Paul Erdös, o mago

Rosali Brusamarello
Emerson L. Monte Carmelo

Universidade Estadual de Maringá

Nesta modesta homenagem a Paul Erdös, relatamos brevemente a vida desse lendário matemático. Com o intuito de exibir pelo menos uma fotografia de sua obra, escolhemos como cenário a teoria de Ramsey. Ao mesmo tempo, essa foto revela uma face da combinatória pouco divulgada na comunidade brasileira.

O nômade

Paul Erdös nasceu em 26 de março de 1913, em Budapeste, capital da Hungria. Filho de professores de matemática do ensino médio, herdou o gosto pelo assunto. Aos quatro anos de idade já evidenciava incrível capacidade de fazer contas de cabeça. Ele impressionava visitantes perguntando a sua data de nascimento e lhes devolvendo rapidamente o número de segundos que eles tinham vivido.

No ensino médio, Erdös gostava de participar de competições de matemática, além de ser leitor assíduo do Kömal (Jornal de Matemática e Física para a Escola Secundária) e adorava resolver os problemas propostos nessa revista. Através do Kömal, Erdös conheceu dois jovens matemáticos que se tornaram seus grandes amigos e colaboradores, Paul Turán e Tibor Gallai.

Sua tese de doutorado foi defendida na Universidade de Pázmány, Budapeste, em 1934. Apesar de ter sido orientado pelo analista Fejér, sua tese abordava teoria dos números.

De 1934 a 1938 Erdös recebeu uma bolsa para estudar em Manchester, na Inglaterra. Nesse período, continuou trabalhando em teoria dos números, mas iniciou também trabalhos em combinatória e teoria de Ramsey, em coautoria com Richard Rado. Mesmo estando fora da Hungria, Erdös trabalhou com Turán e Géza Grünwald em análise e com Gallai em teoria de grafos.

Devido à crise que estava rondando a Europa, Erdös decidiu ir aos Estados Unidos em 1938. Com a Segunda Guerra Mundial e o período pós-guerra, ficou impossibilitado de retornar à sua terra natal por uma década. Elaborou trabalhos importantes em métodos probabilísticos, teoria da dimensão, teoria de conjuntos, teoria de grafos e teoria dos números, ampliando ainda mais o seu leque de atuação.

Em 1948, Erdös visitou sua mãe e amigos na Hungria. No período em que esteve fora, seu pai faleceu de ataque cardíaco, sua mãe passou por um período difícil, com perda de parentes, e muitos de seus colegas matemáticos morreram vítimas da perseguição nazista. A Hungria se tornou um país comunista no ano seguinte, as fronteiras foram fechadas e novamente Erdös ficou impossibilitado de retornar a Budapeste por vários anos.

Sua origem e suas conexões com países comunistas trouxeram transtorno: ele perdeu o seu breve emprego na Universidade de Notre Dame e teve seu visto de entrada negado quando retornava de um congresso em Amsterdam. Foi considerado *persona non grata* nos Estados Unidos entre 1954 e 1963, fato este lamentado pela comunidade matemática americana.

A Universidade de Tel Aviv o acolheu. A partir de 1956, trabalhos com colegas húngaros foram retomados graças a uma permissão do governo húngaro para que ele entrasse e saísse do país quando quisesse. Trabalhou principalmente com Alfréd Rényi (combinatória e probabilidade), com Turán (interpolação e teoria de grupos) e com András Hajnal (teoria dos conjuntos). Sua moradia era nas montanhas, nos chalés da Academia Húngara de Ciências, da qual era membro. Sempre em companhia de sua mãe, Erdös fez deste lugar nas montanhas uma verdadeira Meca dos matemáticos e recebia muitos visitantes. Após a morte de sua mãe, aos 91 anos, Erdös ficou bastante deprimido e passou a trabalhar 19 horas por dia.

Erdös visitou algumas instituições brasileiras em 1994, passando por Brasília, São Paulo, Campinas, Rio de Janeiro, e trabalhou com Yoshiharu Kohayakawa, do IME/USP, em teoria de grafos.

