errata relativa ao artigo "O Lema de Seleção da Curva e o Teorema de Morse-Sard" publicado na MU 36

Carlos Gustavo Moreira (IMPA)
Maria Aparecida Soares Ruas (ICMC/USP)

Na prova do Teorema de Morse-Sard a partir do Teorema de Morse, reduzimos a demonstração a provar o seguinte fato:

(*) Se $0 \leq p \leq n-1$, $m \geq n$ e $\tilde{f}\colon V \to \mathbb{R}^{n-p}$ é uma função de classe C^{m-n+1} , definida em um aberto $V \subset \mathbb{R}^{m-p}$, então $\tilde{f}(N)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-p}$, onde $N = \{v \in V \mid D\tilde{f}(v) = 0\}$.

Nosso argumento para mostrar esta afirmação só estava correto, no entanto, no caso em que $p = n-1$. Dizíamos que, se π é uma projeção qualquer de $\mathbb{R}^{n-p}$ em $\mathbb{R}$, $\pi \circ \tilde{f}(N)$ teria medida nula em $\mathbb{R}$. De fato, N está contido no conjunto dos pontos críticos de $\pi \circ \tilde{f}\colon V \subset \mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}$, mas, para poder usar o Teorema de Morse, precisaríamos que $\pi \circ \tilde{f}$ fosse de classe C^{m-p}, e só estamos supondo que $\tilde{f}$ é de classe C^{m-n+1}; note que $m-p \leq m-n+1 \Leftrightarrow p \geq n-1$, o que no nosso caso implica $p = n-1$.

Para concluir corretamente a prova do Teorema de Morse-Sard, faremos uso da seguinte extensão do Teorema de Morse:

Teorema. *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ uma função de classe C^p, onde $p \geq n/r$. Então $f(C(f))$ tem medida nula em $\mathbb{R}^r$, onde $C(f) := \{x \in U \mid Df(x) = 0\}$.*

De fato, para provar (*), observamos que, no nosso caso, temos $m-n+1 \geq \frac{m-p}{n-p} = \frac{m-n}{n-p}+1$, pois $p \leq n-1$, e logo, pelo Teorema acima, $\tilde{f}(N)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n-p}$.

Para provar o Teorema acima, observamos que, durante a prova do Teorema de Morse, mostramos os seguintes fatos:

(i) Se $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^p, então, para todo $y \in \text{crit}(g)$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \text{crit}(g)}} \frac{|g(y)-g(x)|}{|y-x|^p} = 0.$$

(No artigo formalmente estávamos supondo $p = n$, mas a mesma prova funciona para p qualquer).

(ii) (Lema 1). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de volume $V < +\infty$, e seja $X \subset U$ um subconjunto de modo que, a todo $x \in X$, é associada uma bola $B(x,\delta_x) \subset U$. Então existe um conjunto (finito ou) enumerável $(x_i) \subset X$ tal que $X \subset \bigcup_i B(x_i,\delta_{x_i})$ e

$$\sum_i \text{vol}\, B(x_i,\delta_{x_i}) \leq 3^n \cdot V.$$

Para concluir a prova do teorema, podemos supor sem perda de generalidade, como antes, que U é limitado. Notamos agora que, por (i), para todo $x \in C(f)$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x \in (0,1)$ tal que

$$y \in C(f) \cap B(x,\delta_x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(y)-f(x)| \leq \left(\tfrac{\varepsilon \cdot C_n}{C_r \cdot 3^n \cdot \text{vol}(U)}\right)^{1/r} \cdot |y-x|^p$$

onde, para cada k, C_k é o volume da bola unitária $B(0,1)$ em $\mathbb{R}^k$. Assim, $f(C(f) \cap B(x,\delta_x)) \subset D_x$, onde

$$D_x = B\left(f(x), \left(\frac{\varepsilon \cdot C_n}{C_r \cdot 3^n \cdot \text{ vol}(U)}\right)^{1/r} \cdot \delta_x^p\right)$$

é uma bola em $\mathbb{R}^r$ de volume

$$\begin{aligned} C_r & \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot C_n}{C_r \cdot 3^n \cdot \text{ vol}(U)}\right) \cdot \delta_x^{pr} = \\ = & \frac{\varepsilon \cdot C_n}{3^n \cdot \text{ vol}(U)} \cdot \delta_x^{pr} \leq \frac{\varepsilon \cdot C_n}{3^n \cdot \text{ vol}(U)} \cdot \delta_x^n = \\ = & \frac{\varepsilon}{3^n \cdot \text{ vol}(U)} \cdot \text{vol}\, B(x,\delta_x). \end{aligned}$$

Por (ii), existe um conjunto enumerável $(x_i) \subset C(f)$ com $C(f) \subset \bigcup_i B(x_i,\delta_{x_i})$ e $\sum_i \text{vol}(B(x_i,\delta_{x_i})) \leq 3^n \cdot \text{ vol}(U)$. Temos então

$$f(C(f)) = \bigcup_i f(C(f) \cap B(x_i,\delta_{x_i})) \subset \bigcup_i D_{x_i},$$

com

$$\begin{aligned} \sum_i \text{vol}\, D_{x_i} & < \frac{\varepsilon}{3^n \cdot \text{ vol}(U)} \sum_i \text{ vol}\, B(x_i,\delta_{x_i}) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3^n \cdot \text{vol}(U)} \cdot 3^n \cdot \text{vol}(U) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que $f(C(f))$ tem medida nula em $\mathbb{R}^r$. $\square$