

Em 1855, o alemão Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) mudou-se de Berlim para Göttingen, a convite, para substituir Carl Friedrich Gauss (1777–1855), que acabara de falecer. Dirichlet, por sua vez, faleceu pouco depois, em 1859, e o jovem Bernhard Riemann (1826–1866) assumiu seu lugar na chefia do departamento.

Como nos conta Waldyr M. Oliva neste número da *Matemática Universitária*, Dirichlet investigou o problema de uma massa fluida autogravitante em rotação, sem publicar seus resultados, que vieram a público apenas por intermédio e com acréscimos de Richard Dedekind (1831–1916), com o título “Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Aus dessen Nachlass hergestellt von R. Dedekind”, no volume 8 da revista *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 225–264, referente aos anos de 1858 e 1859 (publicado em 1860).

Riemann, então, estendeu esses resultados, publicando o artigo “ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides” no volume seguinte da mesma revista (p. 3–36), referente ao ano de 1860 (publicado em 1861). O artigo de Riemann foi um marco na história da investigação de massas fluidas autogravitantes em rotação, não só por seus resultados, mas também pela polêmica que o envolve até hoje, concernente às afirmações feitas ali sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio.

Há alguns anos, a pedido do Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos (CAMGSD), do Instituto Superior Técnico de Lisboa, o professor Carlos Edgard Harle, do IME/USP, traduziu esse artigo de Riemann. Posto que, até onde sabemos, não há outra versão para qualquer outra língua fora do alemão, julgamos apropriado trazer essa inédita tradução do artigo de Riemann neste número da *Matemática Universitária*, aproveitando o ensejo do relato de Waldyr Oliva, e com a devida autorização do Centro. Ao mesmo tempo em que motiva para uma área de pesquisa ainda com muitas possibilidades, a tradução nos mostra um pouco do pensamento de Riemann e de seus contemporâneos, passados quase 150 anos da publicação original.

Os artigos originais de Dirichlet e Riemann podem ser encontrados no sítio do Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ), no endereço <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/>. A transcrição deste e de outros artigos de Riemann para o LaTeX, em alemão, pode ser encontrada na página de David R. Wilkins, do Trinity College, em Dublin, com endereço [www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/](http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/). Algumas correções do original de Riemann que aparecem na transcrição de Wilkins foram incorporadas em nossa tradução. Portanto, recomendamos àquele que fizer uma leitura cuidadosa do artigo de Riemann que a consulte também. Finalmente, salientamos que nenhuma autorização foi necessária para a publicação da tradução, uma vez que toda a obra de Riemann está livre de direitos autorais.

# *Uma contribuição para as investigações do movimento de um elipsoide líquido homogêneo*

*Bernhard Riemann*

*Tradução de Edgard Harle (IME/USP)*

**D**e um modo surpreendente, Dirichlet, em seu último trabalho, publicado por Dedekind, abriu novo caminho para as investigações do movimento de um elipsoide líquido homogêneo, com elementos atraindo-se segundo a Lei da Gravidade. O acompanhamento dessa bela descoberta é, para o matemático, especialmente excitante, mesmo desconsiderada a questão da causa das formas dos corpos celestes, motivadora dessas investigações. A solução completa do problema, na abordagem de Dirichlet, somente foi dada por ele nos casos mais simples. Para uma continuação dessa investigação, é conveniente dar-se às equações diferenciais do movimento da massa fluida uma forma independente da condição inicial escolhida, o que pode ocorrer pela procura das leis segundo as quais variam a grandeza dos eixos principais e o movimento da massa fluida relativamente a esses eixos. Uma vez que nós trataremos a questão dessa maneira, pressuporemos a publicação de Dirichlet. Porém, para evitar mal entendidos, devemos alertar que não foi possível manter inalterada a notação ali utilizada.

## 1.

Denotamos por  $a, b, c$  os eixos principais do elipsoide no tempo  $t$  e, além disso, por  $x, y, z$  as coordenadas de um elemento da massa fluida no tempo  $t$ , e os valores iniciais dessas grandezas por anexação de um índice 0, e supomos ainda que no instante inicial os eixos principais do elipsoide coincidem com os eixos do sistema de coordenadas.

O ponto de partida para as investigações de Dirichlet é, sabidamente, a observação de que podemos satisfazer as equações diferenciais do movimento das partes do fluido quando exprimimos as coordenadas  $x, y, z$  linearmente em termos das condições iniciais, sendo os coeficientes funções somente do tempo. Escreveremos essas expressões na forma

$$\begin{aligned}x &= \ell \frac{x_0}{a_0} + m \frac{y_0}{b_0} + n \frac{z_0}{c_0} \\y &= \ell' \frac{x_0}{a_0} + m' \frac{y_0}{b_0} + n' \frac{z_0}{c_0} \\z &= \ell'' \frac{x_0}{a_0} + m'' \frac{y_0}{b_0} + n'' \frac{z_0}{c_0}.\end{aligned}\tag{1}$$

Denotando-se por  $\xi, \eta, \zeta$  as coordenadas do ponto  $(x, y, z)$  em relação a um sistema de coordenadas móvel, cujos eixos coincidem, em cada instante, com os eixos principais do elipsoide, temos as expressões lineares dos  $\xi, \eta, \zeta$  em termos dos  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,\end{aligned}\tag{2}$$

onde os coeficientes são os cossenos dos ângulos dos eixos de um dos sistemas com os eixos do outro,  $\alpha = \cos \xi x$ ,  $\beta = \cos \xi y$  etc., e entre esses coeficientes subsistem seis relações, as quais são obtidas através da condição de que as substituições das expressões devem resultar em

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Uma vez que a superfície do elipsoide é sempre formada pelas mesmas partículas do fluido, devemos ter

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2},$$

escrevendo-se então

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{a} &= \alpha_1 \frac{x_0}{a_0} + \beta_1 \frac{y_0}{b_0} + \gamma_1 \frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\eta}{b} &= \alpha'_1 \frac{x_0}{a_0} + \beta'_1 \frac{y_0}{b_0} + \gamma'_1 \frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\zeta}{c} &= \alpha''_1 \frac{x_0}{a_0} + \beta''_1 \frac{y_0}{b_0} + \gamma''_1 \frac{z_0}{c_0},\end{aligned}\tag{3}$$

isto é, denotando-se por  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma''_1$ , os coeficientes que aparecem nas expressões de  $\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$  em termos de  $\frac{x_0}{a_0}, \frac{y_0}{b_0}, \frac{z_0}{c_0}$ , expressões essas obtidas por substituição dos valores

(1) nas igualdades (2), teremos que esses coeficientes constituem, por sua vez, coeficientes de uma transformação ortogonal de coordenadas: estes podem ser vistos como os cossenos dos ângulos formados pelos eixos de um sistema de coordenadas móvel  $\xi, \eta, \zeta$ , com os eixos do sistema fixo de coordenadas  $x, y, z$ . Através das relações (1), (2) e (3) obtemos identidades em  $\frac{x_0}{a_0}, \frac{y_0}{b_0}, \frac{z_0}{c_0}$ , obtendo-se assim

$$\begin{aligned}
 \ell &= a\alpha\alpha_i + b\alpha'\alpha'_i + c\alpha''\alpha''_i \\
 m &= a\alpha\beta_i + b\alpha'\beta'_i + c\alpha''\beta''_i \\
 n &= a\alpha\gamma_i + b\alpha'\gamma'_i + c\alpha''\gamma''_i \\
 \ell' &= a\beta\alpha_i + b\beta'\alpha'_i + c\beta''\alpha''_i \\
 m' &= a\beta\beta_i + b\beta'\beta'_i + c\beta''\beta''_i \\
 n' &= a\beta\gamma_i + b\beta'\gamma'_i + c\beta''\gamma''_i \\
 \ell'' &= a\gamma\alpha_i + b\gamma'\alpha'_i + c\gamma''\alpha''_i \\
 m'' &= a\gamma\beta_i + b\gamma'\beta'_i + c\gamma''\beta''_i \\
 n'' &= a\gamma\gamma_i + b\gamma'\gamma'_i + c\gamma''\gamma''_i.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Daí podemos considerar a posição das partículas do fluido, ou seja, os valores de  $\ell, m, \dots, n''$  no instante  $t$ , como sendo dependentes das grandezas  $a, b, c$  e da posição de dois sistemas de coordenadas móveis, e podemos também notar que, pelo intercâmbio desses dois sistemas de coordenadas, na matriz formada pelos  $\ell, m, n$ , as linhas horizontais são levadas em linhas verticais, permanecendo inalterados os  $\ell, m', n''$  enquanto que os pares de grandezas  $m$  e  $\ell', n$  e  $\ell'', n'$  e  $m''$  têm seus elementos permutados. Nossa próxima tarefa será a de escrever as equações diferenciais para a variação dos eixos principais e para o movimento desses dois sistemas de coordenadas a partir das equações fundamentais do movimento das partículas do fluido, dadas na publicação de Dirichlet (§1, eq. (1)).

## 2.

Evidentemente, é permitido introduzir naquelas equações, em lugar das derivadas de  $x, y, z$  em relação às condições iniciais, que ali são denotadas por  $a, b, c$ , as derivadas relativamente às grandezas  $\xi, \eta, \zeta$ , pois as igualdades assim formadas podem ser representadas por intermédio daquelas, e reciprocamente. Aí nós obtemos, ao substituir  $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$  por seus valores,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma &= \epsilon \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma' &= \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha'' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta'' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma'' &= \epsilon \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial P}{\partial \zeta},
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $V$  denota o potencial,  $P$  a pressão no ponto  $x, y, z$  no tempo  $t$  e  $\epsilon$  a constante que exprime a atração entre as duas massas unitárias, situadas a uma distância unitária.

A seguir, trata-se de substituir os primeiros membros dessas igualdades por expressões lineares de  $\xi, \eta, \zeta$ , sendo necessários, para esse fim, alguns preparativos.

