Nota

O Prêmio Abel de 2008

Vitor de Oliveira Ferreira

IME/USP

Criado há apenas pouco mais de seis anos, o Prêmio Abel, concedido anualmente pela Academia Norueguesa de Ciências e Letras em reconhecimento por notáveis contribuições à matemática, já é comparado ao Prêmio Nobel, tanto pelo valor em dinheiro (aproximadamente 1,2 milhão de dólares), quanto pelo impacto na comunidade científica internacional. Os vencedores da sexta edição do prêmio foram anunciados em março deste ano. John Griggs Thompson e Jacques Tits foram escolhidos por suas fundamentais contribuições à moderna teoria de grupos.

Por serem os objetos que codificam formalmente o conceito de simetria, os grupos permeiam toda a matemática e boa parte das ciências exatas. Grande parte do arcabouço teórico da teoria de grupos foi construída na segunda metade do século XX, e Thompson e Tits se destacam entre os que fizeram as contribuições mais profundas e fundamentais à teoria.

John G. Thompson nasceu no dia 13 de outubro de 1932, em Ottawa, Kansas, Estados Unidos. Obteve seu bacharelado pela Universidade de Yale em 1955 e seu doutorado pela Universidade de Chicago em 1959. Em sua tese, Thompson, por meio da introdução de muitas idéias originais, demonstrou uma conjectura de Frobenius que já resistia havia aproximadamente 60 anos: todo grupo finito que admite um automorfismo de ordem prima que fixa apenas o elemento identidade do grupo é nilpotente. Esse trabalho já contém as raízes do que, posteriormente, foi denominada *teoria local* de grupos finitos, um poderoso método de estudo da estrutura de grupos simples a partir de informações sobre alguns de seus subgrupos.

Depois de ocupar posições nas Universidades de Harvard e de Chicago, Thompson foi professor por 23 anos na Universidade de Cambridge, no Reino Unido, onde estabeleceu-se como a maior autoridade mundial em teoria de grupos, na opinião de muitos. Retornou, então, aos Estados Unidos para a sua ocupação atual na Universidade da Flórida.

As várias e profundas contribuições de Thompson à teoria de grupos iniciaram-se na já mencionada tese de doutorado e estenderam-se por toda sua carreira. Em 1963, em colaboração com Walter Feit, Thompson publicou um artigo fundamental ao projeto, então incipiente, de classificação dos grupos simples finitos. É nesse trabalho que a abordagem do problema de determinação da estrutura de alguns subgrupos de um grupo por meio da teoria local é colocada em prática pela primeira vez, produzindo resultados seminais.

Um grupo é, por definição, *simples* se seus únicos subgrupos normais são os triviais. Dado um grupo finito G, uma *série normal* para G é uma sequência de subgrupos

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G,$$

onde, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, G_i é um subgrupo normal de G_{i+1}. Os quocientes G_{i+1}/G_i são chamados de *fatores* da série. Toda série normal pode ser refinada a uma série normal maximal, chamada *série de composição*, cujos fatores são grupos simples. Em particular, todo grupo finito possui uma série de composição. O Teorema de Jordan-Hölder garante que todas as séries de composição de um grupo finito G têm o mesmo comprimento e os mesmos fatores, chamados *fatores de composição* de G, exceto pela ordem em que aparecem. Grupos com fatores de composição bem conhecidos são sujeitos a uma análise mais profunda. Por exemplo, a teoria de *grupos solúveis*, isto é, grupos cujos fatores de composição são grupos cíclicos de ordens primas, está bastante desenvolvida.

Em vista do Teorema de Jordan–Hölder, costuma-se dizer que os grupos simples têm na teoria de grupos finitos o papel que os números primos têm na aritmética. A comparação, porém, não é total, uma vez que os fatores de composição não determinam, a menos de isomorfismo, o grupo G. Assim, seguindo Aschbacher ([1]), o estudo de grupos finitos pode ser decomposto, por um lado, na determinação de todos os grupos simples finitos e, por outro, no tratamento do *Problema da Extensão:* dados grupos finitos X e Y, encontrar todas as *extensões* de X por Y, isto é, todos os grupos G que contêm um subgrupo normal N isomorfo a X de modo que o quociente G/N seja isomorfo a Y.