Apesar de ter sido um dos melhores matemáticos do século XX, Paul Erdös nunca teve um emprego duradouro e adotava uma vida nômade: dificilmente dormia mais de sete noites na mesma cama. Ele costumava dizer "*another roof, another proof*" (outro teto, outra demonstração). Embora vivesse de bolsas, empregos temporários e ajuda de amigos, este estilo de vida nunca foi um empecilho aos seus avanços na matemática, pois ele não era uma pessoa materialista e se preocupava apenas com sua subsistência. "*Property is nuisance*" (propriedade é estorvo) é uma de suas famosas frases, assim como "matemáticos são máquinas que transformam café em teoremas". Quando recebia mais do que necessitava (o que ocorria com frequência devido a sua fama), doava às instituições de caridade ou ajudava jovens matemáticos.

Mas a grande contribuição que Erdös dava aos jovens matemáticos era na proposição de problemas. Ele estava sempre disposto a discutir matemática com qualquer pessoa que estivesse com a "mente aberta" (este é um termo que ele usava muito) e sabia colocar as questões na dose certa para o nível do interlocutor.

Paul Erdös "partiu" em 20 de setembro de 1996 em Varsóvia, dois dias após ter dado uma conferência no Banach Center. Segundo o próprio Erdös, "partir" significa morrer e "morrer" é quando uma pessoa para de fazer matemática.

A lenda

Pode-se dizer que Paul Erdös fez pesquisa em matemática desde os quatro anos de idade, quando descobriu sozinho os números negativos, até os últimos minutos de sua vida. Graças a essa dedicação e paixão intensa pela matemática ele escreveu aproximadamente 1500 artigos, sendo o primeiro escrito com 19 anos de idade. Não é apenas a quantidade de artigos que nos impressiona, mas também a diversidade de assuntos abordados e a quantidade de coautores. Apesar de ter trabalhado mais nas áreas de teoria dos números e combinatória, publicando mais de 600 artigos em cada, ele cobriu 40% dos 2-dígitos na classificação do Mathematical Reviews e publicou com mais de 450 matemáticos dispersos pelo mundo todo.

Em homenagem a sua reputação, surgiu uma brincadeira no meio matemático: calcular o *número de Erdös* de uma pessoa. Esse número mede a distância de colaboração da pessoa com Erdös, definido da seguinte forma: o número de Erdös do próprio Erdös é zero; o número de Erdös de seus coautores é 1; o número de Erdös de alguém que publicou com um coautor de Erdös é 2; e assim sucessivamente. Como Erdös publicou com matemáticos de diversas áreas e em diversos países, conjectura-se que a grande maioria dos matemáticos tenha um número de Erdös, e relativamente pequeno.

Há inclusive cientistas fora da matemática com número de Erdös pequeno. Por exemplo, Albert Einstein tem número de Erdös 2, pois publicou com o matemático alemão Ernst Gabor Straus, que foi coautor de Erdös. Vários ganhadores do Prêmio Nobel de Física e de outras áreas têm número de Erdös pequeno. John von Neumann tem número de Erdös 3 e publicou com David Hilbert. Por causa disso, Hilbert tem número de Erdös igual a 4. Ao colega interessado em saber seu número de Erdös, basta acessar *www.ams.org/mathscinet/otherTools.html* e buscar em "*collaboration distance*".

Erdös dava um valor quase religioso às verdades matemáticas. A pedra fundamental da teologia de Erdös é *O Livro*. Para ele, *O Livro* contém todos os teoremas da matemática e, para cada teorema, uma única prova, a mais bela, chamada *prova do Livro*. Quando Erdös propunha um problema aos seus colegas e um deles o resolvia de uma maneira correta, porém "feia", ele dava os parabéns à pessoa e depois dizia "agora vamos em busca da prova do Livro". Essa ideia de que toda a matemática está pronta (aguardando que alguém a descubra) fascinou e fascina até hoje muitos matemáticos.

Provas do Livro?

O mago de Budapeste surpreendia a comunidade matemática com suas demonstrações elegantes. Como uma de suas proezas, em 1930, descobriu uma prova mais simples do Teorema de Chebyshev (mais conhecido como Postulado de Bertrand):

> *Para qualquer n, sempre há um primo entre n e $2n$.*

A reprodução dessa prova está fora do escopo deste artigo, mas um pouco do "estilo do mágico" pode ser captado nas provas abaixo.[1] Cabe ao leitor julgar se as incluiria no Livro.

Vejamos a demonstração dada por Erdös de que a série harmônica diverge. Suponhamos que $s = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ seja convergente. Substituindo todos os termos da forma $1/(2j-1)$ por $1/(2j)$, obtemos

$$s > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\dots$$

Efetuadas as somas entre parênteses, a série acima coincide com s, produzindo o absurdo $s > s$.