Por diferenciação das equações (2), obtemos, após introduzir as abreviações

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} \alpha + \frac{\partial y}{\partial t} \beta + \frac{\partial z}{\partial t} \gamma &= \xi' \\ \frac{\partial x}{\partial t} \alpha' + \frac{\partial y}{\partial t} \beta' + \frac{\partial z}{\partial t} \gamma' &= \eta' \\ \frac{\partial x}{\partial t} \alpha'' + \frac{\partial y}{\partial t} \beta'' + \frac{\partial z}{\partial t} \gamma'' &= \zeta',\end{aligned}\quad (2)$$

as relações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\alpha}{dt} x + \frac{d\beta}{dt} y + \frac{d\gamma}{dt} z + \xi' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{d\alpha'}{dt} x + \frac{d\beta'}{dt} y + \frac{d\gamma'}{dt} z + \eta' \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{d\alpha''}{dt} x + \frac{d\beta''}{dt} y + \frac{d\gamma''}{dt} z + \zeta'\end{aligned}$$

e, quando aqui exprimimos  $x, y, z$  novamente em termos de  $\xi, \eta, \zeta$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \left( \frac{d\alpha}{dt} \alpha + \frac{d\beta}{dt} \beta + \frac{d\gamma}{dt} \gamma \right) \xi + \left( \frac{d\alpha}{dt} \alpha' + \frac{d\beta}{dt} \beta' + \frac{d\gamma}{dt} \gamma' \right) \eta + \left( \frac{d\alpha}{dt} \alpha'' + \frac{d\beta}{dt} \beta'' + \frac{d\gamma}{dt} \gamma'' \right) \zeta + \xi' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \left( \frac{d\alpha'}{dt} \alpha + \frac{d\beta'}{dt} \beta + \frac{d\gamma'}{dt} \gamma \right) \xi + \left( \frac{d\alpha'}{dt} \alpha' + \frac{d\beta'}{dt} \beta' + \frac{d\gamma'}{dt} \gamma' \right) \eta + \left( \frac{d\alpha'}{dt} \alpha'' + \frac{d\beta'}{dt} \beta'' + \frac{d\gamma'}{dt} \gamma'' \right) \zeta + \eta' \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \left( \frac{d\alpha''}{dt} \alpha + \frac{d\beta''}{dt} \beta + \frac{d\gamma''}{dt} \gamma \right) \xi + \left( \frac{d\alpha''}{dt} \alpha' + \frac{d\beta''}{dt} \beta' + \frac{d\gamma''}{dt} \gamma' \right) \eta + \left( \frac{d\alpha''}{dt} \alpha'' + \frac{d\beta''}{dt} \beta'' + \frac{d\gamma''}{dt} \gamma'' \right) \zeta + \zeta'.\end{aligned}$$

Agora, a diferenciação das conhecidas igualdades  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ,  $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$  etc. fornece

$$\begin{aligned}\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\ \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} &= 0 \\ \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} &= 0 \\ \frac{d\alpha'}{dt} \alpha'' + \frac{d\beta'}{dt} \beta'' + \frac{d\gamma'}{dt} \gamma'' &= -\left( \frac{d\alpha''}{dt} \alpha' + \frac{d\beta''}{dt} \beta' + \frac{d\gamma''}{dt} \gamma' \right) \\ \frac{d\alpha''}{dt} \alpha + \frac{d\beta''}{dt} \beta + \frac{d\gamma''}{dt} \gamma &= -\left( \frac{d\alpha}{dt} \alpha'' + \frac{d\beta}{dt} \beta'' + \frac{d\gamma}{dt} \gamma'' \right) \\ \frac{d\alpha}{dt} \alpha' + \frac{d\beta}{dt} \beta' + \frac{d\gamma}{dt} \gamma' &= -\left( \frac{d\alpha'}{dt} \alpha + \frac{d\beta'}{dt} \beta + \frac{d\gamma'}{dt} \gamma \right)\end{aligned}\quad (3)$$

e, conseqüentemente, ao denotar essas três últimas grandezas por  $p, q, r$ , vem

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{\partial \xi}{\partial t} - r\eta + q\zeta \\ \eta' &= r\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t} - p\zeta \\ \zeta' &= -q\xi + p\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4)$$

Por um procedimento inteiramente análogo, das três igualdades (2) segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma &= \frac{\partial \xi'}{\partial t} - r\eta' + q\zeta' \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma' &= r\zeta' + \frac{\partial \eta'}{\partial t} - p\zeta' \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \gamma' &= -q\zeta' + p\eta' + \frac{\partial \zeta'}{\partial t},\end{aligned}\quad (5)$$

e das equações (1.3), quando  $p, q, r$ , denotam as grandezas que dependem das funções  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ , da mesma maneira que  $p, q, r$  dependem de  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ , segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= r, \frac{\eta}{b} - q, \frac{\zeta}{c} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= p, \frac{\zeta}{c} - r, \frac{\xi}{a} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= q, \frac{\xi}{a} - p, \frac{\eta}{b}.\end{aligned}\quad (6)$$

Substituindo os valores  $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$  de (6) em (4), obtemos

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{da}{dt} \frac{\xi}{a} + (ar - br) \frac{\eta}{b} + (cq - aq_r) \frac{\zeta}{c} \\ \eta' &= (ar - br_r) \frac{\xi}{a} + \frac{db}{dt} \frac{\eta}{b} + (bp_r - cp) \frac{\zeta}{c} \\ \zeta' &= (cq_r - aq) \frac{\xi}{a} + (bp - cp_r) \frac{\eta}{b} + \frac{dc}{dt} \frac{\zeta}{c}.\end{aligned}\quad (7)$$

No que se refere ao significado geométrico dessas grandezas, temos, como é facilmente visível, que  $\xi', \eta', \zeta'$  são as componentes da velocidade do ponto  $x, y, z$  do fluido segundo os eixos  $\xi, \eta, \zeta$ ;  $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$  as componentes das velocidades relativas nesse mesmo sistema de coordenadas; além disso, os primeiros membros de (1) representam acelerações e os segundos membros, forças acelerantes paralelas a esses eixos. Finalmente, os  $p, q, r$  são rotações instantâneas do sistema de coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  e  $p_r, q_r, r_r$  têm o mesmo significado para  $\xi_r, \eta_r, \zeta_r$ .

### 3.

Se substituirmos  $\xi', \eta', \zeta'$  dados por (7) nas equações (5) e utilizamos (6) para substituir as derivadas de  $\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$  por expressões envolvendo  $\xi, \eta, \zeta$ , teremos que o primeiro membro de (1) torna-se uma expressão linear de  $\xi, \eta, \zeta$ . Para o segundo membro de (1) temos que  $V$  tem a forma

$$H - A\xi^2 - B\eta^2 - C\zeta^2,$$

onde  $H, A, B, C$  dependem de  $a, b, c$ , de um modo conhecido. Podemos consistentemente supor que na superfície do elipsoide a pressão tenha um valor constante  $Q$ ,

exprimir a pressão  $P$  por

$$P = Q + \sigma \left( 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} \right),$$

impor que as dez funções do tempo  $a, b, c; p, q, r; p', q', r'$  e  $\sigma$  sejam tais que os nove coeficientes de  $\xi, \eta, \zeta$  nos dois membros de (1) possam ser respectivamente iguais, e supor também que a condição de incompressibilidade  $abc = a_0 b_0 c_0$  esteja verificada. Ao igualar os coeficientes de  $\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}$  na primeira equação e os coeficientes de  $\frac{\xi}{a}$  na segunda, vem

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + 2brr' + 2cq'q' - a(r^2 + r_i^2 + q^2 + q_i^2) = 2\frac{\sigma}{a} - 2\varepsilon a A$$

$$a \frac{dr}{dt} - b \frac{dr_i}{dt} + 2 \frac{da}{dt} r - 2 \frac{db}{dt} r_i + apq + bp_i q_i - 2cpq_i = 0$$

$$a \frac{dr_i}{dt} - b \frac{dr}{dt} + 2 \frac{da}{dt} r_i - 2 \frac{db}{dt} r + ap_i q_i + bpq - 2cp_i q = 0.$$

As seis equações restantes são obtidas por permutação cíclica dos eixos, ou também por permutações arbitrárias, quando notamos que, por uma troca de dois eixos, não somente as grandezas correspondentes são trocadas, mas também as seis grandezas  $p, q, \dots, r, r'$  mudam de sinal.

Visando investigações subsequentes, podemos dar a essas equações uma forma mais apropriada, ao introduzir, no lugar das grandezas  $p, p'; q, q'; r, r'$ , suas semissomas e semidiferenças

$$u = \frac{p + p'}{2}, v = \frac{q + q'}{2}, w = \frac{r + r'}{2}, u' = \frac{p - p'}{2}, v' = \frac{q - q'}{2}, w' = \frac{r - r'}{2},$$

como novas incógnitas.