O Problema da Extensão em sua versão de maior generalidade, como enunciado acima, é muito amplo e, portanto, difícil de ser abordado por métodos gerais. Mas em alguns casos particulares pode ser tratado com êxito. Por exemplo, existe muito investimento atual em pesquisa no problema de determinar o número de classes de isormorfia de grupos de ordem uma potência fixada de um determinado número primo.

Por outro lado, o estudo de grupos simples finitos, considerado no final do século XIX como um problema merecedor de atenção por parte dos pesquisadores em álgebra, já contava em meados do século seguinte com subsídios essenciais, dados os avanços obtidos pela escola de R. Brauer na teoria de representações e de caracteres. Em especial, Brauer havia mostrado que a estrutura de um grupo simples está intimamente relacionada com a de centralizadores de seus elementos de ordem 2. O primeiro anúncio do término da classificação dos grupos simples finitos foi feito em 1981 por D. Gorenstein, embora apenas com a publicação, em 2004, de um último artigo de mais de 1.200 páginas autorado por M. Aschbacher e S. D. Smith, ela foi considerada completa pela maioria dos especialistas na área. Julga-se que a coleção de todos os artigos que a compõem ocupe mais de 10.000 páginas de periódicos e envolva centenas de pesquisadores.

O principal fator a impulsionar esse esforço coletivo que durou três décadas (período que chegou a ser batizado "Guerra dos 30 Anos" por Gorenstein) foi o celebrado "Teorema da Ordem Ímpar" demonstrado por Thompson e Feit e publicado em [3]. Seu enunciado não chega a ocupar uma linha: *todo grupo finito de ordem ímpar é solúvel*. Segue que todo grupo simples finito não abeliano tem ordem par e, assim, contém elementos de ordem 2. A trilha aberta por Brauer revelava-se auspiciosa.

Porém, as contribuições de Thompson para a classificação dos grupos simples finitos não se restringem ao impulso inicial. Como extensão de seu trabalho com Feit, Thompson determinou, em uma série de seis artigos publicados no período de 1968 a 1974, todos os grupos simples finitos cujos subgrupos locais são solúveis, os chamados *N-grupos*. As ferramentas desenvolvidas nesse trabalho por Thompson no escopo da teoria local tiveram aplicações fundamentais em muitas das etapas da classificação. Em 1970, Thompson recebeu a Medalha Fields em reconhecimento pelo impacto de suas idéias originais.

Em poucas palavras, a classificação dos grupos simples finitos os agrupa em quatro classes: os grupos de ordem prima, os grupos alternados de grau maior ou igual a 5, os grupos simples de tipo Lie e, finalmente, os 26 grupos esporádicos, ou seja, grupos simples que não pertencem a nenhuma das três classes anteriores. Tanto Thompson quanto Tits tiveram papel crucial na determinação e descrição de alguns dos grupos esporádicos, incluindo o chamado "Monstro", o maior deles.

Uma introdução mais técnica ao projeto de classificação dos grupos simples finitos, mas que, ainda assim, não contém os detalhes da demonstração, é o artigo [6], escrito por um dos principais personagens envolvidos nessa saga. A obra [4] é o resultado do primeiro esforço de apresentação unificada do esquema da classificação – embora não terminada, como vimos – e também pode ser consultada para maiores detalhes.

O segundo premiado de 2008, **Jacques Tits**, naturalizado francês em 1974, nasceu em Uccle, Bélgica, em 12 de agosto de 1930. Demonstrou precocemente seu talento para a matemática: chegou a receber o título de doutor pela Universidade Livre de Bruxelas aos 19 anos. Antes de assumir a Cátedra de Teoria de Grupos no Collège de France, onde permaneceu até sua aposentadoria em 2000, Tits foi professor na Universidade Livre de Bruxelas e na Universidade de Bonn. Talvez a incumbência de maior importância na vida acadêmica de Tits tenha sido a editoria-chefe das publicações matemáticas do Institut des Hautes Études Scientifiques, na França, cargo que ocupou por 20 anos.