E qual é o comportamento da série harmônica restrita aos números primos? Motivado pela questão, Euler introduziu a função zeta (posteriormente estendida à função zeta de Riemann) e, assim, foi capaz de mostrar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$, onde p_i denota o i-ésimo número primo, diverge.

Detalhamos a prova de Erdös. Se a série acima for convergente, escolhemos m tal que

$$\frac{1}{p_{m+1}}+\frac{1}{p_{m+2}}+\frac{1}{p_{m+3}}+\dots<\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Particionamos o conjunto $U = \{1, 2, ..., 4^{m+1}\}$ em dois conjuntos, digamos A e $\overline{A}$, pelo critério seguinte: colocamos $n \in A$ se e somente se n tem um divisor primo p_k, para algum $k \geq m+1$. Usando (1), um simples argumento de contagem mostra que

$$|A| \leq \frac{4^{m+1}}{p_{m+1}}+\frac{4^{m+1}}{p_{m+2}}+\frac{4^{m+1}}{p_{m+3}}+\dots<\frac{1}{2}4^{m+1},$$

onde $|A|$ denota o número de elementos de A. Por outro lado, $n \in \overline{A}$ se e somente se n é da forma $p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_m^{c_m}$. A "carta na manga" aparece aqui: escrevemos $n = a^2 b$, onde a^2 denota o maior divisor quadrado de n. Assim obtemos $1 \leq a \leq 2^{m+1}$ e $b = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_m^{e_m}$, onde, para cada i, $e_i = 0$ ou $e_i = 1$. Há 2^{m+1} possibilidades de escolha de a e 2^m escolhas de b, portanto $|\overline{A}| \leq 2^{m+1} 2^m = \frac{1}{2} 4^{m+1}$. Assim

$$4^{m+1} = |A \cup \overline{A}| = |A| + |\overline{A}| < \frac{1}{2}4^{m+1} + \frac{1}{2}4^{m+1},$$

absurdo.

Teoria de Ramsey

"Desordem completa é impossível." Esta é a descrição "em tom publicitário" da teoria de Ramsey segundo T. S. Motzkin. Intuitivamente, a teoria investiga a ordem inerente nas estruturas matemáticas. Em outras palavras, a teoria de Ramsey aborda resultados matemáticos da seguinte natureza: qualquer distribuição dos objetos de um sistema "grande" em "poucas" classes invariavelmente garante a existência de uma classe contendo um subsistema "grande".

O nome da teoria faz homenagem ao trabalho pioneiro do matemático, filósofo e economista britânico Frank Plumpton Ramsey (1903–1930). Tal teoria impressionava fortemente Erdös, a ponto dele dedicar muito tempo de sua vida a descobrir aplicações ou a propor problemas correlatos, contribuindo para popularizá-la.

Nesta seção descrevemos alguns conceitos principais sobre a teoria. Iniciamos com o caso mais simples.

O Princípio da Casa dos Pombos

A versão mais popular do *Princípio da Casa dos Pombos* (PCP) (também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet) afirma que

> *Distribuídos $n+1$ pombos em n casas, haverá uma casa com pelo menos 2 pombos.*

Embora sua demonstração seja óbvia, não é raro aplicações exigirem uma certa dose de perspicácia. O resul-

[1] *As demonstrações foram apresentadas pelo Prof. Vilmos Komornik (Universidade de Strasbourg, França, amigo e colaborador de Erdös) em sua visita à UEM, em setembro de 2006.*

tado segundo o qual todo domínio de integridade finito é corpo ilustra uma aplicação sutil deste princípio.

Para facilitar o nosso propósito, enfatizaremos a seguinte versão do PCP:

> *Colocados $s+t-1$ pombos em 2 casas, então a primeira tem pelo menos s pombos ou a segunda tem pelo menos t pombos,*

cuja reformulação segue. Como usual, $|X|$ denota a cardinalidade do conjunto X e $[n]$ representa um conjunto qualquer com n elementos ($[n] = \{1, 2, ..., n\}$ na maioria dos casos). Uma 2–*coloração* do conjunto X é uma função $\chi : X \to \{\text{azul}, \text{vermelho}\}$ (ou simplesmente $\chi : X \to \{0, 1\}$). Naturalmente $\chi(x)$ representa a cor de x (em relação a χ) e um subconjunto $S \subset X$ é *monocromático* se a imagem de S tem apenas um elemento (uma cor).

