Carlos Gustavo Moreira (IMPA)
Nicolau Corção Saldanha (PUC-Rio)

Problemas

Retomamos neste número a Seção de Problemas, desta vez com uma seleção especial de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática – Nível Universitário (OBM-U) e da Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária (OIMU). As respostas podem ser enviadas para o editor da revista e serão selecionadas para publicação.

1. (Este problema, elaborado por Luana Reis e Gabriel, do COLTEC-UFMG, saiu com erros na MU 35. Segue a versão corrigida.) Quatro homens de estados diferentes vivem em casas de cores diferentes dispostas linearmente; nestas casas vivem também quatro animais diferentes, um por casa. Através das dicas abaixo, diga qual a ordem das casas e seus respectivos ocupantes animais e humanos, com o estado de origem destes últimos.

a) Manoel vive na casa branca.
b) O carioca mora ao lado da casa amarela.
c) Um dos homens é mineiro.
d) Felipe é vizinho da casa preta.
e) O carioca é vizinho de quem tem um peixe.
f) Pedro é vizinho de Manoel.
g) O gaúcho é vizinho do cachorro.
h) O paulista é vizinho do gato.
i) A casa preta tem apenas um vizinho, que está à sua esquerda.
j) O peixe não é vizinho do gato.
k) O gato não é vizinho do cachorro.
l) João mora ao lado da casa vermelha.
m) O cachorro mora ao lado da casa vermelha.
n) Entre os animais há um coelho.

2. (Proposto pela professora Leilá Maria Vasconcellos Figueiredo, do IME-USP) Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$ é injetora.

3. (OBM-U, 2001) Definimos $SL(2,\mathbb{Z})$ como o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante igual a 1. Seja $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ uma matriz para a qual existe um inteiro $n > 0$ tal que A^n seja a matriz identidade. Prove que existe $X \in SL(2,\mathbb{Z})$ tal que $X^{-1}AX$ é igual a uma das matrizes

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. (Adaptado de um problema da OBM-U, 2001) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Seja $f : X \to X$ uma função sobrejetora satisfazendo $|f(p) - f(q)| \le |p - q|$ para quaisquer $p, q \in X$. Prove que f é uma isometria, isto é, que $|f(p) - f(q)| = |p - q|$ para quaisquer $p, q \in X$.
Obs. $|p|$ denota a norma euclidiana de p.

5. (OBM-U, 2002) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$ conjuntos com $|A_i| \ge \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \le \frac{n}{4}$, para quaiquer i, j com $i \ne j$. Prove que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| \ge \frac{kn}{k+1}.$$

Obs: $|X|$ denota o número de elementos do conjunto X.

6. (OBM-U, 2002) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $\ln_0(x) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $\ln_k(x) > 0$, definimos $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$, onde $\ln$ é o logaritmo natural. Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n) \ge 1$, e a_n como $\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(n)$. Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.

7. (OBM-U, 2002) Considere duas elipses no plano $\mathbb{R}^2$ que se intersectam em 4 pontos. Nesses 4 pontos trace as retas tangentes às duas elipses, obtendo assim 8 retas. Prove que existe uma elipse (ou circunferência) tangente a essas 8 retas.

8. (OIMU, 2004) Seja $I_k \subset \mathbb{C}$ o conjunto de todas as raízes de polinômios mônicos de grau k e coeficientes inteiros.

a) Mostre que $I_2 \cap \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ mas I_2 não é denso em $\mathbb{C}$;
b) Determine se I_3 é denso em $\mathbb{C}$.

Obs: Um polinômio é mônico se o seu coeficiente de mais alto grau é igual a 1. Um conjunto X é denso em $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) se, para todo $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in \mathbb{C}$) e todo $\varepsilon > 0$, existir $w \in X$ com $|w - z| < \varepsilon$.

9. (OIMU, 2004) Seja $S = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as seqüências com valores 1 e -1. Para $p, q \in S$, definimos

$$p \perp q \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k<n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Mostre que existe $f : S \to S$ tal que se $p \ne q$ então $f(p) \perp f(q)$.

10. (OIMU, 2005) Demonstre que, para quaisquer inteiros n e p satisfazendo $0 < n \le p$, todas as raízes do polinômio

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j}\binom{p}{n-j} x^j \quad \text{são reais.}$$