Assim temos o sistema de equações ao qual devem satisfazer as dez funções do tempo desconhecidas:

$$\begin{aligned} (a - c)v^2 + (a + c)v'^2 + (a - b)w^2 + (a + b)w'^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 a}{dt^2} &= \varepsilon a A - \frac{\sigma}{a}, \\ (b - a)w^2 + (b + a)w'^2 + (b - c)u^2 + (b + c)u'^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 b}{dt^2} &= \varepsilon b B - \frac{\sigma}{b}, \\ (c - b)u^2 + (c + b)u'^2 + (c - a)v^2 + (c + a)v'^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 c}{dt^2} &= \varepsilon c C - \frac{\sigma}{c}, \\ (b - c) \frac{du}{dt} + 2 \frac{d(b - c)}{dt} u + (b + c - 2a)vw + (b + c + 2a)v'w' &= 0, \\ (b + c) \frac{du'}{dt} + 2 \frac{d(b + c)}{dt} u' + (b - c + 2a)vw' + (b - c - 2a)v'w &= 0, \\ (c - a) \frac{dv}{dt} + 2 \frac{d(c - a)}{dt} v + (c + a - 2b)wu + (c + a + 2b)w'u' &= 0, \end{aligned} \tag{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
(c+a)\frac{dv'}{dt} + 2\frac{d(c+a)}{dt}v' + (c-a+2b)wu' + (c-a-2b)w'u &= 0, \\
(a-b)\frac{dw}{dt} + 2\frac{d(a-b)}{dt}w + (a+b-2c)uv + (a+b+2c)u'v' &= 0, \\
(a+b)\frac{dw'}{dt} + 2\frac{d(a+b)}{dt}w' + (a-b+2c)uv' + (a-b-2c)u'v &= 0,
\end{aligned} \tag{\alpha}$$

$$abc = a_0b_0c_0.$$

Os valores de  $A, B, C$  são obtidos a partir da conhecida expressão de  $V$

$$V = H - A\xi^2 - B\eta^2 - C\zeta^2 = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left( 1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} - \frac{\zeta^2}{c^2+s} \right),$$

onde

$$\Delta = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right) \left(1 + \frac{s}{b^2}\right) \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}.$$

Após a integração desse sistema devemos ainda, para determinar as funções  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ , procurar a solução geral  $\theta, \theta', \theta''$  das equações diferenciais

$$\frac{d\theta}{dt} = r\theta' - q\theta'', \quad \frac{d\theta'}{dt} = -r\theta + p\theta'', \quad \frac{d\theta''}{dt} = q\theta - p\theta' \tag{\beta}$$

das quais, como vem de (2.3),  $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$  são as três soluções particulares que, para  $t = 0$ , valem respectivamente  $1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1$ . Para determinar as funções  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$  devemos obter a solução geral do sistema

$$\frac{d\theta_i}{dt} = r_i\theta'_i - q_i\theta''_i, \quad \frac{d\theta'_i}{dt} = -r_i\theta_i + p_i\theta''_i, \quad \frac{d\theta''_i}{dt} = q_i\theta_i - p_i\theta'_i. \tag{\gamma}$$

#### 4.

Coloca-se agora a questão de saber quais são os meios que os princípios gerais da hidrodinâmica nos fornecem para a integração das equações diferenciais  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ . Desses princípios Dirichlet obteve sete integrais de primeira ordem para as equações diferenciais a serem satisfeitas pelas funções  $\ell, m, \dots, n''$ . As igualdades daí decorrentes podem ser facilmente obtidas através das expressões de  $\zeta', \eta', \zeta'$  dadas acima.

A conservação das áreas nos dá

$$\begin{aligned}
(b-c)^2u + (b+c)^2u' &= g = \alpha g^0 + \beta h^0 + \gamma k^0 \\
(c-a)^2v + (c+a)^2v' &= h = \alpha' g^0 + \beta' h^0 + \gamma' k^0 \\
(a-b)^2w + (a+b)^2w' &= k = \alpha'' g^0 + \beta'' h^0 + \gamma'' k^0,
\end{aligned} \tag{1}$$

onde as constantes  $g^0, h^0, k^0$ , valores iniciais de  $g, h, k$ , coincidem com as constantes  $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$  da publicação de Dirichlet; temos o resultado facilmente justificável, por meio das equações  $(\alpha)$ , que  $\theta = g, \theta' = h, \theta'' = k$  é uma solução da equação diferencial  $(\beta)$ .

Do princípio de Helmholtz da conservação da rotação seguem as equações

$$\begin{aligned}(b-c)^2u - (b+c)^2u' &= g_l = \alpha_l g_l^0 + \beta_l h_l^0 + \gamma_l k_l^0 \\ (c-a)^2v - (c+a)^2v' &= h_l = \alpha'_l g_l^0 + \beta'_l h_l^0 + \gamma'_l k_l^0 \\ (a-b)^2w - (a+b)^2w' &= k_l = \alpha''_l g_l^0 + \beta''_l h_l^0 + \gamma''_l k_l^0,\end{aligned}\quad (2)$$

nas quais as constantes  $g_l^0, h_l^0, k_l^0$  coincidem com as grandezas  $BC\mathfrak{A}, CA\mathfrak{B}, AB\mathfrak{C}$ .

O princípio de conservação das forças vivas, finalmente, nos dá uma integral de primeira ordem das equações diferenciais ( $\alpha$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left( \frac{db}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \right) \\ + (b-c)^2u^2 + (c-a)^2v^2 + (a-b)^2w^2 \\ + (b+c)^2u'^2 + (c+a)^2v'^2 + (a+b)^2w'^2 \end{array} \right\} = 2\varepsilon H + \text{const.} \quad (I)$$

Das equações (1) e (2) seguem ainda duas integrais de ( $\alpha$ ):

$$g^2 + h^2 + k^2 = \text{const.} = \omega^2, \quad (II)$$

$$g_l^2 + h_l^2 + k_l^2 = \text{const.} = \omega_l^2. \quad (III)$$

Além disso, obtemos das equações ( $\beta$ ) duas integrais

$$\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 = \text{const.}, \quad (IV)$$

$$\theta g + \theta' h + \theta'' k = \text{const.}, \quad (V)$$

através das quais a sua integração se reduz, em geral, a uma quadratura. Para a obtenção de sua solução geral, dado que esse sistema é linear e homogêneo, basta dar somente duas soluções particulares distintas dentre as  $g, h, k$ ; para esse fim, podemos escolher as constantes arbitrárias nessas duas integrais, de tal modo que os cálculos se simplifiquem. Atribuindo-se a ambas o valor zero, teremos

$$\theta' h + \theta'' k = -g\theta \quad (3)$$

e, além disso, elevando-se essa última ao quadrado e somando com o produto da igualdade

$$-\theta'^2 - \theta''^2 = \theta^2$$

por  $h^2 + k^2$ , temos

$$-(\theta' k - \theta'' h)^2 = \omega^2 \theta^2$$

e, portanto,

$$\theta' k - \theta'' h = \omega i \theta. \quad (4)$$

Através da solução dessas duas equações lineares (3) e (4) obtém-se

$$\theta' = \frac{-gh + k\omega i}{h^2 + k^2} \theta, \quad (5)$$

$$\theta'' = \frac{-gk - h\omega i}{h^2 + k^2} \theta, \quad (6)$$

e, através da substituição na primeira das equações ( $\beta$ ), vem

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-g}{h^2 + k^2} \frac{dg}{dt} + \frac{rk + qh}{h^2 + k^2} \omega i$$

$$\log \theta = \frac{1}{2} \log(h^2 + k^2) + \omega i \int \frac{qh + rk}{h^2 + k^2} dt + \text{const.} \quad (7)$$

Dessa solução de ( $\beta$ ), contida em (5), (6) e (7), obtém-se uma terceira, ao trocar-se  $\sqrt{-1}$  por  $-\sqrt{-1}$  em todo lugar, e é então fácil, a partir das três soluções particulares encontradas, deduzir expressões para as funções  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ .

O significado geométrico de cada uma das soluções reais das equações diferenciais ( $\beta$ ) consiste no fato de que essas soluções, multiplicadas por um fator conveniente, fornecem os cossenos dos ângulos formados por uma reta fixa com os eixos  $\xi, \eta, \zeta$  no tempo  $t$ . Para a primeira das três soluções encontradas, essa reta é a normal ao plano invariante de toda a massa fluida; para a parte real e a imaginária das duas outras soluções, as correspondentes retas estão contidas no plano invariante e são perpendiculares entre si. Os cossenos dos ângulos entre os eixos e aquelas retas são, respectivamente,  $\frac{g}{\omega}, \frac{h}{\omega}, \frac{k}{\omega}$ ; a posição dos eixos em relação a essas retas é, então, dada pela solução de ( $\alpha$ ) sem nenhuma outra integração e, para a determinação completa de sua posição, basta uma única integração, por exemplo

$$\omega \int_0^t \frac{qh + rk}{h^2 + k^2} dt,$$

sendo que essa representa a rotação, em torno da perpendicular ao plano determinado pela reta e pelo eixo  $\zeta$ .

Um fato análogo vale para as equações diferenciais ( $\gamma$ ). Pelo mesmo caminho, podemos obter sua solução geral a partir das duas integrais

$$\theta_i^2 + \theta_i'^2 + \theta_i''^2 = \text{const.} \quad (VI)$$

$$\theta_i g_i + \theta_i' h_i + \theta_i'' k_i = \text{const.} \quad (VII)$$

e, conseqüentemente, determinar as grandezas  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ , e para isso somente é exigida uma quadratura. Finalmente, a posição de um elemento arbitrário do fluido, no tempo  $t$ , é dada pelas expressões (1.1) e (1.4) das grandezas  $x, y, z$  e das funções  $\ell, m, \dots, n''$ .

## 5.

Daremos agora uma justificação do ganho resultante da passagem das equações diferenciais referentes às funções  $\ell, m, \dots, n''$  (as equações (a), §1 de Dirichlet) para as nossas equações, no que se refere à integração dessas equações. O sistema de equações diferenciais (a) tem ordem dezesseis e são conhecidas sete integrais de primeira ordem, ficando portanto o sistema reduzido a um de ordem nove. O sistema ( $\alpha$ ) somente tem ordem dez e nós conhecemos três integrais de primeira ordem do mesmo. Portanto,

pela mudança feita, devemos ainda integrar um sistema de ordem reduzida em duas unidades e, na realidade, teremos que, no lugar desse, efetuar somente mais duas quadraturas. A transformação efetuada tem, portanto, o mesmo efeito que encontrar mais duas integrais de primeira ordem.

Nós notamos a esse respeito, explicitamente, que o nosso procedimento somente apresenta vantagem para a integração e para a determinação de fato do movimento. Essa forma é, no entanto, menos apropriada para a análise geral do movimento, não somente porque a sua dedução é menos simples, mas também porque a coincidência de dois dos eixos demanda uma consideração à parte. No caso de coincidência de dois eixos surge uma situação especial, isto é, a posição dos eixos não é inteiramente determinada pela forma da massa fluida; esta depende, em geral, também do movimento instantâneo e permanece somente sob controle quando esse movimento é de sorte que os eixos coincidentes continuam coincidindo. A análise desse fato é sempre simples e não necessita maior desenvolvimento mas, em casos especiais, pode novamente assumir formas incomuns, e as análises, como por exemplo a análise geral do movimento (§2, em Dirichlet), seriam, em vista do número de casos especiais a tratar, bastante extensas.