A relação de partição $n \to (s,t)^1$ significa: para qualquer 2–coloração de $[n]$, existe um subconjunto $S \subset [n]$, $|S| = s$, com S monocromático na cor azul, ou existe um subconjunto $T \subset [n]$, $|T| = t$, monocromático na cor vermelha. A negação de $n \to (s,t)^1$ será indicada por $n \not\to (s,t)^1$. Assim, a versão do PCP acima equivale a $s+t-1 \to (s,t)^1$.

Partições de Ramsey – versão simplificada

A teoria de Ramsey investiga diversas generalizações do PCP. Antes de desvendarmos a clássica relação de Ramsey, ilustramos um resultado particular, simples mas emblemático. Assumimos aqui a simetria da relação "conhecer", ou seja, sicrano conhece fulano se e somente se fulano conhece sicrano.

Exemplo 1. *Numa festa com pelo menos seis pessoas, é possível garantir que:*

(i) existem três pessoas que se conhecem mutuamente,

(ii) ou existem três pessoas que são estranhas entre si.

A justificativa da afirmação contém a essência dos argumentos usados por Ramsey. Fixemos uma pessoa, digamos A, e analisemos sua vida social perante outras cinco, digamos B, C, D, E e F. Pelo PCP, ela deve ou conhecer pelo menos três outras, ou desconhecer pelo menos três. Consideremos o primeiro caso, digamos que A conheça C, E e F. Se algum par dentre estes se conhecem, digamos que C conheça F, então A, C e F se conhecem mutuamente. Caso contrário, C, E e F são estranhas entre si. O segundo caso segue analogamente.

Como reformular tal asserção via colorações? Isto exigirá apenas uma pequena adaptação. Notemos que conhecer (ou não) gera naturalmente uma 2–coloração, mas agora o espaço a ser colorido coincide com o conjunto formado pelos 15 pares possíveis dentre as 6 pessoas: associamos $\chi(A,B) = \text{azul}$ (por abuso de notação, o correto seria $\chi(\{A,B\}) = \text{azul}$) quando A e B se conhecem e $\chi(A,B) = \text{vermelho}$, caso contrário.

No caso geral, dado um conjunto X, $X^{(2)}$ denota o conjunto dos pares (não ordenados) de X, ou seja, $X^{(2)} = \{Y : Y \subset X, |Y| = 2\}$. A relação de partição

$$n \to (s,t)^2 \qquad (2)$$

significa: para qualquer 2–coloração de $[n]^{(2)}$, existe um subconjunto $S \subset [n]$, $|S| = s$, com $S^{(2)}$ monocromático na cor azul, ou existe um subconjunto $T \subset [n]$, $|T| = t$, com $T^{(2)}$ monocromático na cor vermelha. A negação de $n \to (s,t)^2$ será indicada por $n \not\to (s,t)^2$.

Logo, a afirmação do Exemplo 1 corresponde a $6 \to (3,3)^2$. A questão a seguir parece natural. Fixados $s \geq 2$ e $t \geq 2$, é possível encontrar um número n onde para quaisquer n pessoas, existam pelo menos s pessoas que se conhecem mutuamente, ou existam t pessoas que são estranhas entre si? A resposta afirmativa foi dada em 1930, conforme o resultado abaixo.

Teorema 2 (Ramsey)**.** *Dados $s \geq 2$ e $t \geq 2$, sempre existe um n suficientemente grande tal que $n \to (s,t)^2$.*

Dessa forma, faz sentido investigar o menor n tal que $n \to (s,t)^2$, gerando a chamada *função de Ramsey*

$$r(s,t) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;:\; n \to (s,t)^2\right\}.$$

Para fixar conceitos: seja χ uma 2–coloração qualquer de $[s]^{(2)}$. Se algum par $S = \{a,b\}$ de $[s]^{(2)}$ recebe a cor azul, então o conjunto $S^{(2)} = \{\{a,b\}\}$ é monocromático. Caso contrário, todos os pares em $[s]^{(2)}$ recebem a cor vermelha, assim o conjunto $T^{(2)} = \{1,2,...,s\}^{(2)}$

é monocromático. Como $s \to (2,s)^2$ e $s-1 \not\to (2,s)^2$, ganhamos $r(2,s) = r(s,2) = s$.