O principal objeto de estudo a que se dedicou são os *grupos lineares*, isto é, subgrupos de grupos $GL(V)$, formados por todos os operadores lineares não singulares de um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo.

Dentre as contribuições de Tits à teoria de grupos, destaca-se a criação do conceito de "building" ("immeuble", em francês). "Buildings" são objetos geométrico-combinatórios que refletem propriedades básicas de grupos lineares. Sua criação deveu-se à intenção original de Tits de definir análogos finitos dos grupos de Lie esporádicos. Apesar de a construção algébrica desses mesmos grupos ter sido antecipada por C. Chevalley, as idéias geométricas de Tits continuaram a florescer. A teoria de "buildings", explorada pela primeira vez em seu influente livro [8], tem diversas aplicações em matemática, em especial ao estudo e à realização de grupos simples de tipo Lie como objetos geométricos.

Muitos dos grupos simples esporádicos tiveram sua existência prevista antes de serem efetivamente construídos, ora descritos por geradores e relações, ora como grupos de simetria em uma geometria apropriada. Os "buildings" de Tits e suas posteriores generalizações tiveram papel fundamental na realização geométrica de muitos dos grupos simples esporádicos.

Não é apenas no âmbito da teoria de grupos finitos que o conceito de "building" tem aplicações importantes. Na realidade, sua força expressa-se mais completamente no estudo da estrutura e representações de grupos algébricos e clássicos simples sobre corpos arbitrários. Uma rica fonte de dados históricos sobre o surgimento do conceito de "building" e seus desdobramentos é o artigo [5], de um dos protagonistas dessa ainda vivaz história.

Outra contribuição de relevância à teoria de grupos lineares de Jacques Tits é a chamada "Alternativa de Tits", publicada originalmente em [7]: todo grupo linear finitamente gerado ou é solúvel-por-finito ou contém um subgrupo livre não cíclico (lembremos que um grupo arbitrário é *solúvel-por-finito* se contiver um subgrupo normal solúvel de índice finito). A Alternativa de Tits tem diversas consequências, por exemplo, implica o fato de todo grupo linear ter crescimento polinomial ou exponencial. Recomenda-se a leitura do texto [2], que contém uma demonstração (mais simples do que a original) da Alternativa de Tits e referências a várias de suas consequências.

Em resumo, pode-se afirmar que John G. Thompson e Jacques Tits deram forma à teoria de grupos a partir de meados do século passado e figuram entre as principais lideranças em pesquisa na área até hoje.

Referências

[1] ASCHBACHER, M. The status of the classification of the finite simple groups. *Notices of the American Mathematical Society*, v. 51, p. 736–740, 2004.

[2] DIXON, J. D. *The Tits alternative*. Ottawa: Carleton University, 1988. (Carleton Mathematical Series, 225)

[3] FEIT, W.; THOMPSON, J. G. Solvability of groups of odd order. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 13, p. 775–1029, 1963.

[4] GORENSTEIN, D. *Finite simple groups. An introduction to their classification*. New York: Plenum, 1982. (University Series in Mathematics)

[5] RONAN, M. From Galois and Lie to Tits buildings. In: DAVIS, C.; ELLERS, E. W. *The Coxeter legacy: reflections and projections*. Providence: AMS, 2006. p. 45–62.

[6] SOLOMON, R. A brief history of the classification of the finite simple groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 38. p. 315–352, 2001.

[7] TITS, J. Free semigroups in linear groups. *Journal of Algebra*, v. 20, p. 250–270, 1972.

[8] TITS, J. *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*. Berlin: Springer, 1974. (Lecture Notes in Mathematics, 386)

Vitor de Oliveira Ferreira (vofer@ime.usp.br)
Departamento de Matemática (IME/USP)
C. P. 66281, 05314–970, São Paulo - SP