Antes de entrarmos no tratamento de casos especiais, nos quais é possível integrar as equações diferenciais ( $\alpha$ ), é útil notar, e isso segue imediatamente da forma dessas equações, que toda mudança dos sinais de  $u, v, \dots, w'$  é admitida, desde que os produtos  $uvw, uv'w', u'vw', u'v'w$  não sejam alterados. Então também podem ser mudados simultaneamente os sinais de  $u', v', w'$  e, em consequência, as grandezas  $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$  são trocadas pelas  $\alpha', \beta', \dots, \gamma'''$ ; portanto, no sistema de grandezas  $\ell, m, \dots, n''$ , as linhas horizontais são trocadas pelas linhas verticais. Em segundo lugar, podemos mudar o sinal de dois pares  $u, u'; v, v'; w, w'$ , e essa mudança pode ser relacionada à mudança de sentido de um dos eixos de coordenadas, transformando-se o movimento em um que é simétrico ao anterior. Nessa observação está contido o princípio de reciprocidade de Dedekind.

## 6.

Agora examinaremos o caso em que um dos pares  $u, u'; v, v'; w, w'$  é sempre nulo, assim por exemplo  $u = u' = 0$ ; o significado geométrico dessa condição é que o eixo principal  $a$  está sempre no plano invariante da massa movimentada e o eixo instantâneo de rotação é ortogonal a esse eixo principal.

Das seis equações diferenciais ( $\alpha$ ) segue, nesse caso, que as grandezas

$$(c - a)^2 v, (c + a)^2 v', (a - b)^2 w, (a + b)^2 w' \quad (\mu)$$

são constantes, e as igualdades

$$\begin{aligned} (b + c - 2a)vw + (b + c + 2a)v'w' &= 0 \\ (b - c + 2a)vw' + (b - c - 2a)v'w &= 0 \end{aligned} \quad (\nu)$$

devem se verificar.

Na investigação subsequente deve ser distinguido o caso em que mais de um par é nulo. Genericamente nós somente podemos observar que, em vista das equações ( $\mu$ ), as grandezas  $h, k, h', k'$  são constantes e, conseqüentemente, também são constantes os ângulos entre os eixos principais e o plano invariante da massa em movimento, e que, além disso, seguem das equações diferenciais ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) as igualdades das proporções

$$g : h : k = p : q : r$$

$$g' : h' : k' = p' : q' : r'$$

através do que as soluções dessas equações se simplificam.

**Primeiro caso. Somente um dos três pares  $u, u'$ ;  $v, v'$ ;  $w, w'$  se anula.** No caso em que nenhum dos  $v, v'$ , ou  $w, w'$  são simultaneamente nulos, segue das equações ( $\mu$ ) e ( $\nu$ )

$$\begin{aligned} \frac{v'^2}{v^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)} = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^4 \text{ const.} \\ \frac{w'^2}{w^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 \text{ const.,} \end{aligned} \quad (1)$$

de onde, com o recurso

$$abc = \text{const.},$$

obtemos que  $a, b, c$  e, conseqüentemente,  $v, v', w, w'$  são constantes.

Fazendo

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{(2a+b+c)(2a-b+c)} &= \frac{v'^2}{(2a-b-c)(2a+b-c)} = S \\ \frac{w^2}{(2a+b+c)(2a+b-c)} &= \frac{w'^2}{(2a-b-c)(2a-b+c)} = T, \end{aligned} \quad (2)$$

obtemos das primeiras três equações diferenciais ( $\alpha$ ) as equações

$$(4a^2 - b^2 - 3c^2)S + (4a^2 - 3b^2 - c^2)T = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma}{2a^2}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} (b^2 - c^2)T = \frac{\varepsilon B}{2} - \frac{\sigma}{2b^2} \\ (c^2 - b^2)S = \frac{\varepsilon C}{2} - \frac{\sigma}{2c^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Para obter daqui os valores de  $S, T$  e  $\sigma$ , formamos, a partir das equações (4), as equações

$$\begin{aligned} b^2T + c^2S &= \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)} \\ T + S &= \frac{\sigma}{2b^2c^2} - \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)}, \end{aligned}$$

e substituímos esses valores na equação (3)

$$(4a^2 - b^2 - c^2)(T + S) - 2(b^2T + c^2S) = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma}{2a^2},$$

obtendo, com isso,

$$\frac{D\sigma}{2a^2b^2c^2} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left( \frac{2s + 4a^2 - b^2 - c^2}{(b^2 + s)(c^2 + s)} + \frac{1}{a^2 + s} \right), \quad (5)$$

onde se usa a notação abreviada

$$4a^4 - a^2(b^2 + c^2) + b^2c^2 = D. \quad (6)$$

Por substituição do valor de  $\sigma$  nas equações (4), obtém-se

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} DS = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta(b^2 + s)} \left( \frac{4a^2 - c^2 + b^2}{c^2 + s} - \frac{b^2}{a^2 + s} \right) \quad (7)$$

$$\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} DT = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta(c^2 + s)} \left( \frac{4a^2 - b^2 + c^2}{b^2 + s} - \frac{c^2}{a^2 + s} \right). \quad (8)$$

Resta ainda analisar as condições a serem satisfeitas por  $a, b, c$ , de modo que das equações (7), (8) e das equações (2) resultem valores reais de  $v, v', w, w'$ .

Para que  $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$  e  $\left(\frac{w'}{w}\right)^2$  não se tornem negativos, é necessário e suficiente que

$$(4a^2 - (b + c)^2)(4a^2 - (b - c)^2) \geq 0.$$

Portanto  $a^2$  deve ser maior ou igual que  $\geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ , ou menor ou igual do que  $\leq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ .

No caso  $a \geq \frac{b+c}{2}$ , as grandezas  $S$  e  $T$  devem ser ambas não negativas, para que as equações (2) deem valores reais para  $v, v', w, w'$ . Agora podemos mostrar facilmente que quando  $a \geq \frac{b+c}{2}$  então  $D$  e as duas integrais dos segundos membros das equações (7) e (8) são sempre positivas. Para isso, basta escrever  $D$  sob a forma

$$a^2(4a^2 - (b + c)^2) + bc(2a^2 + bc),$$

a integral contida em (7) sob a forma

$$\frac{\varepsilon\pi}{2a^2b^2c^2} \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta^3} ((4a^2 - c^2)s + a^2(4a^2 + b^2 - c^2) - b^2c^2)$$

e, após isso, notar que, de  $a \geq \frac{b+c}{2}$ , vêm as seguintes desigualdades:  $4a^2 - (b + c)^2 \geq 0$ ,  $4a^2 - c^2 > 0$ ; também temos

$$4a^2 + b^2 - c^2 \geq (b + c)^2 + b^2 - c^2 = 2b(b + c),$$

e daí

$$a^2(4a^2 + b^2 - c^2) \geq 2b(b + c)a^2 \geq \frac{1}{2}b(b + c)^3 > b^2c^2.$$

Dessas desigualdades segue que tanto  $D$  como a integral considerada têm somente partes constituintes positivas, e o mesmo vale para a integral do primeiro membro de (8), que é obtida daquela integral pela troca de  $b$  com  $c$ . Deixando agora  $a$  percorrer os valores de  $\frac{b+c}{2}$  até  $\infty$  teremos, para  $b > c$ , que  $T$  permanece sempre positivo, mas  $S$  somente permanece assim enquanto  $a < b$ . As condições para esse caso são, portanto,  $b$  denotando o maior dos eixos  $b$  e  $c$ ,

$$\frac{b + c}{2} \leq a \leq b. \quad (I)$$

Para a análise do segundo caso, quando  $a^2 \leq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ , vamos admitir que  $b$  denote o maior dos eixos  $b$  e  $c$ , de maneira que  $a \leq \frac{b-c}{2}$ . Então, para que  $v, v', w, w'$  sejam reais, devemos ter  $S \leq 0$  e  $T \geq 0$ . Devido ao fato de que das desigualdades

$$b^2 \geq (2a + c)^2 > 4a^2 + c^2$$

segue que a integral do primeiro membro de (8) no nosso caso é sempre negativa, temos que a última condição  $T \geq 0$  somente será satisfeita quando  $D(c^2 - a^2) \geq 0$ , portanto  $c^2$  é ou menor que  $\frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2}$  ou maior ou igual a  $a^2$ . Esse caso se decompõe novamente em dois casos, e esses são, em vista de  $\frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2} < a^2$ , separados por um intervalo finito, de modo que não há passagem contínua de um para o outro. Tendo em vista que a integral na equação (7), enquanto tivermos  $c^2 \leq a^2$ , e em consequência das desigualdades  $c^2 + s \leq a^2 + s$ ,  $4a^2 - c^2 + b^2 > b^2$ , somente pode ser positiva, temos que as condições a serem satisfeitas no primeiro destes casos se reduzem a  $a \leq \frac{b-c}{2}$  ou

$$c \leq b - 2a \quad \text{e} \quad c^2 < \frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2} \quad (\text{II})$$

e, no segundo caso, a

$$a \leq \frac{b-c}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta(b^2 + s)} \left( \frac{4a^2 - c^2 + b^2}{c^2 + s} - \frac{b^2}{a^2 + s} \right) \leq 0. \quad (\text{III})$$

Vê-se com facilidade que a integral do segundo membro da última desigualdade, ao  $a$  percorrer os valores de 0 a  $c$ , permanece negativa enquanto  $a \leq \frac{c}{2}$ , e assume um valor positivo para  $a = c$ ; mas a determinação exata dos limites dentro dos quais essa desigualdade é válida depende, como podemos ver, da solução de uma equação transcendente.