Prova do Teorema de Ramsey. Já vimos que $r(2,s) = r(s,2) = s$ e suponhamos que ambos $r(s,t-1)$ e $r(s-1,t)$ existam. Para completar a prova por indução sobre $s+t$, basta verificar que existe um n tal que $n \to (s,t)^2$. Como candidato, escolhemos $n = r(s,t-1) + r(s-1,t)$. Dada uma 2–coloração χ de $[n]^{(2)}$, fixemos um ponto x em $[n]$ e tomemos os conjuntos: $A_x = \{y \in [n] : \chi(x,y) = \text{azul}\}$ (pessoas conhecidas) e $V_x = \{y \in [n] : \chi(x,y) = \text{vermelho}\}$ (pessoas estranhas). Como estes conjuntos particionam $[n] \setminus \{x\}$ e $|A_x| + |V_x| = n-1$, pelo PCP, uma das afirmações acontece: ou (i) $|A_x| \geq r(s-1,t)$ ou (ii) $|V_x| \geq r(s,t-1)$. Consideremos (i). Pela definição de $r(s-1,t)$, ou existe um subconjunto $T \subset A_x$, $|T| = t$ tal que $T^{(2)}$ recebe apenas a cor vermelha (neste caso, termina a prova), ou existe $S \subset A_x$, $|S| = s-1$ tal que $S^{(2)}$ é monocromático na cor azul. Neste caso, incluindo x, $S^* = S \cup \{x\}$ satisfaz $|S^*| = s$. Desde que $S \subset A_x$, e cada par $\{x,s\}$ é azul para $s \in S$, temos que $[S^*]^{(2)}$ é monocromático azul. O caso (ii) segue analogamente. ■

Valores exatos, Erdös e os extraterrestres

O Exemplo 1 está relacionado a $r(3,3) = 6$. O limite superior já foi visto, cuja prova essencialmente usa o argumento $r(3,3) \leq r(2,3) + r(3,2) = 6$. No anel $\mathbb{Z}_5$, definimos $\chi(a,b) = \text{azul}$ se e somente se $a-b$ é congruente a $+1$ ou -1 módulo 5. Por simples inspeção sobre esta coloração, $5 \not\to (3,3)$ e portanto $r(3,3) > 5$. Alguns argumentos combinatórios e algébricos provam que $r(4,4) = 18$ (ver [4]).

A função de Ramsey não é de difícil assimilação e nem há dificuldade em implementar um algoritmo para o seu cálculo. Por exemplo, a prova de que $r(4,4) \leq 18$ poderia, *a priori*, ser feita pelo método da força bruta, enumerando-se todas as 2–colorações de $[18]^{(2)}$. Dada uma coloração, chamemos de *teste* a verificação da existência de algum subconjunto $S^{(2)}$ monocromático com $|S| = 4$. Imaginando um computador capaz de realizar 2^{100} testes por segundo, a varredura completa demandaria mais tempo do que a idade do Sol, estimada em 4,5 bilhões de anos!

Há um abismo entre a existência de um algoritmo e a existência de um algoritmo eficiente. Na realidade, não é conhecido um algoritmo rápido para o tipo de teste empregado acima. A anedota seguinte nos dá uma intuição sobre o grau de dificuldade associado ao cálculo da função de Ramsey, provavelmente de autoria de Erdös.

> "Extraterrestres dominam a Terra, mas prometem nos devolver a liberdade caso seja encontrado o valor exato de $r(5,5)$. Erdös evocaria um projeto coletivo e universal para resolver a questão pacificamente. Mas caso a condição seja sobre $r(6,6)$, uma guerra contra os invasores teria mais chances de êxito do que a tentativa diplomática."

Embora a função de Ramsey tenha sido pesquisada há mais de 70 anos, poucos valores exatos de $r(s,t)$ são conhecidos. Por curiosidade, o valor exato de $r(5,5)$ ainda é desconhecido, mas sabe-se que $43 \leq r(5,5) \leq 49$. Atualizações periódicas sobre limitantes de $r(s,t)$ estão disponíveis em [7].

Devido a sua dificuldade, passou-se a investigar numerosas variantes e generalizações deste problema, despertando o interesse de pesquisadores de diversas áreas. De fato, a pesquisa relacionada à teoria de Ramsey tem se expandido em várias direções. Conexões e aplicações foram estabelecidas com diversas áreas da matemática: teoria dos números, álgebra linear e multilinear, geometria, topologia, probabilidade, teoria dos conjuntos e fundamentos da matemática (ver [4], [5] e [6]), além de áreas mais aplicadas. Atualmente, a teoria de Ramsey é uma das áreas centrais de pesquisa em combinatória.

