considerações feitas acima para as funções reais de uma variável real podem ser estendidas

[2] *No caso de E ser uma espaço normado de dimensão finita, toda aplicação linear de E em F é contínua. De modo que na definição (1) não é necessário, neste caso, dizer que u é contínua, pois tal continuidade é automática.*

naturalmente para as funções complexas de uma variável complexa. Há apenas uma mudança de terminologia: no caso complexo, uma função derivável é chamada de analítica ou holomorfa.

Terminamos esta seção observando que as várias regras do Cálculo Diferencial real continuam válidas no contexto dos espaços normados de dimensão infinita (cf. [7] ou [8]). Uma dessas regras é a regra de diferenciação de funções compostas, conhecida como a regra da cadeia, que vamos enunciar a seguir para futuras referências.

Proposição 2

Sejam E, F, G espaços normados e $A \subset E$, $B \subset F$ abertos não vazios. Sejam $f : A \to F$ e $g : B \to G$ funções tais que $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em um ponto $x_0 \in A$ e g é diferenciável em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Resultado Principal

A seguir apresentamos uma versão da Proposição 1 para espaços normados quaisquer. Como já mencionamos, a prova que se encontra na literatura para espaços normados de dimensão infinita usa a Desigualdade de Lagrange, que é nada mais nada menos do que uma generalização em dimensão infinita do Teorema do Valor Médio. A demonstração que daremos aqui usa apenas a definição de derivada. Observamos que os vetores nulos de E e F serão denotados pelo mesmo símbolo $\mathbf{0}$. Inicialmente, vamos obter o resultado para o caso particular em que $A = B_1(\mathbf{0})$.

Proposição 3

Se $f : B_1(\mathbf{0}) \to F$ é uma função com $Df = 0$ em $B_1(\mathbf{0})$, então f é constante.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Vamos supor que f não é constante em A. Vamos mostrar que Df não é identicamente nula em A. Ou seja, vamos mostrar que existe um elemento $x_0 \in A$ tal que $Df(x_0)$ não é nula em E. Ora, como $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e f não é constante em A, existe $v \in A, v \neq \mathbf{0}$ tal que $f(v) \neq \mathbf{0}$. Assim, existem $v \in A, v \neq \mathbf{0}$ e $M > 0$ tais que

$$||f(v)|| = M||v||. \tag{4}$$

Defina

$$I = \{t \in (0,1] : ||f(tv)|| \geq M||tv||\}.$$

Por (4) temos que o número real $1 \in I$. Logo, I é um conjunto não vazio limitado de números reais e conseqüentemente possui ínfimo. Chamemos

$$a = \inf I.$$

Como $0 \leq a \leq 1$ e $v \in A$, segue que $av \in A$. Assim, da definição de ínfimo,

$$||f(av)|| \geq M||av||. \tag{5}$$

Temos agora dois casos a considerar:

Caso 1: $a = 0$. Ora, existe uma seqüência (t_n) em I tal que $t_n \to a$. Portanto, para cada $n \in N$,

$$\frac{||f(t_n v)||}{||t_n v||} \geq M. \tag{6}$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que $t_n v \to \mathbf{0}$. Assim, por (6), concluímos que $Df(\mathbf{0})$ não é nula em E, pois caso contrário

$$0 = \lim_{x \to \mathbf{0}} \frac{||f(x) - f(\mathbf{0}) - Df(\mathbf{0})(x - \mathbf{0})||}{||x - \mathbf{0}||} =$$
$$= \lim_{x \to \mathbf{0}} \frac{||f(x)||}{||x||} = \lim_{t_n \to a} \frac{||f(t_n v)||}{||t_n v||}.$$

Caso 2: $a > 0$. Tomemos $0 < b < a$. Se $||f(bv) - f(av)|| \leq M||bv - av||$ então, por (5),

$$\begin{aligned} ||f(bv)|| &\geq ||f(av)|| - ||f(bv) - f(av)|| \\ &\geq Ma||v|| - M(a-b)||v|| = M||bv||, \end{aligned}$$

contradizendo o fato de que $a = \inf I$. Assim, para qualquer $0 < b < a$,

$$\frac{||f(bv) - f(av)||}{||bv - av||} > M.$$

Em particular, para todo $n \in N$ tal que $0 < b_n = a - \frac{1}{n} < a$, temos que

$$\frac{||f(b_n v) - f(av)||}{||b_n v - av||} > M. \tag{7}$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que $b_n \to a$ e, conseqüentemente, $b_n v \to av$. Assim, concluímos de (7) que $Df(av)$ não é nula em E.