No que se refere ao sinal de  $\sigma$ , o qual, sabidamente, decide se o movimento sem pressão externa é possível, podemos perceber que o valor dessa grandeza, encontrado acima, pode ser escrito como

$$\frac{\varepsilon\pi}{D} \int_0^\infty \frac{3s^2 + 6a^2s + D}{\Delta^3} ds,$$

sendo, portanto, positivo nos casos I e III, onde, em todo caso,  $D > 0$ ; por outro lado, para um valor negativo de  $D$ , pelo menos enquanto o seu valor absoluto é inferior a um certo limite, aquele valor se torna negativo.

## 7.

**Segundo caso. Dois dos pares  $u, u'$ ;  $v, v'$ ;  $w, w'$  são nulos.** Ainda devemos tratar do caso onde dois dos pares  $u, u'$ ;  $v, v'$ ;  $w, w'$  são sempre nulos, havendo portanto uma rotação em torno de um eixo principal.

No caso em que, além de  $u, u'$ , os  $v, v'$  também são constantemente nulos, as equações ( $\mu$ ) e ( $\nu$ ) se reduzem a

$$(a - b)^2 w = \text{const.} = \tau \quad \text{e} \quad (a + b)^2 w' = \text{const.} = \tau',$$

e daí as três primeiras equações diferenciais ( $\alpha$ ) dão as equações

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{(a-b)^3} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon a A - \frac{\sigma}{a}, \\ \frac{\tau^2}{(b-a)^3} + \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2b}{dt^2} &= \varepsilon b B - \frac{\sigma}{b}, \\ -\frac{1}{2} \frac{d^2c}{dt^2} &= \varepsilon c C - \frac{\sigma}{c},\end{aligned}\quad (1)$$

as quais, em conexão com

$$abc = a_0 b_0 c_0,$$

forneem as grandezas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $\sigma$  em função do tempo. O princípio da conservação das forças vivas fornece uma integral de primeira ordem para essas equações diferenciais,

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left( \frac{db}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \right) + \frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} = 2\varepsilon H + \text{const.}, \quad (2)$$

de onde segue imediatamente que se  $\tau$  não é igual a zero então os eixos principais  $a$  e  $b$  jamais poderão ser iguais.

Além dos casos em que  $a = b$ , já tratados por Maclaurin e Dirichlet, temos ainda, para o caso em que as grandezas  $a, b, c$  são constantes, uma determinação do movimento por expressões explícitas. Nesse caso obtêm-se de (1), por eliminação de  $\sigma$ , as duas equações

$$\begin{aligned}\frac{\tau'^2}{(b+a)^3} + \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{b} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{(b^2 - c^2)s}{(b^2 + s)(c^2 + s)} = K \\ \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{a} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{(a^2 - c^2)s}{(a^2 + s)(c^2 + s)} = L,\end{aligned}\quad (3)$$

onde as integrais dos segundos membros são denotadas por  $K$  e  $L$ ; elas também podem ser postas sob a forma

$$w'^2 = \frac{\tau'^2}{(b+a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left( \frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)} - \frac{c^2}{ab(c^2+s)} \right) \quad (4)$$

$$w^2 = \frac{\tau^2}{(b-a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left( \frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)} + \frac{c^2}{ab(c^2+s)} \right). \quad (5)$$

Suponhamos, como anteriormente, que  $b$  denote o maior dos dois eixos principais  $a$  e  $b$ ; então essas duas equações nos darão valores positivos para  $\tau^2$  e  $\tau'^2$  se, e somente se,  $K$  é positivo e é maior que o valor absoluto de  $L$ ; e é claro que a primeira dessas condições está verificada enquanto  $c < b$ . A segunda condição estará satisfeita se  $c = a$ , ou seja, se  $L = 0$  e, conseqüentemente, também em um intervalo aberto contendo  $a$  em seu interior, uma vez que  $K$  e  $L$  variam continuamente com  $c$ . Mas isso não se estende até os valores 0 e  $b$ , pois para  $c = b$  o valor de  $\tau'^2$  seria negativo e para um  $c$  infinitamente pequeno seria  $\tau^2$ , daí teríamos

$$\frac{K}{c} = \varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(1+s)^3(1+\frac{b^2}{a^2}s)}}, \quad \frac{L}{c} = \varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s(1+s)^3(1+\frac{a^2}{b^2}s)}}$$

e, conseqüentemente,  $L > K$ . Suponhamos agora que  $b$  tende para o infinito enquanto  $a$  e  $c$  permanecem finitos; nesse caso,  $L$  somente pode permanecer menor do que  $K$  se  $a^2 - c^2$  tende a zero. Portanto as duas limitações de  $c$  convergem para  $a$ . Se, ao contrário,  $b$  tende para sua limitação inferior  $a$ , então a limitação superior de  $c$  converge para o valor de  $a$  já que  $\tau'^2 = 0$ , e a limitação inferior tende para um valor onde a integral do segundo membro de (5) se anula. Para a determinação desse valor, fazendo  $\frac{c}{a} = \text{sen}\psi$ , temos

$$(-5 + 2 \cos 2\psi + \cos 4\psi)(\pi - 2\psi) + 10 \sin 2\psi + 2 \sin 4\psi = 0,$$

e essa equação tem, entre  $\psi = 0$  e  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , somente uma raiz, a saber

$$\frac{c}{a} = 0,303327\dots$$

Para  $b = a$ , o valor de  $c$  pode, evidentemente, ser qualquer um entre 0 e  $b$ , uma vez que, em vista da presença do fator  $b - a$ ,  $\tau^2$  é sempre nulo. Obtém-se então o caso estudado por Maclaurin, enquanto que para  $w^2 = w'^2$  apresentam-se os casos encontrados por Jacobi e Dedekind.

O caso que acabamos de analisar coincide, para  $a = b$ , com o caso (I) estudado na seção anterior, e para

$$\frac{w^2}{(b+c+2a)(b-c+2a)} = \frac{w'^2}{(b+c-2a)(b-c-2a)},$$

com o caso (III). Dos quatro casos até aqui encontrados, nos quais o elipsoide líquido não muda a sua forma durante o movimento, estes três casos estão ligados entre si continuamente, permanecendo o caso (II) isolado.

## 8.

O exame da possibilidade de existirem, além desses quatro casos, outros nos quais os eixos principais permanecem constantes durante o movimento, nos conduz a um cálculo bastante extenso, que indicaremos com brevidade, uma vez que o mesmo produz um resultado negativo.

Da hipótese de  $a, b, c$  serem constantes podemos deduzir com facilidade que  $\sigma$  é constante, multiplicando-se as três primeiras equações ( $\alpha$ ) por  $a, b, c$ , respectivamente, somando-se essas novas igualdades e finalmente usando a integral (4.I), isto é, o princípio da conservação das forças vivas.

Por meio de diferenciação dessas três equações obtemos também, ao substituir os valores de  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \dots, \frac{dw}{dt}$ , dados pelas seis últimas equações diferenciais ( $\alpha$ ), as três igualdades

$$\begin{aligned} (b-c)u(vw - v'w') + (b+c)u'(v'w - vw') &= 0 \\ (c-a)v(wu - w'u') + (c+a)v'(w'u - wu') &= 0 \\ (a-b)w(uv - u'v') + (a+b)w'(u'v - uv') &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo que qualquer uma dessas é consequência das outras duas.

I. Se nenhuma das seis grandezas  $u, u', \dots, w'$  é nula, seguem dessas equações as igualdades dos três seguintes pares, cujos valores denotamos, respectivamente, por  $2a', 2b', 2c'$ .

$$\begin{aligned}(a-c)\frac{v}{v'} + (a+c)\frac{v'}{v} &= (a-b)\frac{w}{w'} + (a+b)\frac{w'}{w} = 2a', \\ (b-a)\frac{w}{w'} + (b+a)\frac{w'}{w} &= (b-c)\frac{u}{u'} + (b+c)\frac{u'}{u} = 2b', \\ (c-b)\frac{u}{u'} + (c+b)\frac{u'}{u} &= (c-a)\frac{v}{v'} + (c+a)\frac{v'}{v} = 2c'.\end{aligned}$$

Temos então  $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ ,  $b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2$ , podendo-se assim escrever

$$aa - a'a' = bb - b'b' = cc - c'c' = \theta$$

e das três equações diferenciais ( $\alpha$ ) obter

$$2\omega a' = \text{const.}, \quad 2\chi b' = \text{const.}, \quad 2\rho c' = \text{const.},$$

onde, para abreviar, fizemos  $vv' + ww'$ ,  $ww' + uu'$ ,  $uu' + vv'$ , respectivamente,  $\omega, \chi, \rho$ . Dessas igualdades e da equação

$$(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\omega + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\chi + (c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\rho = \frac{1}{4}(\omega^2 - \rho^2),$$

que segue facilmente das equações integrais (II) e (III), vem que, quando não valem  $a = b = c$ , que  $\theta$  e, conseqüentemente,  $u, u', \dots, w'$  devem ser constantes. Mas vemos facilmente que, nesse caso, as seis últimas equações diferenciais ( $\alpha$ ) não podem ser satisfeitas; assim, fica estabelecido que, no caso em que os três eixos não coincidem, os  $u, u', \dots, w'$  são todos diferentes de zero.

A hipótese  $a = b = c$  nos conduziria ao caso de uma esfera em repouso:  $u', v', w'$  resultam iguais a zero, mas  $u, v, w$  permanecem completamente arbitrários, o que vem do fato de que, em cada instante, a posição dos eixos pode ser arbitrariamente modificada.

II. Resta somente a hipótese de que uma das grandezas  $u, u', \dots, w'$  é nula e esta acarreta sempre, como logo veremos, a condição anteriormente examinada, a saber, que um dos três pares  $u, u'; v, v'; w, w'$  é nulo.