Algumas faces da teoria de Ramsey

Tendo como cenário algumas faces da teoria de Ramsey, nesta seção comentaremos brevemente a influência de Erdös sobre elas.

Toda sequência infinita admite uma subsequência crescente ou decrescente. Qual seria a versão finita correspondente? Fixada uma sequência de números reais $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, definimos a coloração χ de $[m]^{(2)}$ por: dados $i < j$, $\chi(i,j) = 0$ se $x_i < x_j$ e $\chi(i,j) = 1$ se $x_i \geq x_j$. Tomando $m = r(n+1, n+1)$, o Teorema de Ramsey garante a existência de uma subsequência monótona (crescente ou decrescente) de comprimento $n+1$. Um refinamento obtido em 1935 é descrito abaixo.

Teorema 3 (Erdös e Szekeres)**.** *Toda sequência de números reais de comprimento n^2+1 possui uma subsequência monótona de comprimento $n+1$.*

Em 1959, Seidenberg apresentou uma nova prova deste resultado, considerada digna do Livro pelo próprio Erdös. Ela pode ser encontrada em [8].

Métodos probabilísticos

A busca de limites gerais tem sido um grande desafio. Usando os valores já vistos $r(2,s) = r(s,2) = s$ e a Identidade de Stieffel, o limite superior abaixo segue por indução sobre $s+t$

$$r(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Pela Fórmula de Stirling, ganhamos $r(s,s) \leq 4^s$.

Naquela época, acreditava-se que a única maneira de provar um limite inferior para r era por meio de métodos construtivos. Mas a convicção caiu por terra quando Erdös, em 1946, exibiu um limite inferior de ordem exponencial e de forma puramente existencial, baseado em métodos probabilísticos. Tal façanha é considerada um marco, pois fez brotar uma nova linha de pesquisa em combinatória, os *métodos probabilísticos*. Métodos probabilísticos têm se desenvolvido rapidamente e se transformaram numa ferramenta poderosa na análise de problemas extremais em combinatória. Curiosamente, a prova dada por Erdös não requer mais do que conceitos básicos de probabilidades. O coração da prova reside no seguinte resultado preliminar.

Lema 4. *Se $\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} < 1$ então $r(t,t) > n$.*

Prova. Vamos mostrar que existe uma coloração de $[n]^{(2)}$ desprovida de subconjunto monocromático $S^{(2)}$, com $|S| = t$. No espaço amostral Ω formado por todas as 2–colorações de $[n]^{(2)}$, tomemos a probabilidade usual P definida por $P[\{a,b\}$ é azul$] = 1/2$ para cada par $\{a,b\}$ em $[n]^{(2)}$.

Dado S um subconjunto de $[n]$ com t elementos, denotando por A_S o evento "$S^{(2)}$ é monocromático", temos que $P[A_s] = 2^{1-\binom{t}{2}}$. Se $\bigvee_S A_S$ representa o evento "algum subconjunto de ordem t é monocromático", pela subaditividade da probabilidade,

$$P\left[\bigvee_S A_S\right] \leq \sum_S P\left[A_S\right] \leq \binom{n}{t} 2^{1-\binom{t}{2}}.$$

Por hipótese, alguma 2–coloração de $[n]^{(2)}$ está no complementar do evento $\bigvee_S A_S$, e assim a afirmação vale. ■

O passo principal já foi feito. Tomando $n = 2^{t/2}$ na hipótese acima e, após algumas estimativas, obtemos

Teorema 5 (Erdös)**.** *Para todo $t > 2$, temos $r(t,t) > 2^{t/2}$.*

Refinamentos, tanto para limites inferiores como para superiores, podem ser consultados em [5] e [6].

Teoria dos números

O Último Teorema de Fermat, resolvido em 1995 depois de mais de 300 anos de intensas pesquisas, afirma que não existe solução não trivial (todas variáveis inteiras e distintas de zero) da equação diofantina

$$x^m + y^m = z^m \tag{3}$$

para $m \geq 3$. Esse problema despertou interesse na comunidade matemática, tendo impulsionado o desenvolvimento de teorias, principalmente na álgebra.