O caso em que $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ é tratado agora facilmente definindo-se a função $g(x) = f(x) - f(\mathbf{0})$, onde $x \in B_1(\mathbf{0})$. ■

Suponhamos agora que $A = B_r(x_0) = \{x \in E : ||x - x_0|| < r\}$, onde $r > 0$. Consideremos a função $k : B_1(\mathbf{0}) \to F$ dada por $k = f \circ g \circ h$, onde $h : x \in B_1(\mathbf{0}) \mapsto rx \in E$, $g : x \in B_r(\mathbf{0}) \mapsto x + x_0 \in E$ e $f : A \to F$ com $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$. Pelos Exemplos (c) e (d), g e h são diferenciáveis. Portanto, pela regra da cadeia, segue que k é diferenciável. Como $Df = 0$, segue que $Dk = 0$ também. Pela Proposição 3, k é constante e, conseqüentemente, f também o é.

Para provarmos o resultado no caso em que A é um aberto conexo não vazio qualquer de E, usaremos um argumento bastante usual, que será feito aqui apenas por questão de completude de nossa exposição. Ora, fixemos $w \in A$. Sejam $U = \{x \in A : f(x) = f(w)\}$ e $V = \{x \in A : f(x) \neq f(w)\}$. Claramente, $U \cap V = \varnothing$ e $U \cup V = A$. Afirmamos que U e V são conjuntos abertos. De fato, suponhamos que $x_1 \in U$ e $x_2 \in V$. Como A é aberto, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $B_1 = B_{r_1}(x_1) \subset A$ e $B_2 = B_{r_2}(x_2) \subset A$. Pelo que vimos acima, f é constante em B_1 e B_2. Logo, $f(x) = f(x_1) = f(w)$ para todo $x \in B_1$ e $f(x) = f(x_2) \neq f(w)$ para todo $x \in B_2$, implicando que $B_1 \subset U$ e $B_2 \subset V$. Isto prova a nossa afirmação. Agora, como A é conexo e $U \neq \varnothing$, segue que $V = \varnothing$. Portanto $U = A$, e assim $f(x) = f(w)$ para todo $x \in A$, provando que f é constante em A.

Referências

[1] ALHFORS, Lars V. *Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3.ed. New York: McGraw-Hill, c1979. 331p.

[2] APOSTOL, Tom M. *Calculus*. 2.ed. Waltham: Blaisdell, c1967. 666p. v.1.

[3] BARTLE, Robert G.; SHERBERT, Donald R. *Introduction to Real Analysis*. 2.ed. New York: John Wiley, 1992. 404p.

[4] CONWAY, John B. *Functions of one complex variable I*. New York: Springer, 1978. 317p. (Graduate Texts in Mathematics, 11)

[5] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JR, Nilson C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 224p. (Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática)

[6] LIMA, Elon L. *Curso de Análise*. Vol.1. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. 344p. (Projeto Euclides, 1)

[7] MUJICA, Jorge. *Complex Analysis in Banach Spaces: holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimension*. Amsterdam: North-Holland, 1986. 434p. (North-Holland Mathematics Studies, 120)

[8] NACHBIN, Leopoldo. *Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial*. Washington: Secretaria Geral da O.E.A., 1976. 136p. (Série Matemática, 17)

Cecília S. Fernandez

Departamento de Análise – Instituto de Matemática

Universidade Federal Fluminense

Rua Mário Santos Braga, s/n, Niterói-RJ, CEP: 24020-140

gancsfz@vm.uff.br