1. Quando uma das grandezas  $u', v', w'$  é nula, por exemplo,  $u' = 0$ , seguem de (1) as igualdades

$$(b-c)uvw = 0, \quad (b-c)uv'w' = 0,$$

e estas permitem somente uma das três hipóteses seguintes: primeiro a hipótese anteriormente examinada; segundo  $b = c$ ; terceiro  $v = 0$  e  $w' = 0$  ou  $v' = 0$  e  $w = 0$ , sendo que estas duas alternativas não são essencialmente distintas.

Quando  $b = c$  temos que  $u$  é totalmente arbitrário, podendo portanto ser colocado  $u = 0$ , retornando-se ao caso examinado anteriormente.

Quando  $v = 0$  e  $w' = 0$ , obtemos das equações diferenciais ( $\alpha$ )

$$\begin{aligned}(b - c - 2a)uv'w &= 0 \\ (c + a - 2b)uv'w &= 0 \\ (a - b + 2c)uv'w &= 0\end{aligned}$$

e, somando a primeira dessas igualdades à segunda, vem

$$-(a + b)uv'w = 0;$$

vemos então que, além das  $u', v, w'$ , ainda uma das  $u, v', w$  deve ser nula e retornamos, novamente, ao caso anteriormente examinado.

2. Finalmente, se uma das grandezas  $u, v, w$ , por exemplo  $u = 0$ , segue das equações (1)

$$u'v'w = 0, \quad u'vw' = 0,$$

e estas equações ou nos conduzem ao caso anteriormente examinado ou à hipótese  $u = v' = w' = 0$ , a qual não é essencialmente distinta da hipótese  $u' = v = w' = 0$ , que acabamos de ver ou, finalmente, a  $u = v = w = 0$ . Aqui as equações diferenciais ( $\alpha$ ) nos dão  $v'w' = w'u' = u'v' = 0$ , portanto mais duas das grandezas  $u', v', w'$  devem ser nulas, o que nos conduz novamente ao caso anteriormente examinado.

Resulta então que a imutabilidade da forma está necessariamente ligada a uma imutabilidade do estado do movimento, isto é, quando a massa fluida persiste em formar o mesmo corpo, também o movimento relativo de todas as partes desse corpo permanece sempre o mesmo. Nesse caso podemos imaginar o movimento absoluto no espaço como a composição de dois movimentos mais simples, isto é, conceber o movimento decomposto, primeiramente em um movimento interno, no qual as partículas do fluido se movimentam ao longo de elipses paralelas semelhantes e perpendiculares a uma seção principal, e em segundo lugar em uma rotação uniforme em torno de um eixo que está naquela seção principal. No caso em que, como foi suposto acima, essa seção principal é ortogonal ao eixo  $a$ , temos que os cossenos dos ângulos do eixo de rotação com os eixos principais são, respectivamente,  $0, \frac{h}{\omega}, \frac{k}{\omega}$  e o tempo de rotação  $\frac{2\pi}{\sqrt{q^2+r^2}}$ . Além disso, temos que  $0, b\frac{h}{\omega}, c\frac{k}{\omega}$  são as coordenadas, relativamente aos eixos principais, da extremidade do eixo instantâneo de rotação e, no movimento interno, as órbitas elípticas das partículas do fluido são paralelas ao plano tangente do elipsoide no ponto que é a extremidade do eixo de rotação instantânea, estando portanto os centros das elipses nesse eixo. As partículas do fluido movimentam-se nessas órbitas de tal modo que os raios vetores traçados a partir dos respectivos centros descrevem áreas iguais em tempos iguais, sendo a elipse totalmente percorrida no tempo  $\frac{2\pi}{\sqrt{q^2+r^2}}$ .

## 9.

Retornamos agora ao estudo do movimento da massa fluida, no caso em que  $u, u'; v, v'$  são sempre nulos, havendo portanto somente uma rotação em torno de um eixo

principal, e observamos a seguir que as equações (7.1), que regem as mudanças dos eixos principais, têm mais uma interpretação intuitiva. De fato, podemos considerá-las como as equações do movimento de um ponto material  $(a, b, c)$  de massa 1, vinculado a uma superfície dada pela equação  $abc = \text{const.}$ , impulsionada por forças, cujo potencial tem valor absoluto igual e sinal contrário de

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} - 2\varepsilon H.$$

Denotando essa grandeza por  $G$ , podemos escrever as seguintes equações para ambos os movimentos

$$\frac{d^2a}{dt^2} \delta a + \frac{d^2b}{dt^2} \delta b + \frac{d^2c}{dt^2} \delta c + \delta G = 0 \quad (1)$$

para todos os valores infinitamente pequenos de  $\delta a, \delta b, \delta c$ , que satisfazem a equação  $abc = \text{const.}$ ; e a conservação da energia mecânica dá

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left( \frac{db}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \right) + G = \text{const.},$$

segundo daí que a parte da energia mecânica independente da mudança de forma da massa fluida é igual a  $G$ .

Quando as derivadas  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$  são nulas<sup>1</sup> temos que as funções  $a, b, c$  são constantes e, conseqüentemente, também são constantes a situação do movimento e a forma do elipsoide se, e somente se, for nula a variação primeira da função  $G$  das variáveis  $a, b, c$ , ligadas pela condição  $abc = \text{const.}$ , o que nos conduz às equações (7.3) ou (7.4) e (7.5). Essa estabilidade do movimento será, no entanto, débil quando esse valor da função não é um mínimo; nesse caso haverá mudanças arbitrariamente pequenas do estado da massa fluida que acarretam uma mudança completa da mesma.

A análise direta da variação segunda para o caso em que a variação primeira da função  $G$  é nula seria muito complicada; podemos, no entanto, decidir se a função, nesse caso, tem um mínimo, da maneira que segue.

Mostraremos com facilidade que a função, quaisquer valores que possam ter  $\tau^2, \tau'^2$  e  $a, b, c$ , para um sistema de valores das variáveis independentes, terá um valor mínimo; isso segue evidentemente de três circunstâncias: a primeira, que a função  $G$  tem um valor limite, que não é negativo quando os eixos se tornam infinitamente pequenos ou infinitamente grandes, a segunda é que sempre há valores de  $a, b, c$  para os quais  $G$  é negativa e, em terceiro lugar, que  $G$  nunca pode ser infinitamente negativa. Essas três propriedades da função  $G$  seguem de propriedades conhecidas da função  $H$ . A função  $H$  atinge o seu maior valor quando a massa fluida assume a forma de uma esfera, a saber, o valor  $2\pi\rho^2$ , onde  $\rho$  denota o raio da esfera, ou seja,  $\sqrt[3]{abc}$ ; além disso,  $H$  se torna infinitamente pequeno quando um dos eixos se torna infinitamente grande, conseqüentemente pelo menos um dos outros dois infinitamente pequeno. No entanto,  $H$  se torna infinitamente pequeno de tal sorte que, se  $b$  se torna infinitamente grande,  $Hb$  não se torna infinitamente pequeno, logo, no caso de  $a$  não se tornar infinitamente grande, a parte negativa de  $G$  acabará sempre por sobrepujar a parte positiva.

<sup>1</sup> N. do T. Em um dado instante.

Quando  $\tau^2$  não é nulo, já dentre os valores de  $a, b, c$  satisfazendo  $b > a$  deve haver um sistema de valores para os quais a função é mínima; pois nesse caso as três condições acima, das quais segue a existência de um mínimo, já estão satisfeitas nessa região, uma vez que  $G$  torna-se não negativa no caso limite  $a = b$ .

Podemos agora investigar quantas são as soluções (7.3) cuja variação primeira é nula. Essa investigação pode ser facilitada quando se consideram as expressões de  $\tau^2$  e  $\tau'^2$  para valores complexos de  $a, b, c$ . No entanto, na presente seção não iremos empreender essa investigação e deveremos nos contentar em enunciar os resultados que serão necessários a seguir.

Se  $\tau^2$  é distinto de zero, de cada lado do plano  $b = a$  as equações (7.3) permitem somente uma solução; assim, a variação primeira se anula, em cada um dos lados desse plano, somente para um sistema de valores, e para esses valores a função  $G$  deve assumir o seu mínimo, que nós denotaremos por  $G^*$ .

Quando  $\tau^2$  é nulo, a variação primeira se anula para  $b = a$  e um valor de  $c$ ; este último é  $a$  se  $\tau'^2 = 0$  e decresce constantemente com o crescimento de  $\tau'^2$ . A variação segunda para esse sistema de valores pode ser escrita facilmente como uma combinação linear de  $(\delta a + \delta b)^2$  e  $(\delta a - \delta b)^2$ , em que o coeficiente de  $(\delta a + \delta b)^2$  é sempre positivo, já que a função  $G$ , como conhecemos de investigações anteriores, dentre todos os valores que ela pode assumir para  $b = a$ , assume o menor deles.

O coeficiente de  $(\delta a - \delta b)^2$ , por outro lado, é

$$\frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left( \frac{s - ab}{(a^2 + s)(b^2 + s)} + \frac{c^2}{ab(c^2 + s)} \right),$$

portanto somente positivo quando  $\frac{c}{a} > 0,303327\dots$  e, em consequência,  $\tau'^2 < \varepsilon\pi q^4 \cdot 8,64004\dots$ , mas o coeficiente é negativo quando  $\frac{c}{a}$  ultrapassa esse valor.

Para esse sistema de valores, a função  $G$  tem um mínimo ( $G^*$ ) somente no primeiro caso e o exame das equações (7.3) mostra então que a variação primeira se anula somente para esse sistema de valores. No último caso, entretanto, essa função tem um ponto de sela e ela deve, necessariamente, ter um mínimo ( $G^*$ ) para mais dois sistemas de valores; segue novamente da análise das equações (7.3) que a variação de primeira ordem ainda se anula para (somente) dois sistemas de valores. Tais valores obtêm-se, um do outro, por troca de  $a$  por  $b$ .