Dentre as inúmeras estratégias de ataques, destacamos uma que surpreendentemente está ligada à teoria de Ramsey. A estratégia de Dickson consistia em estudar possíveis soluções da equação acima não mais em $\mathbb{Z}$, mas sim no âmbito da aritmética modular $\mathbb{Z}_p$, para algum primo p. Caso não existisse solução não trivial nesse novo ambiente, significaria que não existiria solução no problema original. Em 1909, a esperança ruiu quando o próprio Dickson foi capaz de provar a existência de solução em $\mathbb{Z}_p$ para qualquer primo p suficientemente grande, numa demonstração que envolve intrincados cálculos.

Em 1916, Schur apresentou uma prova mais simples e elegante do resultado de Dickson. Vamos pincelar suas ideias, pois são consideradas as primeiras do tipo Ramsey. O método consiste inicialmente em "aritmetizar" o PCP da forma seguinte: colorir os números em $[m]$ e exigir que o conjunto monocromático admita uma solução da equação $x + y = z$.

Para fixar conceitos, tentemos procurar, *a priori*, uma coloração χ de $[5]$ sem solução monocromática. Desde que $1 + 1 = 2$ e $2 + 2 = 4$, podemos assumir que $\chi(1) = \chi(4) = 0$ e $\chi(2) = 1$. Mas como $1 + 3 = 4$, devemos ter $\chi(3) = 1$. Qualquer que seja a cor de 5, inevitavelmente haverá $\{x, y, z\}$ monocromático, com $x + y = z$.

Teorema 6 (Schur)**.** *Para cada $r \geq 1$, existe um m suficientemente grande tal que qualquer r–coloração de $[m]$ (ou seja, qualquer função $\chi : [m] \to \{0, 1, \ldots, r-1\}$) admite um conjunto monocromático $\{x, y, z\}$, com $z = x + y$.*

A demonstração de Schur apresenta o limite superior $m \leq r!e$, onde e denota o número de Euler e $r!$ representa o fatorial de r. No entanto, a prova pode ser derivada do Teorema de Ramsey (ver [4]).

Teorema 7 (Dickson)**.** *Se p é um primo suficientemente grande, a equação (3) admite solução não trivial nos inteiros módulo p.*

Prova. Fixado um primo p, tomemos $n = \mathrm{mdc}(m, p-1)$ e o subgrupo $H = \{x^m : x \in \mathbb{Z}_p^*\}$ do grupo cíclico $\mathbb{Z}_p^*$. Observe que $H = \langle \alpha^m \rangle$, onde α denota um gerador de $\mathbb{Z}_p^*$, e assim H tem índice n. As classes laterais $e_1 H, \ldots, e_n H$ induzem a seguinte n–coloração de $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, ..., p-1\}$: $\chi(a) = i$ se e somente se $a \in e_i H$. Para qualquer p suficientemente grande, pelo Teorema de Schur, existem a, b e c monocromáticos tais que $a + b = c$. Por construção, $\chi(u) = \chi(v)$ se e somente se $u.v^{-1} \in H$. Das igualdades $\chi(a) = \chi(a)$, $\chi(b) = \chi(a)$ e $\chi(c) = \chi(a)$, ganhamos que 1, $b.a^{-1}$ e $c.a^{-1}$ estão em H, formando solução de (3) em $\mathbb{Z}_p$. ■

Os trabalhos de Schur, Cauchy, Davenport e Erdös contribuiram para o desenvolvimento da teoria aditiva dos números.

Fundamentos da matemática

A contribuição de Erdös na teoria dos conjuntos também tangencia a teoria de Ramsey, pois esta também suporta versões transfinitas. O caso mais simples nesse ambiente equivale à versão infinita do PCP:

> *Qualquer 2–coloração de um conjunto infinito apresenta uma classe monocromática infinita.*

Usando a notação vista, $\alpha \to (\alpha, \alpha)^1$ para qualquer cardinal infinito α, inclusive quando $\alpha = \omega$, a cardinalidade dos números naturais. Mas se colorirmos $\mathbb{N}^{(2)}$ (os pares de elementos em $\mathbb{N}$), podemos garantir que há um subconjunto infinito S com $S^{(2)}$ monocromático?

Ramsey também respondeu afirmativamente tal questão.

Teorema 8 (Ramsey)**.** $\omega \to (\omega, \omega)^2$.

Prova. Consideremos χ uma 2–coloração arbitrária de $N^{(2)}$, onde N denota um conjunto tal que $|N| = \omega$. Escolhido $a_1 \in N$, definimos $A_1 = N \setminus \{a_1\}$. Como A_1 é infinito, existe uma cor c_1 e um subconjunto B_1 de A_1 tal que $\chi(\{a_1, b\}) = c_1$, para todo $b \in B_1$. Repetimos o processo acima trocando N por B_1. Escolhido a_2 em B_1, definimos $A_2 = B_1 \setminus \{a_2\}$. Como A_2 é infinito, existe uma cor c_2 e um subconjunto B_2 de A_2 tal que $\chi(\{a_2, b\}) = c_2$, para todo $b \in B_2$. Seguindo o processo indutivamente, obtemos uma sequência infinita $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ e uma sequência infinita de cores $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\chi(\{a_i, a_j\}) = c_i$ sempre que $i < j$. Como c_i é sempre azul ou vermelho, novamente pelo PCP, existe uma subsequência $\{c_{i(k)}\}$ constante. Assim, o conjunto $S = \{a_{i(k)}\}$ é infinito, com $S^{(2)}$ monocromático. ■

Repare que recorremos ao Axioma da Escolha na demonstração anterior. Porém, através de uma coloração particular, é possível mostrar que $c \not\to (c, c)^2$, onde c denota a cardinalidade dos números reais. Surpreendentemente, ω é o único cardinal infinito que satisfaz a relação $\alpha \to (\alpha, \alpha)^2$ no âmbito da ZFC, teoria de Zermelo–Fraenkel munida do Axioma da Escolha.

Na década de 50, Erdös, Rado e Hajnal desenvolveram o cálculo das partições, uma teoria que aborda generalizações e partições tipo Ramsey envolvendo conjuntos transfinitos.

Outras faces

Brevemente comentamos outros caminhos possíveis para a teoria. A teoria dos grafos revela-se um ambiente fértil para a criação de problemas do tipo Ramsey. De fato, dezenas de variantes da função clássica têm sido investigadas.

Por outro lado, geometria e teoria de Ramsey se encontram em várias situações. As trilhas aqui também são diversas: desde a teoria de Ramsey euclidiana (concebida por Erdös, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer e Straus numa série de artigos) até geometrias finitas, utilizadas como ferramentas em problemas extremais tipo Ramsey.

A teoria de Ramsey tem se expandido em várias direções, além daquelas já citadas, associando essa teoria às mais diversas áreas, tais como análise funcional, topologia e computabilidade.

Agradecimentos. Ao Prof. Vilmos Komornik, pois a ideia de escrever esta pequena homenagem nasceu graças a sua palestra sobre o mago. Ao colega e amigo Prof. Ryuichi Fukuoka, pelo estímulo. Aos revisores, pela leitura cuidadosa e pelas várias sugestões.

Referências

[1] BABAI, L.; SPENCER, J. H. Paul Erdös (1913–1996). *Notices of the American Mathematical Society*, v. 45, no. 1, p. 64–73, 1998.

[2] BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*. New York: Springer, 1998. (Graduate Texts in Mathematics, 184).

[3] CASTRO, R. de. Sobre el números de Erdös. *Lecturas Matemáticas*, v. 17, p. 163–179, 1996.

[4] GRAHAM, R. L.; ROTHSCHILD, B. L.; SPENCER, J. H. *Ramsey theory*. New York: Wiley–Interscience, 1980. (Wiley–Interscience Series in Discrete Mathematics).

[5] MOREIRA, C. G.; KOHAYAKAWA, Y. *Tópicos em combinatória contemporânea*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática. (Publicações Matemáticas do IMPA)

[6] NEŠETŘIL, J.; RÖDL, V., eds. *Mathematics of Ramsey Theory*. New York: Springer, 1990. (Algorithms and Combinatorics, 5)

[7] RADZISZOWSKI, S. P. Small Ramsey numbers. *Electronic Journal of Combinatorics*, v. 1, 1994. (Dynamic Survey 1)

[8] SANTOS, J. P. DE O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. 3.ed. Campinas: UNICAMP, 2002.

Rosali Brusamarello (brusama@uem.br)
Emerson L. Monte Carmelo (elmcarmelo@uem.br)
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Maringá
Av. Colombo, 5790
CEP: 87020900, Maringá, Paraná