Desse estudo segue então que o caso de rotação de um elipsoide de rotação achatado, em torno de seu eixo menor, caso esse já conhecido por Maclaurin, somente é instável enquanto a relação do eixo menor com os demais for menor que  $0,303327\dots$ ; uma pequena diferença entre os outros dois eixos mudaria totalmente a situação de movimento e a forma da massa fluida, e surgiria uma permanente oscilação em torno da situação que representa o mínimo de  $G$ . Essa situação consiste de uma rotação uniforme de um elipsoide com eixos desiguais em torno de seu eixo menor, ligado a um movimento interno no mesmo sentido, no qual as partículas se movem em elipses semelhantes entre si e perpendiculares ao eixo de rotação. O tempo de percurso completo é igual ao tempo de uma semirrotação, isto é, toda partícula retorna à sua posição original após uma meia rotação do elipsoide.

## 10.

Se a energia mecânica do sistema,

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{da}{dt} \right)_0^2 + \left( \frac{db}{dt} \right)_0^2 + \left( \frac{dc}{dt} \right)_0^2 \right) + G_0 = \Omega,$$

que, evidentemente, nunca pode ser menor do que  $G^*$ , é negativa, então a única possibilidade é a de que o elipsoide oscile permanentemente em uma região limitada, dada pela desigualdade  $G \leq \Omega$ .

No caso em que  $\Omega - G^*$  pode ser considerado infinitamente pequeno, podemos estudar facilmente essas oscilações.

Suponhamos que, na função  $G$ ,  $c$  esteja substituído por seu valor dado pela relação  $abc = a_0 b_0 c_0$ ; assim a equação (9.1) nos dá

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{c}{a} \frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial a} = 0, \quad \frac{d^2 b}{dt^2} - \frac{c}{b} \frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial b} = 0.$$

Os valores de  $a, b, c$  somente podem, agora, diferir infinitamente pouco dos valores que fornecem o mínimo de  $G$ , e se denotamos essas diferenças no tempo  $t$  por  $\delta a, \delta b, \delta c$  e desprezamos termos de ordem superior, obtemos as equações

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta c}{c} &= 0 \\ \frac{d^2 \delta a}{dt^2} - \frac{c}{a} \frac{d^2 \delta c}{dt^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial a^2} \delta a + \frac{\partial^2 G}{\partial a \partial b} \delta b &= 0 \\ \frac{d^2 \delta b}{dt^2} - \frac{c}{b} \frac{d^2 \delta c}{dt^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial b^2} \delta b + \frac{\partial^2 G}{\partial a \partial b} \delta a &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

as quais têm, sabidamente, as soluções

$$\frac{d^2 \delta a}{dt^2} = -\mu\mu \delta a, \quad \frac{d^2 \delta b}{dt^2} = -\mu\mu \delta b, \quad \frac{d^2 \delta c}{dt^2} = -\mu\mu \delta c,$$

onde determinamos a constante  $\mu\mu$  de tal modo que uma dessas equações é consequência das restantes. Essa última condição para  $\mu\mu$  concorda com a condição de que a expressão do segundo grau em  $\delta a, \delta b$

$$2 \delta^2 G - \mu\mu (\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2)$$

seja o quadrado de uma expressão linear nessas grandezas. Essa condição é satisfeita por dois valores positivos de  $\mu\mu$ , uma vez que  $\delta^2 G$  e  $\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2$  são essencialmente positivos. Esses dois valores tornam-se iguais quando  $\delta^2 G$  e  $\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2$  distinguem-se por um fator constante. Esses valores fornecem duas soluções do sistema (1) nas quais  $\delta a, \delta b, \delta c$  variam proporcionalmente a uma função periódica do tempo da forma  $\text{sen}(\mu t + \text{const.})$ , e destas pode-se formar a solução geral.

Tomada cada uma, separadamente, obtemos oscilações periódicas infinitamente pequenas para a forma e situação do movimento. Disto seguiria, é claro, que há somente duas espécies de oscilações que são tanto mais próximas de uma periódica quanto menor forem; no entanto, temos também a existência de oscilações finitas, em vista das

considerações que se seguem. Se  $\Omega$  é negativo,  $a$  deve assumir, evidentemente, um mesmo valor mais de uma vez, e consideramos o movimento a partir do instante no qual  $a$  assume um tal valor pela primeira vez; desse modo, o movimento estará completamente determinado pelos valores iniciais  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{db}{dt}$  e  $b$ . Então também os valores que essas grandezas assumem quando  $a$  assume novamente aquele valor são funções de seus valores iniciais. Designaremos essas funções, concisamente, por  $\chi$ . O movimento será periódico se seus valores forem iguais aos valores iniciais. Da equação  $abc = \text{const.}$  e do princípio da conservação das forças vivas segue que, se  $b$  e  $\frac{da}{dt}$  assumirem novamente seus valores iniciais, então também  $c$ ,  $\frac{db}{dt}$  e  $\frac{dc}{dt}$  coincidirão com seus valores iniciais. Para isso há então somente duas condições a serem satisfeitas e podemos, ao formar as derivadas de  $\chi$ , mostrar, no caso de oscilações infinitamente pequenas, que as equações que exprimem as condições não se contradizem e têm raízes reais em um domínio limitado.

No caso de oscilações periódicas, as grandezas  $a, b, c$  podem, como funções do tempo, ser representadas como séries de Fourier, nas quais, excetuado o caso tratado por Dirichlet, os coeficientes somente podem ser conhecidos aproximadamente. Isso pode acontecer, por exemplo, em razão do fato de estendermos a análise das oscilações infinitamente pequenas, feita acima, a termos de ordem superior.

Pareceu-nos valer a pena estudar, pelo menos superficialmente, esses movimentos, que, pelo critério de simplicidade, são os que estão próximos dos movimentos nos quais a forma e condição do movimento são constantes. A seguir vamos estender o estudo efetuado na seção anterior, onde consideramos o caso em que somente se dá uma rotação em torno de um eixo principal, a todos os movimentos que satisfazem às condições de Dirichlet.

## 11.

Visando esse objetivo, daremos às equações diferenciais ( $a$ ) uma forma mais transparente através da substituição das grandezas  $u, v, \dots, w'$  pelas grandezas  $g, h, \dots, k, l$ , e assim generalizar o significado de  $G$ , de modo que a expressão

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{g+g_l}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{h+h_l}{c-a} \right)^2 + \left( \frac{k+k_l}{a-b} \right)^2 \\ + \left( \frac{g-g_l}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{h-h_l}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{k-k_l}{a+b} \right)^2 \end{array} \right\} - 2\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{a_0 b_0 c_0 ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

seja a parte da energia mecânica independente da mudança de forma.

Temos então

$$p = \frac{\partial G}{\partial g}, \quad q = \frac{\partial G}{\partial h}, \quad r = \frac{\partial G}{\partial k},$$

$$p_l = \frac{\partial G}{\partial g_l}, \quad q_l = \frac{\partial G}{\partial h_l}, \quad r_l = \frac{\partial G}{\partial k_l},$$

e daí as seis últimas equações ( $\alpha$ ) podem escrever-se

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= h \frac{\partial G}{\partial k} - k \frac{\partial G}{\partial h}, & \frac{dg_i}{dt} &= h_i \frac{\partial G}{\partial k_i} - k_i \frac{\partial G}{\partial h_i}, \\ \frac{dh}{dt} &= k \frac{\partial G}{\partial g} - g \frac{\partial G}{\partial k}, & \frac{dh_i}{dt} &= k_i \frac{\partial G}{\partial g_i} - g_i \frac{\partial G}{\partial k_i}, \\ \frac{dk}{dt} &= g \frac{\partial G}{\partial h} - h \frac{\partial G}{\partial g}, & \frac{dk_i}{dt} &= g_i \frac{\partial G}{\partial h_i} - h_i \frac{\partial G}{\partial g_i},\end{aligned}\quad (1)$$

enquanto que as três primeiras tornam-se

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial a} - 2\frac{\sigma}{a} = 0, \quad \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial b} - 2\frac{\sigma}{b} = 0, \quad \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial c} - 2\frac{\sigma}{c} = 0. \quad (2)$$

Notemos que da equação (II) seguem, quando  $\omega = 0$ , as três equações integrais  $g = 0$ ,  $h = 0$ ,  $k = 0$ ; isto significa que essas grandezas permanecem nulas se inicialmente já o forem. Naturalmente o mesmo vale para as grandezas  $g_i, h_i, k_i$ .

Das equações diferenciais (1) e (2) pode-se facilmente ver que, para o anulamento da variação primeira da função  $G$  nas nove variáveis  $a, b, \dots, k_i$  ligadas pelas três condições

$$abc = \text{const.}, \quad g^2 + h^2 + k^2 = \omega^2, \quad g_i^2 + h_i^2 + k_i^2 = \omega_i^2,$$

é necessário e suficiente que

$$\frac{d^2a}{dt^2}, \quad \frac{d^2b}{dt^2}, \quad \frac{d^2c}{dt^2}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{dk_i}{dt}$$

sejam nulas; com isso, a forma e o estado de movimento do elipsoide permanecem constantes quando  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$  são nulas<sup>2</sup>. Os casos nos quais isso acontece já foram por nós discutidos completamente. Aqui também resulta facilmente que a função  $G$  deve ter, para pelo menos um sistema de valores para as variáveis independentes, um mínimo, já que, para o único caso limite em que os eixos se tornam infinitamente grandes ou infinitamente pequenos, a função  $G$  converge para um valor que não é negativo, e como nós já vimos, a função  $G$  torna-se negativa para certos valores das variáveis independentes, sem, no entanto, tornar-se infinitamente negativa. Para o estado de movimento constante, correspondente a um tal valor mínimo de  $G$ , segue, do princípio da conservação das forças vivas, que todo desvio infinitamente pequeno deste estado, satisfazendo à condição de Dirichlet, somente produz pequenas oscilações, enquanto por outro lado, em qualquer outro caso, a estabilidade da forma e do estado de movimento é muito débil. A procura dos estados de movimentos correspondentes a um valor mínimo de  $G$  não é somente importante para a determinação das possíveis formas estáveis de uma massa fluida e pesada, mas também para um embasamento para a integração de nossas equações diferenciais por meio de séries infinitas; por esse motivo vamos ver quais são os casos em que, a primeira variação sendo nula, a função  $G$  possui um mínimo. Para cada um dos casos anteriormente encontrados, nos quais o elipsoide preserva a sua forma, obtemos por permutação dos eixos e por alteração dos sinais das grandezas  $g, h, \dots, k_i$  diversos sistemas de valores  $a, b, \dots, k_i$  para os quais a

<sup>2</sup> N. do T. Em um dado instante.

primeira variação de  $G$  é nula; no entanto, podemos aqui unificar, uma vez que  $G$  tem o mesmo valor para todos e, no que se refere à nossa questão, para todos o resultado é o mesmo.

Antes de considerar cada caso, individualmente, devemos notar que o estudo, no caso em que  $\omega$  ou  $\omega'$ , é nulo, tem uma notável simplificação, uma vez que  $g, h, k$  ou  $g', h', k'$ , não aparecem em  $G$ . A investigação anteriormente feita dos estados de movimento constantes fornece apenas dois casos em que uma dessas grandezas é nula. No caso tratado na seção 6, isso somente pode dar-se quando

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4,$$

ou seja, quando a expressão

$$b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - 3a^4, \quad (3)$$

que nós denotaremos por  $E$ , for nula, e aqui resulta que ou  $\omega$  ou  $\omega'$ , é igual a zero. Por outro lado, a equação  $E = 0$ , quando resolvida em relação à variável  $a$ , fornece-nos somente uma raiz positiva, a qual está entre  $\frac{b+c}{2}$  e  $b$  e, portanto, essa equação somente pode ter solução no caso (I). Além desse caso temos ainda aquele estudado na seção 7, onde  $\omega$  ou  $\omega'$ , é nulo se  $\tau^2 = \tau'^2$ .

A seguir pode-se mostrar que nos casos (I), (II) e (III) a função  $G$  não pode ter mínimo, pois, enquanto  $a, b, c$  permanecem constantes, as grandezas  $g, h, k$  podem ser mudadas de tal modo que o valor da função decresça. Uma vez que  $g$  e  $g'$  são nulos e  $h, h', k, k'$ , excluído o fato  $E = 0$ , não são nulos, teremos as seguintes condições para as variações dessas grandezas:

$$\delta g^2 + 2h \delta h + 2k \delta k = 0, \quad \delta g'^2 + 2h' \delta h' + 2k' \delta k' = 0$$

e a variação de  $G$  torna-se

$$\frac{1}{4} \left( \left( \frac{\delta g + \delta g'}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{\delta g - \delta g'}{b+c} \right)^2 \right) + \frac{\partial G}{\partial h} \delta h + \frac{\partial G}{\partial k} \delta k + \frac{\partial G}{\partial h'} \delta h' + \frac{\partial G}{\partial k'} \delta k',$$

ou, já que

$$\frac{\partial G}{\partial h} : \frac{\partial G}{\partial k} = h : k, \quad \frac{\partial G}{\partial h'} : \frac{\partial G}{\partial k'} = h' : k',$$

torna-se

$$\delta G = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\delta g + \delta g'}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{\delta g - \delta g'}{b+c} \right)^2 \right) - \frac{1}{2h} \frac{\partial G}{\partial h} \delta g^2 - \frac{1}{2h'} \frac{\partial G}{\partial h'} \delta g'^2. \quad (4)$$

Formando-se o determinante dessa expressão do segundo grau em  $\delta g$  e  $\delta g'$ , e substituindo-se nele os valores abaixo, dados em (6.1),

$$\begin{aligned} \frac{2h}{q} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \pm \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \\ \frac{2h'}{q'} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \mp \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \end{aligned} \quad (5)$$

e, conseqüentemente,  $\frac{hh'}{qq'} = E$ , encontraremos, para o determinante,

$$\frac{3(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{4E(b^2 - c^2)^2}.$$

Esse determinante é, então, positivo no caso (I), quando  $E < 0$ , e no caso (III). Nos dois primeiros casos, conseqüentemente, a expressão (4) pode ter tanto valores positivos como negativos; porém, nos outros dois, somente valores positivos ou somente negativos. Por outro lado, para  $\delta g_l = -\delta g$ , temos o valor

$$\delta g^2 \left( \frac{1}{(b+c)^2} - \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2E} \right),$$

o qual, nas condições estabelecidas, é sempre negativo, o que se pode ver, com facilidade, colocando-o na forma

$$-\frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)(b^2 + 4bc + c^2 + 2a^2) + (4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)}{4(b+c)^2 E} \delta g^2$$

e notando que  $b^2 + c^2 - 2a^2$  é positivo quando  $E \geq 0$ .

Quando uma das duas grandezas  $\omega$  ou  $\omega_l$  é igual a zero, por exemplo  $\omega_l$ , a condição entre  $\delta g_l$ ,  $\delta h_l$ ,  $\delta k_l$  é

$$\delta g_l^2 + \delta h_l^2 + \delta k_l^2 = 0;$$

conseqüentemente, a expressão da variação de  $G$  reduz-se a

$$\delta G = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2 + c^2}{(b^2 - c^2)^2} - \frac{q}{h} \right) \delta g^2$$

e, de (5), obtém-se

$$\frac{h}{q} = b^2 + c^2 - 2a^2,$$

uma vez que  $\frac{2h_l}{q_l} = 0$ . Por substituição desse valor vem

$$\delta G = -\frac{(b^2 + c^2)(4a^2 - (b+c)^2) + (b-c)^2(b^2 + 4bc + c^2)}{4(b^2 - c^2)^2(b^2 + c^2 - 2a^2)} \delta g^2,$$

que, portanto, é negativo, uma vez que  $b^2 + c^2 - 2a^2$  e  $4a^2 - (b+c)^2$  são, nesse caso, positivos.

Logo, em todos esses casos, a função  $G$  não tem um mínimo e, portanto, devemos apenas considerar o fato estudado na seção 7, onde podemos excluir inteiramente o caso em que  $b = a$  e  $\tau'^2 > \varepsilon\pi\sigma^4 \cdot 8,64004 \dots$ . Quando uma das duas grandezas  $\omega^2$  ou  $\omega_l^2$  é nula temos, para todo valor da outra grandeza, um estado de movimento constante para o qual  $\tau^2 = \tau'^2$ , e a função  $G$  deve ter aí o seu mínimo. Já para dois valores quaisquer de  $\omega^2$  e  $\omega_l^2$ , ambos não nulos, obtemos dois estados de movimento da massa fluida, e podemos passar de um para o outro por troca dos valores  $\tau^2$  e  $\tau'^2$ ; pois para determinar  $\tau^2$  e  $\tau'^2$  por meio de  $\omega^2$  e  $\omega_l^2$  podemos fazer

$$\tau = \frac{\omega + \omega_l}{2}, \quad \tau' = \frac{\omega - \omega_l}{2}$$

e aí escolher arbitrariamente os sinais de  $\omega$  e  $\omega_l$ .

Contudo, no caso em que  $\omega$  e  $\omega'$  têm sinais iguais, tendo portanto  $\tau^2$  o maior dos dois valores, podemos mostrar facilmente que não há mínimo para  $G$ . As condições para as variações das grandezas  $g, h, \dots, k$  são agora

$$\delta g^2 + \delta h^2 + 2k \delta k = 0, \quad \delta g'^2 + \delta h'^2 + 2k' \delta k' = 0,$$

e daí a variação de  $G$  é

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\delta g + \delta g'}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{\delta h + \delta h'}{c-a} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\delta g - \delta g'}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{\delta h - \delta h'}{c+a} \right)^2 \end{aligned} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{1 + \frac{\omega'}{\omega}}{(a-b)^2} + \frac{1 - \frac{\omega'}{\omega}}{(a+b)^2} \right) (\delta g^2 + \delta h^2) \\ & + \left( \frac{1 + \frac{\omega}{\omega'}}{(a-b)^2} + \frac{1 - \frac{\omega}{\omega'}}{(a+b)^2} \right) (\delta g'^2 + \delta h'^2) \end{aligned} \right\}.$$

Essa contém, no entanto, um valor negativo quando  $\omega$  e  $\omega'$  têm sinais iguais e quando supomos  $\delta h = \delta h' = 0, \delta g' = -\delta g$ , já que

$$\delta G = \left\{ \frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(b+a)^2} + \left( \frac{1}{(b+a)^2} - \frac{1}{(b-a)^2} \right) \frac{(\omega + \omega')^2}{4\omega\omega'} \right\} \delta g^2$$

e aqui valem

$$\frac{1}{(b+a)^2} < \frac{1}{(b-a)^2}$$

e também

$$\frac{1}{(b+c)^2} < \frac{1}{(b+a)^2};$$

agora, para  $c \leq a$  temos, por (7.3),

$$\frac{\tau'^2}{(b+a)^2} \geq \frac{\tau^2}{(b-a)^2},$$

que acarreta  $\tau'^2 > \tau^2$  e, conseqüentemente,  $\tau'^2$  somente pode ser maior do que  $\tau^2$  se  $c > a$ .

Nesse caso a função  $G$  também não tem mínimo, o que deve, portanto, ocorrer no único caso restante.

Assim, isso deve ocorrer para o movimento considerado na seção 7, quando  $\tau^2 \leq \tau'^2$  (excluído o caso singular acima mencionado); como em todos os outros casos a estabilidade da forma e do estado de movimento da massa fluida é apenas fraca, teríamos, nesse caso, que toda perturbação infinitamente pequena da forma e do estado de movimento da massa fluida satisfazendo às condições de Dirichlet produz somente oscilações infinitamente pequenas.

Daqui não segue, evidentemente, que nesse caso o estado da massa fluida é estável. A análise das condições para que isso se verifique poderia muito bem ser feita por meios conhecidos, já que elas são formuladas em termos de equações diferenciais. No entanto, devemos abrir mão desse tratamento neste trabalho, o qual é dedicado unicamente ao desenvolvimento das belas ideias com as quais Dirichlet coroou sua atividade científica.